Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

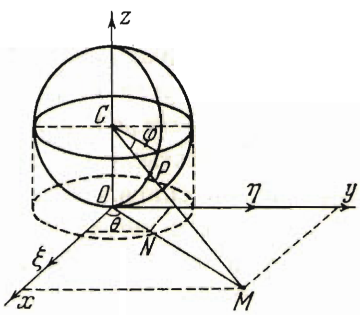
ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

А. Н. Обморшев

(Москва)

Работа посвящена вопросу отыскания предельных циклов в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости для систем, описываемых двумя дифференциальными уравнениями первого порядка. Это исследование дает некоторые указания на поведение фазовых траекторий в конечной области. С помощью сферы единичного радиуса фазовая плоскость отображается на круг, граница которого соответствует бесконечно удаленным точкам. Даны формулы преобразования. Определяются условия существования бесконечно удаленного предельного цикла и его устойчивости. Рассмотрен пример.

1. Основные формулы преобразования. Пусть имеем фазовую плоскость, изображающая точка M в которой определяется декартовыми координатами x и y (фиг. 1). Около точки C, лежащей на оси z на расстоянии $OC = 1$ от начала, описываем сферу единичного радиуса и отображаем на нее посредством прямых все точки фазовой плоскости [1, 2, 3]. Получаемые на нижней полусфере точки P проектируем на ту же плоскость. Очевидно, что бесконечно удаленные точки плоскости xy отобразятся на экваторе построенной сферы (сферы Пуанкаре), проекция которого на плоскость представится в виде окружности единичного радиуса. Преобразованную таким образом плоскость будем называть плоскостью $\xi\eta$.



Фиг. 1

Обозначим через R, ϑ и ρ, ϑ полярные координаты соответственно точек M и N, через φ, ϑ — сферические координаты точки P.

Тогда имеем такие формулы преобразования:

$$R = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{ctg}\varphi\cos\vartheta = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\cos\vartheta \\ y &= \operatorname{ctg}\varphi\sin\vartheta = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\sin\vartheta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = Q(x, y) \tag{1.3}$$

где t, как обычно, время, x и y — координаты изображающей точки на фазовой плоскости, $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — функции, аналитические в некоторой области

$$|x - x_0| < A, \qquad |y - y_0| < B$$

которой в частности может быть вся плоскость.

Пользуясь формулами (1.2), дифференциальные уравнения движения (1.3) приводим к виду:

$$\frac{d\rho}{dt} = \Phi(\rho, \vartheta)(1 - \rho^2)^{3/2}, \qquad \frac{d\vartheta}{dt} = \Psi(\rho, \vartheta)\frac{\sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} \tag{1.4}$$

где

$$\Phi(\rho, \vartheta) = P\cos\vartheta + Q\sin\vartheta, \qquad \Psi(\rho, \vartheta) = Q\cos\vartheta - P\sin\vartheta \tag{1.5}$$

причем в P и Q декартовы координаты x, y должны быть выражены через полярные ρ, ϑ.

Разделим уравнения (1.4) одно на другое. Имеем

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \rho(1 - \rho^2)\frac{\Phi(\rho, \vartheta)}{\Psi(\rho, \vartheta)} \tag{1.6}$$

Это есть дифференциальное уравнение фазовых траекторий изображающей точки N.

2. Отыскание бесконечно удаленного предельного цикла. Если при $\rho = 1$ знаменатель в правой части уравнения (1.6) не равен нулю ни при каких значениях угла ϑ, то имеем интегральную кривую, которой является экватор на сфере Пуанкаре или единичная окружность в плоскости $\xi\eta$.

Может оказаться, что эта окружность есть предельный цикл: в этом случае к ней спиралеобразно приближаются фазовые траектории, навиваясь на него с внутренней стороны. Если же этого нет, то внутри окружности можно взять примыкающую к ней кольцеобразную область так, что внутри этой области будет континуум замкнутых траекторий, вложенных одна в другую [4, 5].

В плоскости xy первому случаю соответствует бесконечно удаленный предельный цикл, а во втором — движение изображающей точки вне какой-то области фазовой плоскости. Вопрос о том, какой из этих двух случаев имеет место, решается дополнительным исследованием. Большее практическое значение и интерес представляет, повидимому, лишь первый из них.

Если при некоторых значениях ϑ знаменатель обращается в нуль, имеют место бесконечно удаленные особые точки. При этом будем предполагать, что знаменатель не содержит множителя $1 - \rho$, так как иначе на него можно было бы сократить, и если только числитель не делится на $1 - \rho$, то экватор уже не был бы предельным циклом и не имел бы особых точек.

Для дальнейшего выделим из каждой функции $\Phi(\rho, \vartheta)$, $\Psi(\rho, \vartheta)$ множитель $1-\rho$ в наивысшей по абсолютной величине степени. Имеем

$$\Phi(\rho, \vartheta) = (1-\rho)^m \Phi_1(\rho, \vartheta), \qquad \Psi(\rho, \vartheta) = (1-\rho)^n \Psi_1(\rho, \vartheta) \tag{2.1}$$

где m и n — некоторые действительные числа, могущие быть целыми и дробными, положительными и отрицательными.

Уравнение (1.6) теперь можно представить в таком виде:

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \rho(1+\rho)(1-\rho)^{m-n+1} \frac{\Phi_1(\rho, \vartheta)}{\Psi_1(\rho, \vartheta)} \tag{2.2}$$

Экватор является интегральной кривой (в частности, предельным циклом), если

$$m - n + 1 > 0 \tag{2.3}$$

и притом $\Psi_1(\rho, \vartheta)$ ни при каких значения ϑ на экваторе в нуль не обращается. Если же $\Psi_1(\rho, \vartheta) = 0$ при $\rho = 1$ и при некоторых значениях ϑ, то на экваторе имеем особые точки.

Если

$$m - n + 1 = 0 \tag{2.4}$$

то экватор не является интегральной кривой. Однако он может иметь особые точки, если функции $\Phi_1(1, \vartheta)$ и $\Psi_1(1, \vartheta)$ обращаются в нуль при одних и тех же значениях ϑ.

Если, наконец,

$$m - n + 1 < 0 \tag{2.5}$$

то на экваторе $d\rho / d\vartheta = \pm\infty$, и, следовательно, если интегральные кривые уравнения (1.6) доходят до единичной окружности, то они эту окружность пересекают под прямым углом. Таким образом, в этом случае экватор является циклом без прикосновения, и тогда действительные ветви интегральных кривых на плоскости xy асимптотически приближаются к лучам, выходящим из начала координат [6].

Исключительный случай имеет место, если $\Psi_1(\rho, \vartheta) \equiv 0$ при любом ρ. Тогда $d\rho / d\vartheta = \pm\infty$ во всем единичном круге, т. е. интегральными кривыми будут сами лучи, идущие из начала координат.

Обратимся к бесконечно удаленному предельному циклу. Прежде всего установим направление вращения радиуса-вектора изображающей точки вблизи предельного цикла.

Так как $\Psi_1(\rho, \vartheta)$ ни при каких значениях ϑ на экваторе в нуль не обращается, то правая часть второго уравнения (1.4) вследствие аналитичности функций P и Q вблизи экватора сохраняет постоянный знак.

Для его определения достаточно углу ϑ задать совершенно произвольное значение ϑ_0 такое, чтобы знак Ψ был очевиден; тем самым определится и знак производной $d\vartheta / dt$.

Положим

$$\rho = 1 - \chi \tag{2.6}$$

где χ — малая положительная величина.

Такую замену произведем в уравнениях (1.4) и (1.6). Если теперь окажется, что уравнение (2.6) удовлетворяется при любом $\chi < l$, где l — некоторая положительная постоянная, то имеет место континиум замкнутых траекторий, не являющихся предельным циклом.

Заметим, что указанному пробразованию можно дать геометрическую интерпретацию. Именно, область, прилегающую к экватору, мы отображаем на плоскость полярных координат χ, ϑ в окрестностях начала,

Сделаем далее предположение, что правые части уравнений (1.4) могут быть разложены по степеням χ:

$$\frac{d\chi}{dt} = \Theta_0(\vartheta) + \Theta_1(\vartheta)\chi + \Theta_2(\vartheta)\chi^2 + \cdots \tag{2.7}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \Omega_0(\vartheta) + \Omega_1(\vartheta)\chi + \Omega_2(\vartheta)\chi^2 + \cdots \tag{2.8}$$

где $\Theta(\vartheta)$ и $\Omega(\vartheta)$ — периодические функции ϑ с периодом 2π.

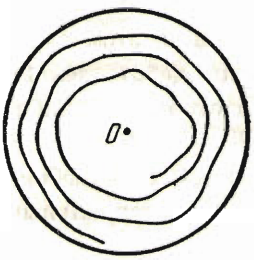
Так как в координатах χ, ϑ для предельного цикла $\chi = 0$, то должно быть

$$\Theta_0(\vartheta) = 0$$

Вопрос об устойчивости предельного цикла решался бы очень просто, если бы при этом было

$$\Theta_1(\vartheta) = \text{const}, \qquad \Theta_2(\vartheta) = \Theta_3(\vartheta) = \cdots = 0$$

Но вообще этого нет и, больше того, $\Theta_1(\vartheta)$ может быть даже знакопеременной функцией ϑ. И в самом деле, интегральная кривая, вьющаяся изнутри около предельного цикла, может к нему то приближаться, то от него удаляться (фиг. 2). Поэтому важно выяснить ее поведение в среднем.



Фиг. 2

Деля уравнения (2.7) и (2.8) одно на другое, находим

$$\frac{d\chi}{d\vartheta} = U_1(\vartheta)\chi + U_2(\vartheta)^2\chi + \cdots \tag{2.9}$$

где

$$U_1(\vartheta) = \frac{\Theta_1(\vartheta)}{\Omega_0(\vartheta)} \tag{2.10}$$

$$U_2(\vartheta) = \frac{\Theta_2(\vartheta)\,\Omega_0(\vartheta) - \Theta_1(\vartheta)\,\Omega_1(\vartheta)}{\Omega_0(\vartheta)}$$

Следует заметить, что к уравнению (2.9) можно притти другим путем, именно, производя подстановку (2.6) в уравнение (1.6) и разлагая правую часть его в ряд по степеням χ.

Дифференциальное уравнение (2.9) с периодическими коэффициентами описывает возмущенное состояние системы $\chi \neq 0$ (при невозмущенном состоянии $\chi = 0$; вопрос об устойчивости невозмущенного состояния решается согласно теории Ляпунова [7]).

Возьмем первое приближение уравнения (2.9);

$$\frac{d\chi}{d\vartheta} = U_1(\vartheta) \tag{2.11}$$

Если характеристический показатель этого уравнения

$$U_1^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_1(\vartheta)\, d\vartheta \tag{2.12}$$

отличен от нуля, то первое приближение дает ответ на вопрос об устойчивости. При этом необходимо принять во внимание знак производной $d\vartheta / dt$, иначе говоря, функции Ψ_1, которая, как указывалось, при наличии предельного цикла монотонна.

Именно, если $U_1^* > 0$, то предельный цикл устойчив при $\Psi_1 < 0$ и неустойчив при $\Psi_1 > 0$; если же $U_1^* < 0$, то предельный цикл устойчив при $\Psi_1 > 0$ и неустойчив при $\Psi_1 < 0$.

Здесь возможно бывает сделать упрощение. На основании (2.10) выражение (2.12) можно представить в виде

$$U_1^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\Theta_1(\vartheta)}{\Omega_0(\vartheta)}\, d\vartheta = \frac{\Theta_1^*}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\Omega_0(\vartheta)} + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\vartheta)}{\Omega_0(\vartheta)}\, d\vartheta$$

где Θ_1^* есть осредненное значение $\Theta_1(\vartheta)$, т. е.

$$\Theta_1^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta_1(\vartheta)\, d\vartheta \tag{2.13}$$

а функция $g(\vartheta)$ представляет собой разность

$$g(\vartheta) = \Theta_1(\vartheta) - \Theta_1^* \qquad \left(\int_0^{2\pi} g(\vartheta)\, d\vartheta = 0\right)$$

Если

$$\max |\, g(\vartheta)\, | \leqslant |\, \Theta_1^*\, | \tag{2.14}$$

то знак U_1^* совпадает со знаком Θ_1^*. Это, в частности, имеет место, если в $\Phi_1(\rho, \vartheta)$ входят лишь четные степени $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$, так как тогда получаются члены типа $1 - \cos k\vartheta$, т. е. $|\cos 2k\vartheta| \leqslant 1$ (k — целое число). Тривиальный случай имеем при $\Omega_0(\vartheta) = \mathrm{const}$.

Тогда мы имеем право судить об устойчивости на основании знака Θ_1^*, иначе говоря, можем пользоваться линеаризованным уравнением (2.7) с осредненным первым членом ($\Theta_0 = 0$):

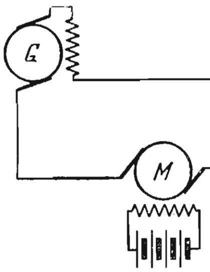
$$\frac{d\chi}{dt} = \Theta_1^* \chi \tag{2.15}$$

Можно сказать, что рассмотрение этого уравнения приводит к суждению об устойчивости «в среднем», которая совпадает с устойчивостью в смысле Ляпунова при сделанных оговорках. Решение этого «осредненного» уравнения имеет вид:

$$\chi = \chi_0 \exp(\Theta_1^* t) \tag{2.16}$$

Следовательно, цикл устойчив, если $\Theta_1^* < 0$, и неустойчив, если $\Theta_1^* > 0$. Заметим, что знаки Θ_1^* и U_1^* совпадают, если $d\vartheta / dt > 0$, и противоположны, если $d\vartheta / dt < 0$. Когда $\Theta_1^* = 0$, имеем сомнительный случай, который требует дополнительного исследования.

3. Колебания в системе генератор — мотор. В качестве примера рассмотрим систему, состоящую из равномерно вращающегося сериес-генератора и питаемого им электромотора с независимым возбуждением (фиг. 3) [8].



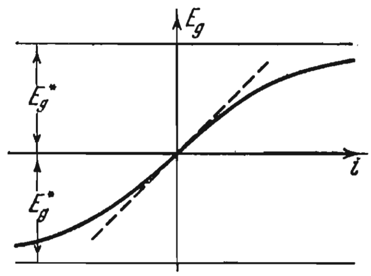
Фиг. 3

В этой системе получаются, во-первых, электрические колебания тока в контуре, а во-вторых, механические колебания в виде периодических изменений угловой скорости мотора.

Электродвижущая сила E_g равномерно вращающегося генератора пропорциональна напряжению его магнитного поля, которое при отсутствии магнитного насыщения было бы пропорционально силе тока i, создающего поле, а в генераторе последовательного возбуждения эта сила тока такова же, как и в цепи.

Вследствие магнитного насыщения характеристика генератора (фиг. 4) отклоняется от прямолинейной. Зависимость E_g от i можно аппроксимировать формулой

$$E_g = a \operatorname{arc\,tg} bi \tag{3.1}$$



Фиг. 4

где a и b — постоянные параметры.

При возрастании силы тока получаем асимптотическое значение

$$E_g{}^* = \lim_{i\to\infty} E_g = \frac{\pi a}{2}$$

Если обозначить через L самоиндукцию цепи, R — ее сопротивление, E_m — противоэлектродвижущую силу мотора, то, пренебрегая емкостью, имеем ($Em = c\omega$, где ω — угловая скорость мотора с множителем пропорциональности)

$$E_g = L\frac{di}{dt} + Ri + E_m \tag{3.2}$$

Пусть J — момент инерции электромотора; тогда

$$E_m i = \frac{d}{dt}\left(\frac{J\omega^2}{2}\right), \quad \text{или} \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{c}{J} i \tag{3.3}$$

Уравнение (3.2) на основании (3.1) представим в виде

$$a \operatorname{arc\,tg} bi = L\frac{di}{dt} + Ri + c\omega$$

Это уравнение дифференцируем по времени и подставляем $d\omega / dt$ из (3.3). Получим

$$L\frac{d^2i}{dt^2} - \left(\frac{ab}{1+b^2i^2} - R\right)\frac{di}{dt} + \frac{c^2}{J} i = 0 \tag{3.4}$$

Введем безразмерное время τ и безразмерную координату x:

$$bi = x, \qquad t = \frac{\sqrt{LJ}}{c}\,\tau \tag{3.5}$$

Тогда получим

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \mu\left(\frac{1}{1+x^2} - \nu\right)\frac{dx}{d\tau} + x = 0 \tag{3.6}$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{J}{L}}, \qquad \nu = \frac{R}{ac} \tag{3.7}$$

Параметр μ показывает степень отклонения данной системы от линейной. По смыслу оба параметра μ и ν положительны.

Приводим дифференциальное уравнение второго порядка (3.6) к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{dx}{d\tau} = y = P, \qquad \frac{dy}{d\tau} = -x + \mu\left(\frac{1}{1+x^2} - \nu\right) y = Q \tag{3.8}$$

Пользуясь формулами преобразования (1.2), из (1.5) находим

$$\Phi(\rho, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \mu\rho\left(\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2\sin^2\vartheta} - \nu\right)\sin^2\vartheta$$

$$\Psi(\rho, \vartheta) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \rho\left(\mu\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2\sin^2\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta - \mu\nu\sin\vartheta\cos\vartheta - 1\right) \tag{3.9}$$

На основании соотношений (2.1) — (2.3) видим, что $m = n = \frac{1}{2}$, $m - n + 1 > 0$, а поэтому окружность $\rho = 1$ может быть интегральной кривой, если только на ней не обращается в нуль выражение, стоящее в скобках во второй формуле (3.9). Подставляя $\Phi(\rho, \vartheta)$, $\Psi(\rho, \vartheta)$ в (1.4) и (1.6), имеем

$$\frac{d\rho}{dt} = \mu\rho(1-\rho^2)\left(\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2\sin^2\vartheta} - \nu\right)\sin^2\vartheta \tag{3.10}$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \mu\frac{1-\rho^2}{1-\rho^2\sin^2\vartheta}\sin\vartheta\cos\vartheta - \mu\nu\sin\vartheta\cos\vartheta - 1 \tag{3.11}$$

$$\frac{d\rho}{d\vartheta} = \mu\rho(1-\rho^2)\frac{[1-\nu+\rho^2(\nu\sin^2\vartheta - 1)]\sin^2\vartheta}{\mu\sin\vartheta\cos\vartheta(1-\nu) - 1 + \rho^2[\sin^2\vartheta + \mu\sin\vartheta\cos\vartheta(\nu\sin^2\vartheta - 1)]} \tag{3.12}$$

При $\rho = 1$ обращается в нуль правая часть (3.11), если

$$\mu\nu\sin\vartheta\cos\vartheta + 1 = 0, \quad \text{или} \quad \sin 2\vartheta = -\frac{2}{\mu\nu} \tag{3.13}$$

что может быть лишь тогда, когда $|\mu\nu| > 2$.

Если $|\mu\nu| < 2$, экватор есть интегральная кривая. Из уравнения (3.11) видим, что $d\vartheta / dt < 0$ при $\rho = 1$, т. е. движение изображающей точки происходит по часовой стрелке. Полагаем $\rho = 1 - \chi$ и разлагаем правую часть (3.12) в ряд (2.9) по степеням χ:

$$\frac{d\chi}{d\vartheta} = U_1(\vartheta)\chi + U_2(\vartheta)\chi^2 + \cdots \tag{3.14}$$

где

$$U_1(\vartheta) = -\frac{2\mu\nu\sin^2\vartheta}{1+\mu\nu\sin\vartheta\cos\vartheta} = -\frac{\mu\nu(1-\cos 2\vartheta)}{1+\frac{1}{2}\mu\nu\sin 2\vartheta}$$

$$U_2(\vartheta) = -\frac{\mu\sin^2\vartheta[4+3\nu\cos^2\vartheta(1+\mu\nu\sin\vartheta\cos\vartheta)]}{1+\mu\nu\sin\vartheta\cos\vartheta} \tag{3.15}$$

Осредняя $U_1(\vartheta)$, имеем

$$U_1{}^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_1(\vartheta)\,d\vartheta = -\frac{2\mu\nu}{\sqrt{4-\mu^2\nu^2}} \tag{3.16}$$

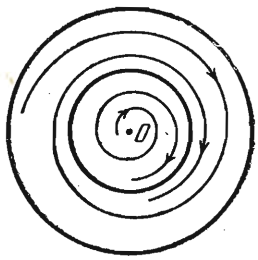
Из (3.14) и (3.16) видно, во-первых, что интегральная кривая $\chi = 0$ есть изолированная, следовательно, она есть предельный цикл, а во-вторых, что этот предельный цикл неустойчив при $\mu\nu > 0$, так как $d\vartheta / dt < 0$. Заметим, что в рассматриваемом случае

$$\Theta_1(\vartheta) = \mu\nu(1-\cos 2\vartheta), \qquad \Theta_1{}^* = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Theta_1(\vartheta)\,d\vartheta = \mu\nu > 0$$

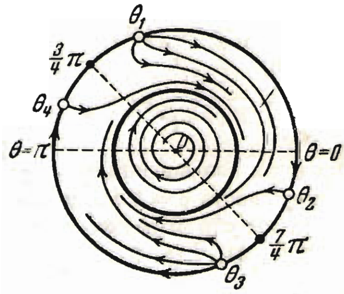
т. е. другим путем приходим к заключению о неустойчивости. Легко показать, что начало устойчиво при $\nu > 1$ и неустойчиво при $\nu < 1$.

Исследование бесконечно удаленных особых точек системы, например, в координатах Пуанкаре z, τ показывает [1], что этих точек в случае их существования четыре и все они неустойчивы.

Следовательно, при $\nu > 1$ предельных циклов в конечной области либо нет, либо их четное число: при $\nu < 1$ имеем один конечный предельный цикл либо вообще нечетное число.



Фиг. 5



Фиг. 6

Случай одного конечного радиуса при $\mu\nu < 2$ представлен на фиг. 5, а при $\mu\nu > 2$ — на фиг. 6.

Если параметры системы изменять так, чтобы произведение $\mu\nu$, будучи вначале больше двух, в дальнейшем уменьшалось, то четыре особые точки при $\mu\nu = 2$ попарно сольются и затем исчезнут, причем экватор превратится в предельный цикл. (Единственность предельного цикла при малом μ можно показать, например, с помощью метода Ван-дер-Поля.)

Таким образом, при $\nu < 1$ в системе устанавливаются автоколебания, причем согласно уравнению (3.3) имеем как электрические колебания — изменения силы тока, так и механические — изменения угловой скорости мотора.

Поступила в редакцию
27 V 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Андронов А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Ч. I. ОНТИ. 1937.
2. Майер А. Г. Доказательство существования предельных циклов уравнений Рэлея и Ван-дер-Поля. Ученые записки Горьковского государственного университета. 1935. Вып. 2.
3. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Гостехиздат. 1947.
4. Петровский И. О свойстве интегральных кривых одной системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности особой точки.) Über das Verhalten der Integralkurven eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Nähe eines singulären Punktes.) Математический сборник. 1934. Т. XLI. Вып. 1.
5. Бендиксон И. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук. 1941. Вып. 9.
6. Mises R. Über den Verlauf der Integralkurven eines Differentialgleichung erster Ordnung. Compositio Mathematica. 1938. T. VI. N. 2
7. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
8. Ден-Гартог Дж. П. Теория колебаний. Гостехиздат. 1942.