Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

О ХАРАКТЕРЕ ГРАНИЦ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕГУЛИРУЕМЫХ СИСТЕМ[1]

А. И. Лурье

(Ленинград)

1. Исходные дифференциальные уравнения движения регулируемого объекта и системы регулирования (измерительных органов, сервоприводов и пр.) представим в форме

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + h_k f(\sigma) \tag{1.1}$$

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} j_\alpha\,\eta_\alpha \tag{1.2}$$

Предполагая, что функция $f(\sigma)$ разлагается в степенной ряд

$$f(\sigma) = c\sigma + \psi_2\,\sigma^2 + \psi_3\,\sigma^3 + \cdots \tag{1.3}$$

рассмотрим систему линейных уравнений первого приближения

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\,\eta_\alpha + h_k c\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} (b_{k\alpha} + c h_k j_\alpha)\,\eta_\alpha \tag{1.4}$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\Delta(p) = |\, b_{k\alpha} + c h_k j_\alpha - \delta_{k\alpha}\,p \,| = 0 \tag{1.5}$$

может быть записано в виде

$$\Delta(p) = D(p) + cN(p) = 0 \tag{1.6}$$

Здесь

$$D(p) = |\, b_{k\alpha} - \delta_{k\alpha}\,p \,| \tag{1.7}$$

характеристический определитель линейной системы, получающейся, если принять $f(\sigma) = 0$ в уравнениях (1.1), $N(p)$ — полином не выше степени $n-1$ относительно p, который можно представить в виде

$$N(p) = \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} j_s\,h_k\,D_{ks}(p) \tag{1.8}$$

---

[1] Настоящая работа возникла в результате ознакомления автора с предложенным М. А. Айзерманом геометрическим приемом определения опасных и безопасных участков границы устойчивости в частном случае нечетной характеристики. Статья М. А. Айзермана публикуется в этом выпуске.

где $D_{ks}(p)$ — алгебраическое дополнение элемента k строки и s столбца определителя (1.7). Вводим в рассмотрение полиномы

$$M_k(p) = \sum_{s=1}^{n} j_s D_{ks}(p) \tag{1.9}$$

представляющие определители, получающиеся путем замены в (1.7) элементов k строки числами $j_1, \ldots, j_n$. Очевидно, что

$$N(p) = \sum_{k=1}^{n} h_k M_k(p) \tag{1.10}$$

Назовем через $p_1, \ldots, p_n$ корни уравнения (1.5). Предполагая, что среди них нет кратных и что $\operatorname{Re} p_\rho < 0$ при $\rho = 1, \ldots, (n-2)$, будем рассматривать поведение системы на границе устойчивости в двух критических случаях: случае пары чисто мнимых корней

$$p_{n-1} = i\omega, \qquad p_n = -i\omega \tag{1.11}$$

и в случае одного нулевого корня

$$\operatorname{Re} p_{n-1} < 0, \qquad p_n = 0 \tag{1.12}$$

Первому случаю соответствует, как известно, обращение в нуль предпоследнего определителя Гурвица D_{n-1}. Это условие может быть, конечно, получено исключением ω из двух соотношений, получающихся, если приравнять нулю вещественную и мнимую части полинома $\Delta(i\omega)$. Второй случай имеет место, если параметры линейной системы (1.4) удовлетворяют условию $\Delta(0) = 0$.

В книге Н. Н. Баутина [1] дано определение «безопасных» и «опасных» границ устойчивости; участок границы устойчивости линейной системы, вдоль которого $D_{n-1} = 0$, является безопасным, если равновесное состояние системы

$$\eta_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{1.13}$$

возмущенное движение которой определяется системой нелинейных дифференциальных уравнений (1.1), устойчиво (притом асимптотически) по Ляпунову; если же на некотором участке указанной границы имеется неустойчивость, то он является опасным. В первом случае при значениях параметров, лежащих в пространстве параметров вне области устойчивости, определяемой уравнениями первого приближения (1.4), но достаточно близко к ее границе, динамическая система будет совершать малые движения в окрестности (теперь неустойчивого) состояния равновесия (1.13), во втором — она срывается из состояния равновесия и отходит от него достаточно далеко.

Различение опасных и безопасных участков границы сводится, таким образом, для случая (1.11) к исследованию устойчивости по Ляпунову в критическом случае пары чисто мнимых корней. Известно, что решение этой задачи заключается в установлении знака первой не обращающейся в нуль ляпуновской величины g. Ограничиваясь вместе с Н. Н. Баутиным рассмотрением систем «первой степени негрубости», мы будем полагать, что не обращается в нуль уже первая величина g, т. е. что суждение об устойчивости получается из рассмотрения слагаемых третьей степени в разложениях в ряды нелинейных функций, входящих в уравнения возмущенного движения, независимо от слагаемых более высокого порядка. Н. Н. Баутин провел весьма подробное вычисление величины g для систем дифференциальных уравнений второго, третьего и четвертого порядков; он рассмотрел также случай системы любого порядка в предположении, что нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения начинаются со слагаемых третьего порядка (решающих вопрос об устойчивости). В этой статье будет показано, что при взятой специальной форме уравнений возмущенного движения, охватывающей, однако, большое число задач теории автоматического регулирования, указанное вычисление можно провести в сравнительно простой форме и получить результативные формулы самого простого вида. Особенно простым оказывается случай нечетной «характеристики», когда разложение в ряд (1.3) не содержит слагаемого второй степени. Вычисление при этом совершенно элементарно, а его результаты весьма просто связываются с поведением амплитудно-фазовой характеристики линейной системы (1.4) в окрестности ее критической точки $(-1, 0i)$.

Участок границы устойчивости, соответствующий случаю (1.12) нулевого корня, при $\psi_2 \neq 0$ является опасным в указанном выше смысле, так как соответствующая ляпуновская величина не обращается в нуль; при $\psi_2 = 0$ и $\psi_3 \neq 0$ граница, соответствующая нулевому корню, может оказаться и опасной и безопасной.

2. В этом параграфе мы займемся приведением уравнений возмущенного движения (1.1) к упрощенной форме, допускающей непосредственное применение предложенных Ляпуновым приемов исследования устойчивости в критических случаях [2].

Вводим новые переменные z_ρ

$$z_\rho = \sum_{k=1}^{n} \frac{M_k(p_\rho)}{D(p_\rho)} \eta_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \frac{j_s D_{ks}(p_\rho)}{D(p_\rho)} \eta_k \qquad (\rho = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

При этом существенно предполагается, что корни полинома $D(p)$ не являются корнями полинома $\Delta(p)$, т. е. что ни один знаменатель в сумме (2.1) не обращается в нуль.

Составляем производную от z_ρ по времени в силу уравнений (1.1). Учитывая (1.10), получаем

$$\dot{z}_\rho = \sum_{s=1}^{n} j_s \sum_{\alpha=1}^{n} \eta_\alpha \sum_{k=1}^{n} \frac{D_{ks}(p_\rho)}{D(p_\rho)} b_{k\alpha} + f(\sigma) \frac{N(p_\rho)}{D(p_\rho)} \tag{2.2}$$

Далее имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k\alpha} D_{ks}(p_\rho) = b_{1\alpha} D_{1s}(p_\rho) + \cdots + (b_{\alpha\alpha} - p_\rho) D_{\alpha s}(p_\alpha) +$$
$$+ \cdots + b_{n\alpha} D_{ns}(p_\rho) + p_\rho D_{\alpha s}(p_\rho)$$

и, значит,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{k\alpha}\frac{D_{ks}(p_\rho)}{D(p_\rho)} = \delta_{\alpha s} + p_\rho \frac{D_{\alpha s}(p_\rho)}{D(p_\rho)}$$

где $\delta_{\alpha s}$ — символ Кронекера: $\delta_{\alpha s}=0$ при $\alpha \neq s$ и $\delta_{ss}=1$.

Замечая далее, что по (1.6)

$$D(p_\rho)+cN(p_\rho)=0, \qquad \text{или} \qquad \frac{N(p_\rho)}{D(p_\rho)} = -\frac{1}{c}$$

получаем из (2.2), (1.3) и (1.9)

$$\dot{z}_\rho = -\frac{1}{c}(c\sigma + \psi_2\sigma^2 + \psi_3\sigma^3 + \cdots) + \sum_{s=1}^{n}\sum_{\alpha=1}^{n}\delta_{\alpha s} j_s \eta_\alpha + p_\rho \sum_{\alpha=1}^{n}\frac{M_\alpha(p_\rho)}{D(p_\rho)}\eta_\alpha$$

На основании определений (1.2) и (2.1) теперь получаем систему уравнений в новых переменных

$$\dot{z}_\rho = p_\rho z_\rho - \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \cdots \tag{2.3}$$

Остается заметить, что σ выражается через переменные z_ρ по формуле

$$\sigma = -\sum_{\rho=1}^{n}\frac{D(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)} z_\rho \tag{2.4}$$

Для проверки подставим сюда вместо z_ρ их значения через старые переменные; имеем

$$\sum_{\rho=1}^{n}\frac{D(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)} z_\rho = -\sum_{k=1}^{n}\eta_k \sum_{s=1}^{n} j_s \sum_{\rho=1}^{n}\frac{D_{ks}(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)} \tag{2.5}$$

Применим далее известные алгебраические соотношения

$$\sum_{\rho=1}^{n}\frac{p_\rho{}^m}{\Delta'(p_\rho)} = 0 \qquad (m=0,1,\ldots,\ n-2), \qquad \sum_{\rho=1}^{n}\frac{p_\rho{}^{n-1}}{\Delta'(p_\rho)} = (-1)^n \tag{2.6}$$

к вычислению внутренней суммы в выражении (2.5). В ней $D_{ks}(p_\rho)$ — полином степени не выше $(n-2)$ при $k\neq s$, а при $k=s$ — полином степени $(n-1)$ со старшим слагаемым $(-p_\rho)^{n-1}$. Поэтому

$$-\sum_{\rho=1}^{n}\frac{D_{ks}(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)} = \delta_{ks} \tag{2.7}$$

и из (2.5) получаем

$$-\sum_{\rho=1}^{n}\frac{D(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)} z_\rho = \sum_{k=1}^{n}\eta_k \sum_{s=1}^{n} j_s\delta_{ks} = \sum_{k=1}^{n}\eta_k j_k = \sigma$$

что и требовалось доказать.

3. В случае (1.11) пары чисто мнимых корней полагаем

$$z_{n-1} = x+iy, \qquad z_n = x-iy \tag{3.1}$$

Исследуемое на устойчивость состояние равновесия соответствует значениям всех переменных $z_1, z_2, \ldots, z_{n-2}, x, y$, равных нулю; диф ференциальные уравнения возмущенного движения будут

$$\dot{z}_\rho = p_\rho z_\rho - \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \cdots \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, n-2) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega y - \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \cdots \\ \dot{y} &= \omega x \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь $\operatorname{Re} p_\rho < 0$, а σ линейно выражается через введенные переменные:

$$\sigma = \sum_{\rho=1}^{n-2} \frac{z_\rho}{A_\rho} + ax - by \tag{3.4}$$

где для сокращения письма введены обозначения

$$\frac{1}{A_\rho} = -\frac{D(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)}, \qquad \frac{1}{A_{n-1}} = -\frac{D(i\omega)}{\Delta'(i\omega)} = \frac{1}{2}(a + ib) \tag{3.5}$$

Система (3.2) и (3.3) имеет форму, допускающую уже непосредственное применение известного приема исследования устойчивости в критическом случае пары чисто мнимых корней [3]. Следуя этому приему, составляем систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial z_\rho}{\partial x}\left(-\omega y - \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \cdots\right) + \frac{\partial z_\rho}{\partial y}\omega x = p_\rho z_\rho - \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \cdots \tag{3.6}$$

и строим формальные ряды

$$z_\rho(x, y) = z_\rho^{(1)}(x, y) + z_\rho^{(2)}(x, y) + \cdots \tag{3.7}$$

удовлетворяющие этой системе. Здесь $z_\rho^{(k)}(x, y)$ представляет однородный полином k-й степени относительно переменных x, y. Ряды (3.7) для переменных z_ρ далее надо подставить в выражение (3.4) для σ и затем рассмотреть задачу об устойчивости движения для системы второго порядка (3.3), содержащей лишь критические переменные x, y. Но мы ограничиваем, как сказано выше, наше исследование случаем, когда суждение об устойчивости может быть получено уже на основании членов третьего порядка в разложении правой части (3.3) по степеням x и y. Чтобы удержать эти члены в выражении σ^2, достаточно в рядах (3.7) найти только члены $z_\rho^{(2)}(x, y)$. Нетрудно далее убедиться, что слагаемые $z_\rho^{(1)}(x, y)$ в этих рядах оказываются равными нулю. Итак, будем искать нужное нам решение уравнений (3.6) в форме

$$z_\rho = \frac{1}{2}(M_\rho x^2 + 2P_\rho xy + N_\rho y^2) \tag{3.8}$$

для чего в уравнениях (3.6) следует сохранить лишь члены

$$-\frac{\partial z_\rho}{\partial x}\omega y + \frac{\partial z_\rho}{\partial y}\omega x = p_\rho z_\rho - \frac{\psi_2}{c}(ax - by)^2 \tag{3.9}$$

так как невыписанные слагаемые не имеют значения для нахождения решения в форме (3.8).

Делая подстановку (3.8) в (3.9) и сравнивая коэффициенты при xy, x^2 и y^2, получаем три уравнения для определения неизвестных M_ρ, P_ρ, N_ρ, решая которые, найдем

$$\frac{1}{2} M_\rho = \frac{\psi_2}{c(p_\rho^2 + 4\omega^2)} \left[-2ab\omega + \frac{1}{2} p_\rho (a^2 - b^2) \right] + \frac{\psi_2 (a^2 + b^2)}{2cp_\rho}$$

$$P_\rho = -\frac{\psi_2}{c(p_\rho^2 + 4\omega^2)} [2\omega (a^2 - b^2) + 2abp_\rho] \tag{3.10}$$

$$\frac{1}{2} N_\rho = \frac{\psi_2}{c(p_\rho^2 + 4\omega^2)} \left[2ab\omega - \frac{1}{2} p_\rho (a^2 - b^2) \right] + \frac{\psi_2 (a^2 + b^2)}{2cp_\rho}$$

Подстановка в (3.4) дает теперь

$$\sigma = ax - by + Mx^2 + Pxy + Ny^2 \tag{3.11}$$

где введены обозначения для коэффициентов

$$M = \frac{\psi_2}{c} \left[-2abS_0' + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) S_1' + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) S_{-1}' \right]$$

$$P = -\frac{\psi_2}{c} [2\omega (a^2 - b^2) S_0' + 2abS_1'] \tag{3.12}$$

$$N = \frac{\psi_2}{c} \left[2abS_0' - \frac{1}{2}(a^2 - b^2) S_1' + \frac{1}{2}(a^2 + b^2) S_{-1}' \right]$$

и сумм

$$S_0' = \sum_{\rho=1}^{n-2} \frac{1}{A_\rho (p^2{}_\rho + 4\omega^2)}, \qquad S_1' = \sum_{\rho=1}^{n-2} \frac{p_\rho}{A_\rho (p_\rho^2 + 4\omega^2)}, \qquad S_{-1}' = \sum_{\rho=1}^{n-2} \frac{1}{A_\rho p_\rho} \tag{3.13}$$

Ниже эти суммы будут вычислены.

Дело, как уже сказано выше, теперь сводится к исследованию устойчивости для системы двух уравнений первого порядка: подставляем (3.11) в (3.3), причем ограничиваемся слагаемыми третьего порядка; получаем

$$\dot{x} = -\omega y + X_2(x, y) + X_3(x, y), \qquad \dot{y} = \omega x \tag{3.14}$$

где обозначено

$$X_2(x, y) = -\frac{\psi_2}{c}(ax - by)^2 \tag{3.15}$$

$$X_3(x, y) = -2\frac{\psi_2}{c}(ax - by)(Mx^2 + Pxy + Ny^2) - \frac{\psi_3}{c}(ax - by)^3 \tag{3.16}$$

Функцию Ляпунова ищем в виде

$$U = x^2 + y^2 + f_3(x, y) + f_4(x, y) \tag{3.17}$$

где однородные полиномы третьей и четвертой степени $f_3(x, y)$ и $f_4(x, y)$ определяются из условия, чтобы производная dU/dt, составленная в силу уравнений (3.14), имела вид:

$$\frac{dU}{dt} = g(x^2 + y^2)^2 + \cdots \tag{3.18}$$

Число g и представляет искомую ляпуновскую величину; если $g<0$, то на основании известных теорем исследуемое состояние равновесия асимптотически устойчиво; оно неустойчиво при $g>0$. Сказанное относится не только к системе (3.14). но и к исходной системе (3.2)—(3.3), а следовательно, и к системе (1.1).

Для определения полиномов $f_3(x, y)$ и $f_4(x, y)$ из условия (3.18) получаем уравнения в частных производных

$$\omega\left(-\frac{\partial f_3}{\partial x}y+\frac{\partial f_3}{\partial y}x\right)+2xX_2(x, y)=0 \tag{3.19}$$

$$\omega\left(-\frac{\partial f_4}{\partial x}y+\frac{\partial f_4}{\partial y}x\right)+2xX_3(x, y)+\frac{\partial f_3}{\partial x}X_2=g(x^2+y^2)^2 \tag{3.20}$$

Решение первого уравнения находим по методу неопределенных коэффициентов. Получаем

$$f_3=\frac{2\psi_2}{c\omega}\left[\frac{2}{3}abx^3+a^2x^2y+\frac{1}{3}(2a^2+b^2)y^3\right] \tag{3.21}$$

Уравнение (3.20) теперь принимает вид:

$$\omega\left(-\frac{\partial f_4}{\partial x}y+\frac{\partial f_4}{\partial y}x\right)-\frac{2\psi_2^2}{\omega c^2}(2abx^2+2a^2xy)(ax-by)^2-$$

$$-\frac{4\psi_2}{c}x(ax-by)(Mx^2+Pxy+Ny^2)-\frac{2\psi_3}{c}x(ax-by)^3=g(x^2+y^2)^2 \tag{3.22}$$

Для нахождения величины g это уравнение преобразуем к полярным координатам

$$x=r\cos\vartheta,\qquad y=r\sin\vartheta$$

Тогда, обозначая $f_4(x, y)=r^4\bar{f}_4(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$, по сокращении на r^4 получим

$$g=\omega\frac{\partial\bar{f}_4}{\partial\vartheta}-\frac{2\psi_2^2}{\omega c^2}(2a^3b\cos^4\vartheta+2ab^3\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta-4a^3b\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta+\cdots)-$$

$$-\frac{4\psi_2}{c}(Ma\cos^4\vartheta+Na\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta-Pb\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta+\cdots)-$$

$$-\frac{2\psi_3}{c}(a^3\cos^4\vartheta+3ab^2\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta+\cdots) \tag{3.23}$$

где невыписанные слагаемые содержат нечетные степени косинуса и синуса. Эти слагаемые не имеют значения при вычислении g.

Интегрируя (3.24) по ϑ в пределах $(0,2\pi)$ и замечая, что по условию

$$\bar{f}_4(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\Big|_0^{2\pi}=0$$

получаем

$$-g=\frac{2\psi_2^2}{\omega c^2}\frac{ab}{4}(a^2+b^2)+\frac{\psi_2}{c}(3Ma+Na-Pb)+\frac{3}{4}\frac{\psi_3}{c}a(a^2+b^2). \tag{3.24}$$

Воспользовавшись теперь формулами (3.12), найдем

$$-g=(a^2+b^2)\left[\left(\frac{\psi_2}{c}\right)^2\left(\frac{ab}{2\omega}-b\omega S_0'+\frac{1}{2}aS_1'+aS_{-1}'\right)+\frac{3}{4}\psi_3\frac{a}{c}\right] \tag{3.25}$$

Остается еще найти выражения для сумм (3.13). Отметим, что некоторая громоздкость проведенного и предстоящего еще вычисления вызывается только наличием слагаемого второго порядка в разложении характеристики $f(\sigma)$ в ряд по степеням σ; для нечетной характеристики, т. е. при $\psi_2 = 0$, можно было бы для получения нужного результата (вычисления g) рассматривать только уравнения (3.3) для критических переменных, приняв z_ρ равными нулю в выражении (3.4) для σ; в этих уравнениях имели бы $X_2 = 0$, в соответствии с чем f_3 оказалось бы равным нулю. Вычисление заняло бы несколько строк.

4. Переходим к нахождению сумм (3.13). Имеем

$$S_{-1}' = \sum_{\rho=1}^{n-2} \frac{1}{p_\rho A_\rho} = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{p_\rho A_\rho} - \frac{1}{2}(a+ib)\frac{1}{\omega i} + \frac{1}{2}(a-ib)\frac{1}{i\omega} = S_{-1} - \frac{b}{\omega} \tag{4.1}$$

$$S_0' = \sum_{\rho=1}^{n-2} \frac{1}{(p_\rho^2+4\omega^2)A_\rho} = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{(p_\rho^2+4\omega^2)A_\rho} - \frac{1}{2}(a+ib)\frac{1}{3\omega^2} - \frac{1}{2}(a-ib)\frac{1}{3\omega^2} = S_0 - \frac{a}{3\omega^2} \tag{4.2}$$

$$S_1' = \sum_{\rho=1}^{n} \frac{p_\rho}{A_\rho(p_\rho^2+4\omega^2)} - \frac{\omega i}{6\omega^2}(a+ib) + \frac{\omega i}{6\omega^2}(a-ib) = S_1 + \frac{b}{3\omega} \tag{4.3}$$

Теперь надо найти суммы S_{-1}, S_0, S_1. По (3.5) имеем

$$S_{-1} = -\sum_{\rho=1}^{n} \frac{D(p_\rho)}{p_\rho \Delta'(p_\rho)} = (-1)^{n+1} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{p_\rho^{n-1}}{\Delta'(p_\rho)} - D(0) \sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{p_\rho \Delta'(p_\rho)}$$

так как все остальные слагаемые, происходящие от слагаемых степеней $(n-1)$, $(n-2), \ldots, 1$ в выражении $D(p_\rho)$, на основании (2.6) обращаются в нуль. Вспоминая еще алгебраическое соотношение

$$\sum_{\rho=1}^{n} \frac{1}{p_\rho \Delta'(p_\rho)} = -\frac{1}{\Delta(0)} \tag{4.4}$$

получаем

$$S_{-1} = -1 + \frac{D(0)}{\Delta(0)} \tag{4.5}$$

Для вычисления сумм S_0 и S_1 введем в рассмотрение полином

$$\Delta_*(p) = \Delta(p)(2\omega i - p)(-2\omega i - p) \tag{4.6}$$

с корнями $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и $p_{n+1} = 2i\omega$, $p_{n+2} = -2i\omega$.

Имеем

$$\Delta_*'(p_\rho) = \Delta'(p_\rho)(4\omega^2 + p_\rho^2) \qquad (\rho = 1, \ldots, n)$$

$$\Delta_*'(p_{n+1}) = \Delta(2\omega i)\, 4\omega i$$

$$\Delta_*'(p_{n+2}) = -\Delta(-2\omega i)\, 4\omega i$$

Мы можем теперь написать

$$S_0 = -\sum_{\rho=1}^{n} \frac{D(p_\rho)}{(p_\rho{}^2 + 4\omega^2)\,\Delta'(p_\rho)} = -\sum_{\rho=1}^{n} \frac{D(p_\rho)}{\Delta_*{}'(p_\rho)} =$$

$$= -\sum_{\rho=1}^{n+2} \frac{D(p_\rho)}{\Delta_*{}'(p_\rho)} + \frac{D(2\omega i)}{\Delta(2\omega i)\,4\omega i} - \frac{D(-2\omega i)}{\Delta(-2\omega i)4\omega i}$$

Но сумма

$$\sum_{\rho=1}^{n+2} \frac{D(p_\rho)}{\Delta_*{}'(p_\rho)}$$

на основании (1.6) равна нулю — полином $\Delta_*(p_\rho)$ имеет степень $(n+2)$, а числитель $D(p_\rho)$ на две единицы меньшую. Итак,

$$S_0 = \frac{1}{2\omega}\,\mathrm{Im}\,\frac{D(2\omega i)}{\Delta(2\omega i)} \tag{4.7}$$

Аналогично находим

$$S_1 = -\sum_{\rho=1}^{n} \frac{p_\rho D(p_\rho)}{(p_\rho{}^2 + 4\omega^2)\,\Delta'(p_\rho)} = -\sum_{\rho=1}^{n+2} \frac{p_\rho D(p_\rho)}{\Delta_*{}'(p_\rho)} + \frac{D(2\omega i)\,2\omega i}{\Delta(2\omega i)\,4\omega i} +$$

$$+ \frac{D(-2\omega i)\,2\omega i}{\Delta(-2\omega i)\,4\omega i} = (-1)^{n+1} \sum_{\rho=1}^{n+2} \frac{(p_\rho)^{n+1}}{\Delta_*{}'(p_\rho)} + \mathrm{Re}\,\frac{D(2\omega i)}{\Delta(2\omega i)}$$

и окончательно

$$S_1 = -1 + \mathrm{Re}\,\frac{D(2\omega i)}{\Delta(2\omega i)} \tag{4.8}$$

Остается подставить все эти результаты в выражение (3.25) для величины g. При этом заменим еще $a + ib$ его значением (3.5). После всех упрощений получим

$$g = (a^2 + b^2)\,\mathrm{Re}\,\frac{D(i\omega)}{\Delta'(i\omega)}\left\{\left(\frac{\psi_2}{c}\right)^2\left[\frac{D(2i\omega)}{\Delta(2i\omega)} - 3 + 2\frac{D(0)}{\Delta(0)}\right] + \frac{3}{2}\frac{\psi_3}{c}\right\} \tag{4.9}$$

Множитель $(a^2 + b^2)$, не влияющий на знак g, конечно, можно отбросить. Заменяем далее

$$D(p) = \Delta(p) - cN(p)$$

и, в частности,

$$D(i\omega) = -cN(i\omega)$$

Получаем форму записи выражения g, наиболее удобную для вычисления:

$$g = \mathrm{Re}\,\frac{N(i\omega)}{\Delta'(i\omega)}\left\{\psi_2{}^2\left[\frac{N(2i\omega)}{\Delta(2i\omega)} + 2\frac{N(0)}{\Delta(0)}\right] - \frac{3}{2}\psi_3\right\} \tag{4.10}$$

Участок границы является «опасным», если имеет место

$$g > 0$$

и «безопасным», когда

$$g < 0$$

5. Рассмотрим частный случай «нечетной характеристики»:

$$\psi_2 = 0, \qquad f(\sigma) = c\sigma + \psi_3\sigma^3 + \cdots \tag{5.1}$$

Характеристикой будем называть возрастающей, если ψ_3 и c одного знака, и убывающей, если они разных знаков.

Выше говорилось, что все вычисления, приводящие к формуле (4.9), элементарно просты. Покажем, что и результат имеет наглядную геометрическую интерпретацию. Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(i\mu) = \frac{cN(i\mu)}{D(i\mu)} = \frac{\Delta(i\mu)}{D(i\mu)} - 1 = U(\mu) + iV(\mu) \tag{5.2}$$

и, задавая параметру μ все положительные значения, построим кривую (5.2) в плоскости переменных U, V. По предположению полином $\Delta(i\mu)$ обращается в нуль при $\mu = \omega$, т. е.

$$\Omega(i\omega) = -1 \tag{5.3}$$

Далее, поскольку степень полинома $N(p)$ строго меньше, чем степень полинома $D(p)$, имеем

$$\Omega(i\infty) = 0 \tag{5.4}$$

Отметим, что

$$\Omega'(i\mu) = -i\frac{d\Omega}{d\mu} = \frac{\Delta'(i\mu)}{D(i\mu)} - \frac{\Delta(i\mu)}{D^2(i\mu)}D'(i\mu)$$

и, значит,

$$\frac{D(i\omega)}{\Delta'(i\omega)} = \frac{1}{\Omega'(i\omega)} = \frac{i}{d\Omega(i\omega)\,/\,d\omega}$$

Полагаем теперь

$$\frac{d\Omega(i\mu)}{d\mu} = \left|\frac{d\Omega(i\mu)}{d\mu}\right| e^{i\gamma(\mu)}$$

т. е. обозначим через $\gamma(\mu)$ угол между касательной к кривой (5.2), проведенной в сторону возрастания параметра μ, и осью U. Отсчет угла γ производится от оси U к оси V. Тогда

$$\frac{D(i\omega)}{\Delta'(i\omega)} = \frac{1}{\left|\frac{d\Omega(i\omega)}{d\omega}\right|} e^{i\left[\frac{1}{2}\pi - \gamma(\omega)\right]}$$

Отбрасывая теперь в выражении (4.9) несущественный положительный множитель, найдем

$$g = \frac{\psi_3}{c}\sin\gamma(\omega) \tag{5.5}$$

Мы получаем теорему: пусть характеристическое уравнение системы дифференциальных уравнений первого приближения (1.4) имеет пару чисто мнимых корней; в этом критическом случае при нечетной возрастающей характеристике (5.1) исследуемое положение равновесия (1.13) устойчиво, если, двигаясь по кривой (5.2) в сторону возрастания параметра μ, мы пересекаем ось абсцисс в точке $M_0(U = -1,\ V = 0)$ со стороны положительных V в сторону отрицательных V (сверху вниз);

оно неустойчиво, если это пересечение происходит со стороны отрицательных V в сторону положительных V (снизу вверх). Обратный результат получается при убывающей характеристике.

Конечно, и при $\psi_2 \neq 0$ можно построить выражение (4.9) с помощью отрезков и углов, непосредственно определяемых по чертежу кривой (5.2). Однако столь наглядного результата, как в случае нечетной характеристики, теперь не получается.

Возвращаясь к случаю $\psi_2 = 0$, допустим теперь, что полином $\Delta(p)$ имеет одну пару комплексных корней с положительной вещественной частью, что можно установить, пользуясь известным правилом подсчета изменения аргумента вектора, имеющего начало в точке M_0 и обегающего кривую (5.2) при изменении μ от 0 до ∞. Допустим далее, что эта кривая пересекает ось U в точке M, достаточно близкой от точки M_0. Это обозначает, что параметры системы лежат в пространстве параметров вне области устойчивости близ ее границы. В случае возрастающей характеристики в системе возникнут автоколебания малой амплитуды, если кривая (5.2) пересечет в точке M ось абсцисс сверху вниз; система будет отброшена от рассматриваемого равновесного режима, если это пересечение произойдет снизу вверх. Конечно, обратные соотношения имеют место для убывающей характеристики.

Заметим, что для большого класса задач теории автоматического регулирования кривая (5.2) представляет не что иное, как амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы, используемую часто при исследовании устойчивости регулируемых систем. Поэтому сказанное выше позволяет в случае нечетной характеристики $f(\sigma)$ по одному взгляду на амплитудно-фазовую характеристику судить о том, как будет вести себя система при малом нарушении границ устойчивости. Конечно, нужно еще знать, будет ли характеристика $f(\sigma)$ возрастающей или убывающей.

6. Рассмотрим случай нулевого корня. Остановимся на случае (1.12) — полином $\Delta(p)$ имеет один нулевой корень, а все остальные корни с отрицательной вещественной частью:

$$\Delta(0) = 0 \quad \text{или} \quad D(0) = -cN(0) \tag{6.1}$$

При этом будем считать, что $D(0) \neq 0$.

Система уравнений (2.3) будет иметь вид:

$$\dot{z}_\rho = p_\rho z_\rho - \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \ldots \qquad (\rho = 1, \ldots, n-1) \tag{6.2}$$

$$\dot{x} = -\frac{\psi_2}{c}\sigma^2 - \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 - \ldots \tag{6.3}$$

причем

$$\sigma = \sum_{\rho=1}^{n-1} \frac{z_\rho}{A_\rho} + ax \tag{6.4}$$

где обозначено для сокращения письма

$$\frac{1}{A_\rho} = -\frac{D(p_\rho)}{\Delta'(p_\rho)}, \qquad \frac{1}{A_n} = a = -\frac{D(0)}{\Delta'(0)} \tag{6.5}$$

Следуя теореме § 32 «Общей задачи об устойчивости движения», составляем уравнения

$$p_\rho z_\rho = \frac{\psi_2}{c}\sigma^2 + \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 + \cdots \tag{6.6}$$

из которых в соответствии с (6.4) получаем

$$\sigma = ax + \left(\frac{\psi_2}{c}\sigma^2 + \frac{\psi_3}{c}\sigma^3 + \cdots\right)\sum_{\rho=1}^{n-1}\frac{1}{p_\rho A_\rho} \tag{6.7}$$

Значение σ, полученное из этого уравнения, нужно подставить в правую часть (6.3). Суждение об устойчивости получается теперь из рассмотрения первого члена разложения правой части по степеням x. Поэтому в решении уравнения (6.7) достаточно удержать лишь первый член его разложения в степенной ряд, т. е. принять $\sigma = ax$. Имеем

$$\dot{x} = -\frac{\psi_2}{c}a^2x^2 - \frac{\psi_3}{c}a^3x^3 - \cdots$$

Отсюда при $\psi_2 \neq 0$ следует неустойчивость исследуемого состояния равновесия; при $\psi_2 = 0$, т. е. для симметричной характеристики, находим

$$g = -\frac{\psi_3}{c}a^3 = \frac{\psi_3}{c}\left[\frac{D(0)}{\Delta'(0)}\right]^3$$

или, поскольку нас интересует только знак величины g:

$$g = \frac{\psi_3}{c}\frac{D(0)}{\Delta'(0)} = -\psi_3\frac{N(0)}{\Delta'(0)} \tag{6.8}$$

При $g < 0$ имеем устойчивость, при $g > 0$ неустойчивость рассматриваемого состояния равновесия.

Итак, если при $\psi_2 \neq 0$ параметры системы таковы, что в пространстве параметров мы выходим за границу устойчивости, соответствующую нулевому корню характеристического уравнения, то система отбрасывается от рассматриваемого равновесного режима. Этот же случай имеет место и при нечетной характеристике, т. е. при $\psi_2 = 0$, $\psi_3 \neq 0$, если $g > 0$; если же $g < 0$ и характеристика нечетна, то малое нарушение рассматриваемой границы устойчивости приведет к возникновению в системе автоколебаний малой амлитуды.

Из сравнения выражений (6.8) и (4.9) при $\psi_2 = 0$ следует, что геометрическое построение, предложенное в п. 5, остается справедливым и для случая, когда кривая (5.2) проходит через точку $M_0(-1, 0)$ при значении параметра μ, равном нулю.

Поступила в редакцию
6 V 1950

Ленинградский политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Баутин Н. Н. Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. Гостехиздат. 1949.
2. Лурье А. И. О канонической форме уравнений теории автоматического регулирования. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935. § 40, Стр. 169—171; § 32, Стр. 125—126.