Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

В статье [1] рассматривались периодические колебания неавтономной квазилинейной системы с одной степенью свободы при неаналитической характеристике нелинейности. В настоящей работе этот же вопрос исследуется для систем со многими степенями свободы.

§ 1. Колебания вдали от резонанса. Допустим, что колебания системы описываются уравнениями вида

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \cdots + a_{sn}x_n + \mu f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где a_{sj} — постоянные, а μ — малый параметр. Функции f_s предполагаются по отношению к t периодическими с периодом 2π, непрерывными и разлагающимися в ряды Фурье. По отношению к $x_1, \ldots, x_n$ эти функции допускают в некоторой области G непрерывные частные производные первого порядка, удовлетворяющие условию Коши-Липшитца

$$|F_{sj}(t, x_1', \ldots, x_n') - F_{sj}(t, x_1'', \ldots, x_n'')| < K\sum_{\alpha=1}^{n} |x_\alpha' - x_\alpha''|$$

$$\left(F_{sj} = \frac{\partial f_s}{\partial x_j}\right) \tag{1.2}$$

где K — некоторая постоянная.

Задача заключается в отыскании периодических решений (периода 2π) уравнений (1.1), обращающихся при $\mu = 0$ в пêриодические решения порождающей системы:

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = a_{s1}x_1^{(0)} + \cdots + a_{sn}x_n^{(0)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Рассмотрим характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \rho & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{1.4}$$

Назовем критическими те корни этого уравнения, которые либо равны нулю, либо равны $\pm p_j i$, где p_j — целые числа.

Здесь приходится различать два случая: нерезонансный, когда уравнение (1.4) не имеет корней, мало отличающихся от критических (на величины порядка малости μ), и резонансный, когда такие корни имеются.

Рассмотрим сначала нерезонансный случай. В этом случае единственным периодическим решением периода 2π порождающей системы (1.3) является тривиальное решение $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)} = 0$. При этом общая теория периодических решений Пуанкаре показывает, что в рассматриваемом случае существует одно и только одно периодическое решение системы (1.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$.

Для вычисления указанного периодического решения можно применить метод последовательных приближений, полагая

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt} = a_{s1}x_1^{(l)} + \cdots + a_{sn}x_n^{(l)} + \mu f_s(t, x_1^{(l-1)}, \ldots, x_n^{(l-1)}) \tag{1.5}$$
$$(x_1^{(0)} = \cdots = x_n^{(0)} = 0, \quad l = 1, 2, \ldots)$$

Если функции $x_s^{(l-1)}$ вышли периодическими, то определение $x_s^{(l)}$ приводится к вычислению периодического решения неоднородной линейной системы (1.5) с периодическими правыми частями, т. е. к хорошо изученной задаче вынужденных колебаний линейных систем. В рассматриваемом нерезонансном случае система (1.5) имеет, как известно, одно и только одно периодическое решение для $x_s^{(l)}$. Таким путем можно получить любое число приближений. Доказательство сходимости этих приближений к искомому периодическому решению не представляет никаких трудностей и здесь не приводится.

Для действительного вычисления периодического решения системы (1.5) целесообразно привести предварительно систему (1.3) к каноническому виду [1].

§ 2. О периодических решениях неоднородных линейных уравнений. В дальнейшем играет существенную роль вопрос о существовании периодических решений неоднородной линейной системы

$$\frac{d\xi_s}{dt} = a_{s1}\xi_1 + \cdots + a_{sn}\xi_n + F_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

где $F_s(t)$ — непрерывные периодические функции периода 2π, разлагающиеся в ряды Фурье. Эта система при отсутствии у уравнения (1.4) критических корней всегда допускает одно и только одно периодическое решение. Если же уравнение (1.4) имеет критические корни, то задача становится несколько сложнее.

Допустим, что характеристическое уравнение (1.4) имеет нулевой корень, кратность которого равна $\varkappa$, и r пар чисто мнимых корней вида $\pm p_j i$ $(j = 1, \ldots, r)$, где p_j — целые числа, и что кратности этих корней равны соответственно $\varkappa_j$. При этом, очевидно,

$$\varkappa + 2\varkappa_1 + \cdots + 2\varkappa_r \leqslant n$$

[1] Можно, конечно, воспользоваться и другими приемами, например, методами операционного исчисления, как это делает А. И. Лурье в работе [2], в которой рассматриваются также и простейшие резонансные случаи.

Допустим далее, что нулевой корень обращает в нуль все миноры определителя (1.4) до порядка $n-k+1$ включительно (не обращая в нуль хотя бы один из миноров $n-k$-го порядка), а корни $\pm p_j i$ обращают в нуль все миноры указанного определителя до $n-k_j+1$-го порядка включительно. При этом, очевидно, $k \leqslant \varkappa$, $k_j \leqslant \varkappa_j$. Пусть

$$k + 2k_1 + \cdots + 2k_r = m$$

Тогда, как известно (см., например [3], стр. 71), однородная система

$$\frac{d\xi_s}{dt} = a_{s1}\xi_1 + \cdots + a_{sn}\xi_n \tag{2.2}$$

допускает m периодических периода 2π решений. А именно, нулевому корню отвечает k решений вида $\xi_s = A_s^{(l)}$ $(l = 1, \ldots, k)$, в котором все величины $A_s^{(l)}$ являются постоянными, а каждой паре чисто мнимых корней $\pm p_j i$ отвечают $2k_j$ решений вида

$$\begin{aligned} \xi_s &= B_{sj}^{(l)} \cos p_j t + C_{sj}^{(l)} \sin p_j t \\ \xi_s &= B_{sj}^{(l)} \sin p_j t - C_{sj}^{(l)} \cos p_j t \end{aligned} \qquad (l = 1, \ldots, k_j) \tag{2.3}$$

где $B_{sj}^{(l)}$, $C_{sj}^{(l)}$ — также постоянные.

Рассмотрим систему

$$\frac{d\eta_s}{dt} + a_{1s}\eta_1 + \cdots + a_{ns}\eta_n = 0 \tag{2.4}$$

сопряженную с системой (2.2). Характеристическое уравнение этой системы имеет корни, лишь знаком отличающиеся от корней уравнения (1.4). Поэтому это характеристическое уравнение также имеет нулевой корень кратности $\varkappa$, который обращает в нуль все миноры характеристического определителя до порядка $n-k+1$ включительно, и r пар чисто мнимых корней $\pm p_j i$, кратности которых равны соответственно $\varkappa_j$ и которые обращают в нуль миноры характеристического определителя до порядка $n-k_j+1$. Следовательно, система (2.4) также имеет m периодических решений вида:

$$\begin{aligned} \eta_s &= P_s^{(l)} && (l = 1, \ldots, k) \\ \eta_s &= Q_{sj}^{(l)} \cos p_j t + R_{sj}^{(l)} \sin p_j t && \\ \eta_s &= Q_{sj}^{(l)} \sin p_j t - R_{sj}^{(l)} \cos p_j t && (l = 1, \ldots, k_j) \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $P_s^{(l)}$, $Q_{sj}^{(l)}$, $R_{sj}^{(l)}$ — постоянные.

При помощи неособенной линейной подстановки с постоянными коэффициентами однородную систему (2.2) можно привести к каноническому виду. Если эту подстановку применить к неоднородной системе (2.1), то преобразованная система распадется на следующие группы уравнений:

а) На группу, отвечающую некритическим корням и состоящую из $n-m$ уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dt} = b_{i1}y_1 + \cdots + b_{i,n-m}y_{n-m} + Y_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n-m) \tag{2.6}$$

В уравнениях (2.6) b_{ij} — постоянные[1], для которых уравнение

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\rho & b_{12} & \cdots & b_{1,n-m} \\ b_{21} & b_{22}-\rho & \cdots & b_{2,n-m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n-m,1} & b_{n-m,2} & \cdots & b_{n-m,n-m}-\rho \end{vmatrix} = 0 \tag{2.7}$$

не имеет ни нулевого корня, ни корней вида $\pm p_j i$.

б) На k групп, отвечающих нулевому корню и состоящих каждая из $n^{(l)}$ ($l=1,\ldots,k$; $n^{(1)}+\cdots+n^{(k)}=\varkappa$) уравнений вида

$$\frac{dz_1^{(l)}}{dt}=Z_1^{(l)}(t), \quad \frac{dz_i^{(l)}}{dt}=-z_{i-1}^{(l)}+Z_i^{(l)}(t) \quad \begin{pmatrix} i=2,\ldots,n^{(l)} \\ l=1,2,\ldots,k \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

в) На группы уравнений, отвечающих корням $\pm p_j i$. При этом каждой такой паре чисто мнимых корней отвечает соответственно k_j групп уравнений. Общее число уравнений, входящих во все группы, отвечающих рассматриваемой паре корней $\pm p_j i$, равно удвоенной кратности этих корней.

Так что, если мы обозначим число уравнений, входящих в l-ю группу ($l=1,\ldots,k_j$), через $n_j^{(l)}$, то будем иметь $n_j^{(1)}+\cdots+n_j^{(k_j)}=2\varkappa_j$.

Уравнения же указанной группы имеют вид:

$$\frac{du_{1j}^{(l)}}{dt}=-p_j v_{1j}^{(l)}+U_{1j}^{(l)}(t), \quad \frac{du_{ij}^{(l)}}{dt}=-p_j v_{ij}^{(l)}-u_{i-1,j}^{(l)}+U_{ij}^{(l)}(t)$$
$$\frac{dv_{1j}^{(l)}}{dt}=p_j u_{1j}^{(l)}+V_{1j}^{(l)}(t), \quad \frac{dv_{ij}^{(l)}}{dt}=p_j u_{ij}^{(l)}-v_{i-1,j}^{(l)}+V_{ij}^{(l)}(t)$$
$$(i=2,\ldots,n_j^{(l)}; \quad l=1,2,\ldots,k_j) \tag{2.9}$$

Здесь $y_i^{(l)}$, $z_i^{(l)}$, $u_{ij}^{(l)}$, $v_{ij}^{(l)}$ обозначают новые переменные, которые вводятся вместо $\xi_1,\ldots,\xi_n$, а Y_i, $Z_j^{(l)}$, $U_{ij}^{(l)}$, $V_{ij}^{(l)}$ — периодические функции времени, являющиеся линейными комбинациями с постоянными коэффициентами функций $F_s(t)$. При этом[2] переменные $z_1^{(l)}$, $u_{1j}^{(l)}$, $v_{1j}^{(l)}$ связаны с переменными $\xi_1,\ldots,\xi_n$ соотношениями

$$\begin{aligned} z_1^{(l)} &= P_1^{(l)}\xi_1+\ldots+P_n^{(l)}\xi_n \qquad (l=1,\ldots,k) \\ u_{1j}^{(l)} &= Q_{1j}^{(l)}\xi_1+\ldots+Q_{nj}^{(l)}\xi_n \\ v_{1j}^{(l)} &= R_{1j}^{(l)}\xi_1+\ldots+R_{nj}^{(l)}\xi_n \qquad (l=1,\ldots,k_j) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Остальные переменные $z_s^{(l)}$, $u_{ij}^{(l)}$, $v_{ij}^{(l)}$ и переменные y_i также являются линейными функциями с постоянными коэффициентами переменных $\xi_1,\ldots,\xi_n$. Этих коэффициентов мы здесь не приводим.

---

[1] Матрица коэффициентов b_{ij} также имеет каноническую форму, что мы, однако, явно не указываем.

[2] См. [3] стр. 73.

Из (2.10) вытекает, что

$$\begin{aligned} &Z_1^{(l)} = P_1^{(l)} F_1(t) + \ldots + P_n^{(l)} F_n(t) && (l = 1, 2, \ldots, k) \\ &U_{1j}^{(l)} = Q_{1j}^{(l)} F_1(t) + \ldots + Q_{nj}^{(l)} F_n(t) && \\ &V_{1j}^{(l)} = R_{1j}^{(l)} F_1(t) + \ldots + R_{nj}^{(l)} F_n(t) && (l = 1, 2, \ldots, k_j) \end{aligned} \qquad (2.11)$$

Таким образом, вопрос о существовании периодических решений системы дифференциальных уравнений (2.1) сводится к тому же вопросу для системы вида (2.6), (2.8) и (2.9). Что касается системы (2.6), то, поскольку уравнение (2.7) не имеет критических корней, она допускает одно и только одно периодическое решение для y_i.

Рассмотрим теперь систему (2.8). Для того чтобы функция $z_1^{(l)}$ вышла периодической, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье функции $Z_1^{(l)}$ не содержало свободного члена, т. е. чтобы выполнялось

$$\int_0^{2\pi} Z_1^{(l)}(t)\, dt = 0 \qquad (l = 1, \ldots, k) \qquad (2.12)$$

Допустим, что это условие выполнено. Тогда получим для $z_1^{(l)}$ периодическое решение

$$z_1^{(l)} = \alpha_1 + \int_0^t Z_1^{(l)}(t)\, dt$$

где α_1 — произвольная постоянная. Полагая эту постоянную равной свободному члену разложения Фурье функции $Z_2^{(l)}$, мы получим, что функция $z_2^{(l)}$ выйдет также периодической. Эта функция будет также содержать произвольную постоянную, которой можно распорядиться таким образом, чтобы вышла периодической $z_3^{(l)}$, и т. д.

Таким образом, чтобы система (2.8) допускала периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2.12).

Переходим теперь к системе (2.9). Для того чтобы уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = -py + f(t), \qquad \frac{dy}{dt} = px + F(t)$$

где p — целое число, а f и F — периодические функции периода 2π, допускали периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при $\sin pt$ в разложении f равнялся коэффициенту при $\cos pt$ в разложении F, а коэффициент при $\cos pt$ у функции f равнялся коэффициенту при $\sin pt$ у функции F с обратным знаком. Следовательно, для того чтобы функции $u_{1j}^{(l)}$ и $v_{1j}^{(l)}$ вышли периодическими, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} (U_{1j}^{(l)} \sin p_j t - V_{1j}^{(l)} \cos p_j t)\, dt = 0 \\ &\int_0^{2\pi} (U_{1j}^{(l)} \cos p_j t + V_{1j}^{(l)} \sin p_j t)\, dt = 0 \qquad (l = 1, \ldots, k_j) \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Если эти условия выполнены, то будем иметь

$$u_{1j}^{(l)} = M_j^{(l)} \cos p_j t + N_j^{(l)} \sin p_j t + \bar{u}_{1j}^{(l)}(t)$$
$$v_{1j}^{(l)} = M_j^{(l)} \sin p_j t - N_j^{(l)} \cos p_j t + \bar{v}_{1j}^{(l)}(t)$$

где $\bar{u}_{1j}^{(l)}$ и $\bar{v}_{1j}^{(l)}$ — периодические функции, не содержащие в своих разложениях $\cos p_j t$ и $\sin p_j t$, а $M_j^{(l)}$ и $N_j^{(l)}$—произвольные постоянные.

Если положить

$$M_j^{(l)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U_{2j}^{(l)} \cos p_j t + V_{2j}^{(l)} \sin p_j t)\, dt$$

$$N_j^{(l)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (U_{2j}^{(l)} \sin p_j t - V_{2j}^{(l)} \cos p_j t)\, dt$$

то будут выполнены условия, при которых уравнения для $u_{2j}^{(l)}$ и $v_{2j}^{(l)}$ допускают периодическое решение. При этом $u_{2j}^{(l)}$ и $v_{2j}^{(l)}$ будут также содержать две произвольные постоянные, которыми можно распорядиться таким образом, чтобы функции $u_{3j}^{(l)}$, $v_{3j}^{(l)}$ вышли также периодическими. Продолжая таким образом дальше, придем к заключению, что для того чтобы система вида (2.9) допускала периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения (2.13).

Итак, необходимыми и достаточными условиями существования периодического решения системы (2.1) являются соотношения (2.12) и (2.13). Этих соотношений будет, очевидно, $k + 2k_1 + \cdots + 2k_r = m$, т. е. столько, сколько независимых периодических решений имеет однородная система (2.2). Принимая во внимание (2.11), мы можем соотношения (2.12) и (2.13) переписать в следующем виде:

$$\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} F_s P_s^{(l)} dt = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, k)$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} (Q_{sj}^{(l)} \sin p_j t - R_{sj}^{(l)} \cos p_j t) F_s dt = 0 \\ &\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} (Q_{sj}^{(l)} \cos p_j t + R_{sj}^{(l)} \sin p_j t) F_s dt = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (l = 1, 2, \ldots, k_j)$$

или на основании (2.5)

$$\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} F_s(t)\, \psi_{si}(t)\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.14}$$

где $\psi_{s1}, \ldots, \psi_{sm}$ — совокупность периодических решений сопряженной системы (2.4).

Если условия (2.14) выполняются, то система (2.1) будет допускать периодическое решение, зависящее от m произвольных постоянных, так как соответствующая однородная система допускает m независимых периодических решений.

Пусть $\varphi_{s1}, \ldots, \varphi_{sm}$ — периодические решения системы (2.2). Как было выяснено выше, функции φ_{si} либо являются постоянными, либо имеют вид (2.3). Тогда общее периодическое решение неоднородной системы (2.1) имеет вид:

$$\xi_s = C_1\varphi_{s1} + \cdots + C_m\varphi_{sm} + \omega_s(t)$$

где $C_1, \ldots, C_m$ — произвольные постоянные, а ω_s — какое-нибудь частное периодическое решение системы (2.1).

Для действительного вычисления этого периодического решения целесообразно действительно произвести вышеуказанное преобразование переменных. Это особенно полезно в том случае, когда имеется необходимость при вычислении последовательных приближений определять периодические решения нескольких систем, отличающихся друг от друга только неоднородными частями. Однако для дальнейших общих теоретических выкладок удобнее пользоваться исходным общим видом уравнений (2.1).

Функции ω_s, определяющие частное периодическое решение уравнений (2.1), являются, очевидно, некоторыми операторами от $F_1(t), \ldots, F_n(t)$. Так как таких частных решений имеется бесчисленное множество, то и таких систем операторов будет также бесчисленное множество. Выделим из них одну, обладающую специальными свойствами.

С этой целью рассмотрим фундаментальную систему решений ξ_{sj} $(s, j = 1, \ldots, n)$ уравнений (2.2). При этом будем предполагать, что в эту фундаментальную систему включены периодические решения φ_{si} и что они образуют первые m решений указанной системы, так что

$$\xi_{si} = \varphi_{si}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{2.15}$$

Интегрируя неоднородную систему (2.1) по методу Лагранжа, получим

$$\xi_s = C_1\varphi_{s1} + \cdots + C_m\varphi_{sm} + C_{m+1}\xi_{s,\,m+1} + \cdots + C_n\xi_{sn} + \sum_{\alpha,\,\beta}^{1,\,n}\xi_{s\alpha}\int_0^t \frac{\Delta_{\beta\alpha}}{\Delta}F_\beta\,dt \tag{2.16}$$

где Δ — определитель, составленный из ξ_{sj}, $\Delta_{\beta\alpha}$ — минор этого определителя, соответствующий элементу $\xi_{\beta\alpha}$, а $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Для того чтобы решение (2.16) было периодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\xi_s(2\pi) - \xi_s(0) = 0$, которые в силу периодичности φ_{si} имеют вид:

$$C_{m+1}[\xi_{s,\,m+1}(2\pi) - \xi_{s,\,m+1}(0)] + \cdots + C_n[\xi_{sn}(2\pi) - \xi_{sn}(0)] + \\ + \sum_{\alpha,\,\beta}^{1,\,n}\xi_{s\alpha}(2\pi)\int_0^{2\pi}\frac{\Delta_{\beta\alpha}}{\Delta}F_\beta\,dt = 0 \tag{2.17}$$

Таким образом, получим n уравнений для определения $n - m$ коэффициентов $C_{m+1}, \ldots, C_n$. Так как условия (2.14) предполагаются выполненными и, следовательно, система (2.1) допускает периодическое решение, то система (2.17) имеет по крайней мере одно решение для $C_{m+1}, \ldots, C_n$. Нетрудно видеть, что таких решений будет только одно.

В самом деле, если имеются две системы величин $C_{m+1}, \ldots, C_n$ и $C_{m+1}^*, \ldots, C_n^*$, удовлетворяющие уравнениям (2.17), то, подставляя эти величины в (2.16), получим два периодических решения системы (2.1). Составляя их разность, получим периодические функции $(C_{m+1} - C_{m+1}^*)\xi_{s,m+1} + \cdots + (C_n - C_n^*)\xi_{sn}$, являющиеся, очевидно, решением однородной системы (2.2). Но в таком случае эти функции необходимо должны быть линейными комбинациями функций φ_{si}, так как никаких других периодических решений система (2.2) не имеет. Это, однако, противоречит условию независимости выбранной фундаментальной системы. Таким образом, полагая, что $C_{m+1}, \ldots, C_n$ выбраны согласно условиям (2.17), получаем вполне определенное периодическое решение системы (2.1):

$$\xi_s = L_s(t, F_1, \ldots, F_n)$$

$$L_s(t, F_1, \ldots, F_n) = C_{m+1}\xi_{s,m+1} + \cdots + C_n\xi_{sn} + \sum_{\alpha,\beta}^{1,n} \xi_{s\alpha} \int_0^t \frac{\Delta_{\beta\alpha}}{\Delta} F_\beta dt \tag{2.18}$$

Общий вид периодического решения системы (2.1) определяется формулами

$$\xi_s = M_1\varphi_{s1} + \cdots + M_m\varphi_{sm} + L_s(t, F_1, \ldots, F_n) \tag{2.19}$$

где M_i — произвольные постоянные.

Так как на основании (2.17) величины $C_{m+1}, \ldots, C_n$ являются линейными однородными функциями величин

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Delta_{\beta\alpha}}{\Delta} F_\beta dt$$

то операторы $L(t, F_1, \ldots, F_n)$ обладают следующими свойствами.

а) Эти операторы линейны, т. е. если F_s и Φ_s — две системы функций, а C — постоянная, то

$$\begin{gathered} L_s(t, F_1 + \Phi_1, \ldots, F_n + \Phi_n) = L_s(t, F_1, \ldots, F_n) + L_s(t, \Phi_1, \ldots, \Phi_n) \\ L_s(t, CF_1, \ldots, CF_n) = CL_s(t, F_1, \ldots, F_n) \end{gathered} \tag{2.20}$$

б) Если выполняются неравенства $|F_s| < A$, где A — некоторая постоянная, то будут выполняться неравенства

$$|L_s(t, F_1, \ldots, F_n)| < BA \tag{2.21}$$

где B — тоже постоянная, не зависящая от того или иного частного выбора функций F_s.

в) Если функции F_s зависят от некоторых параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и обладают по этим параметрам некоторым числом производных, то операторы L_s будут обладать по этим параметрам таким же числом производных.

§ 3. Колебания вблизи резонанса. Переходим к изучению колебаний вблизи резонанса, т. е. того случая, когда уравнение (1.4) имеет критические корни или корни, отличающиеся от критических на величины порядка малости μ. Однако в дальнейшем будем предполагать, что уравнение (1.4) не имеет корней, близких к критическим, так как этого всегда можно добиться путем отнесения поправочных членов к функциям μf_s.

Допустим для определенности, что, так же как и в предыдущем параграфе, уравнение (1.4) имеет нулевой корень кратности $\varkappa$ и r пар чисто мнимых корней $\pm p_j i$ $(j=1,\ldots,r)$, где p_j — целые числа, с кратностями $\varkappa_j$. Пусть, как и раньше, нулевой корень обращает в нуль все миноры определителя (1.4) до порядка $n-k+1$ включительно, а корни $\pm p_j i$ обращают в нуль все миноры этого определителя до порядка $n-k_j+1$. При этом, конечно, $k\leqslant\varkappa$, $k_j\leqslant\varkappa_j$. Допустим далее, что $k+2k_1+\cdots+2k_r=m$.

В рассматриваемом случае, как было показано в предыдущем параграфе, порождающая система (1.3) имеет периодическое решение

$$x_s^{(0)}=M_1^{(0)}\varphi_{s1}+\cdots+M_m^{(0)}\varphi_{sm} \tag{3.1}$$

зависящее от m произвольных постоянных $M_1^{(0)},\ldots,M_m^{(0)}$.

В статье [4] исследован в общем виде вопрос о существовании периодических решений нелинейных систем, содержащих малый параметр, когда порождающее решение зависит от некоторого числа произвольных постоянных. Результаты этого исследования показывают, что для того чтобы система (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся при $\mu=0$ в порождающее (3.1), необходимо, чтобы постоянные $M_i^{(0)}$ удовлетворяли уравнениям

$$P_i^{(0)}(M_1^{(0)},\ldots,M_m^{(0)})=\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi}f_s(t,\,x_1^{(0)},\ldots,x_n^{(0)})\,\psi_{si}\,dt=0 \quad (i=1,\ldots,m) \tag{3.2}$$

где функции ψ_{si} имеют те же значения, что и в предыдущем параграфе, т. е. являются периодическими решениями сопряженной системы (2.4).

Для каждого решения уравнений (3.2), для которых выполняется условие

$$\frac{\partial(P_1^{(0)},\ldots,P_m^{(0)})}{\partial(M_1^{(0)},\ldots,M_m^{(0)})}\neq 0 \tag{3.3}$$

и для которого порождающее решение (3.1) лежит в области G, существует при достаточно малом μ одно и только одно периодическое решение системы (1.1), обращающееся при $\mu=0$ в порождающее.

Для вычисления этого периодического решения воспользуемся методом последовательных приближений. С этой целью примем в качестве нулевого приближения порождающее решение (3.1), а в качестве дальнейших приближений периодические решения уравнений

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt}=a_{s1}x_1^{(l)}+\cdots+a_{sn}x_n^{(l)}+\mu f_s(t,x_1^{(l-1)},\ldots,x_n^{(l-1)}) \quad (l=1,2,\ldots) \tag{3.4}$$

Для того чтобы система (3.4) допускала периодические решения, необходимо и достаточно, как это было показано в предыдущем параграфе, чтобы выполнялись соотношения

$$\sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi}f_s(t,\,x_1^{(l-1)},\;\ldots,\;x_n^{(l-1)})\,\psi_{si}\,dt=0 \qquad (i=1,2,\ldots,m) \tag{3.5}$$

При $l=1$ снова приходим к уравнениям (3.2), определяющим постоянные $M_i^{(0)}$ в порождающем решении. Посмотрим, как можно удовлетворить этим уравнениям при $l>1$.

Как было показано в предыдущем параграфе, периодические решения системы (3.4), если они существуют, имеют вид:

$$x_s^{(l)} = M_1^{(l)}\varphi_{s1} + \cdots + M_m^{(l)}\varphi_{sm} + \varphi_s^{(l)}(t)$$

где $M_i^{(l)}$ — произвольные постоянные, а $\varphi_s^{(l)}$ — какое-нибудь частное периодическое решение этой системы.

Этими постоянными и можно воспользоваться для удовлетворения соотношениям (3.5). А именно, выбрав сначала произвольные постоянные $M_i^{(0)}$ из уравнений (3.2), мы удовлетворим условиям периодичности для $x_s^{(1)}$, после чего постоянные $M_i^{(1)}$ определим из условий периодичности второго приближения, т. е. из уравнений (3.5) при $l=2$.

Определив затем второе приближение, определим входящие в него произвольные постоянные $M_i^{(2)}$ из условия периодичности третьего приближения и т. д.

Таким путем получаем вполне определенный процесс последовательных приближений, так как уравнения (3.5) при $|\mu|$ достаточно малом всегда имеют одно и только одно решение для $M_i^{(l-1)}$.

В самом деле, функции $x_s^{(l-1)}$ при $\mu=0$ и $M_i^{(l-1)} = M_i^{(0)}$ совпадают с $x_i^{(0)}$ и поэтому уравнения (3.5) на основании (3.2) тождественно удовлетворяются при $\mu=0$, $M_i^{(l)-1} = M_i^{(0)}$.

Так как при этом по предположению выполняется условие (3.3), то уравнения (3.5) допускают при достаточно малом $|\mu|$ одно и только одно решение $M_i^{(l-1)}(\mu)$, для которого $M_i^{(l-1)}(0) = M_i^{(0)}$.

§ 4. Доказательство сходимости последовательных приближений. Докажем, что рассмотренные в предыдущем параграфе последовательные приближения сходятся при достаточно малом $|\mu|$ к искомому периодическому решению.

Эти приближения могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} x_s^{(l)} &= M_1^{(l)}\varphi_{s1} + \cdots + M_m^{(l)}\varphi_{sm} + \mu L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) \\ f_s^{(i)} &= f_s(t, x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}) \qquad (i=1,2,\ldots) \end{aligned} \tag{4.1}$$

где L_s — операторы, рассмотренные в § 2. Введем для дальнейшего обозначения (4.2)

$$\xi_s^{(l)}(M_1, \ldots, M_m) = M_1\varphi_{s1} + \cdots + M_m\varphi_{sm} + \mu L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)})$$

$$P_i^{(l)}(M_1, \ldots, M_m, \mu) = \sum_{s=1}^{n}\int_0^{2\pi} f_s(t, \xi_1^{(l)}, \ldots, \xi_n^{(l)})\psi_{si}\,dt \qquad \begin{pmatrix} s=1,\ldots,n \\ i=1,\ldots,m \\ l=1,2,\ldots \end{pmatrix}$$

Тогда уравнения, определяющие произвольные постоянные $M_i^{(l)}$, можно представить в виде

$$P_i^{(l)}(M_1^{(l)}, \ldots, M_m^{(l)}) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{4.3}$$

так как, очевидно,

$$x_s^{(l)} = \xi_s^{(l)}(M_1^{(l)}, \ldots, M_m^{(l)}).$$

Покажем прежде всего, что при достаточно малом $|\mu|$ все величины $x_s^{(l)}$ лежат в области G. Допустим с этой целью, что это условие выполнено для $x_s^{(0)}, x_s^{(1)}, \ldots, x_s^{(l-1)}$, и покажем, что тогда оно будет также выполняться и для $x_s^{(l)}$.

В самом деле, на основании (2.21) имеем прежде всего

$$|L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)})| < BA \tag{4.4}$$

где через A обозначен верхний предел функций $f_s(t, x_1 \ldots, x_n)$ в области G.

Обозначим для дальнейшего через $D^{(0)}(M_1, \ldots, M_m)$ функциональный определитель

$$D^0(M_1, \ldots, M_m) = \frac{\partial(P_1^{(0)}, \ldots, P_m^{(0)})}{\partial(M_1, \ldots, M_m)}$$

Так как на основании (3.3) определитель $D^{(0)}(M_1, \ldots, M_m)$ (он не зависит от μ) отличен от нуля при $M_i = M_i^{(0)}$, то всегда найдется такое достаточно малое положительное число h, что при

$$|M_i - M_i^{(0)}| \leqslant h \qquad (i = 1. \ldots, m) \tag{4.5}$$

будет выполняться неравенство

$$|D^{(0)}(M_1, \ldots, M_m)| > \alpha \tag{4.6}$$

где α — некоторая положительная постоянная.

Кроме того, будем предполагать h настолько малым, чтобы величины $M_1\varphi_{s1} + \cdots + M_m\varphi_{sm}$ при выполнении (4.5) лежали в области G. Это также возможно, так как по предположению порождающее решение лежит в области G.

Выберем теперь число η_l настолько малым, чтобы при

$$|\mu| < \eta_l \tag{4.7}$$

и выполнении неравенства (4.5) величины $\xi_s^{(l)}$ лежали в области G. Это возможно в силу (4.4) и выбора числа h. При этом число η_l не будет, очевидно, зависеть от индекса l.

Потребуем, кроме того, чтобы при выполнении (4.7) корни $M_i^{(l)}(\mu)$ уравнений (4.3) лежали в области (4.5).

Это, очевидно, также возможно, так как $M_i^{(l)}(0) = M_i^{(0)}$. Покажем, что при этом также можно считать, что величина η_l не зависит от l.

С этой целью рассмотрим корни $N_i^{(l)}(\mu, \lambda)$ уравнений

$$Q_i^{(l)}(N_1^{(l)}, \ldots, N_m^{(l)}, \mu, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

где положено[1]

$$Q_i^{(l)}(N_1, \ldots, N_m, \mu, \lambda) = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_s(t, \eta_1^{(l)}, \ldots, \eta_m^{(l)}) \psi_{si}\, dt$$

$$\eta_s^{(l)} = N_1\varphi_{s1} + \cdots + N_m\varphi_{sm} + \lambda L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) \tag{4.8}$$

Очевидно, имеем

$$P_i^{(l)}(N_1, \ldots, N_m, \mu) = Q_i^{(l)}(N_1, \ldots, N_m, \mu, \mu), \quad M_i^{(l)}(\mu) = N_i^{(l)}(\mu, \mu) \tag{4.9}$$

$$P_i^{(0)}(N_1, \ldots, N_m) = Q_i^{(l)}(N_1, \ldots, N_m, \mu, 0), \quad M_i^{(l)}(0) = M_i^{(0)} = N_i^{(l)}(\mu, 0)$$

Применяя теорему о среднем значении, можем написать

$$N_i^{(l)}(\mu, \lambda) - N_i^{(l)}(\mu, 0) = \lambda \left(\frac{\partial N_i^{(l)}(\mu, \lambda)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda = \theta\lambda} = \tag{4.10}$$

$$= \lambda \left\{ \frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)}) / \partial (N_1, \ldots, N_{i-1}, \lambda, N_{i+1}, \ldots, N_m)}{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)}) / \partial (N_1, \ldots, N_m)} \right\}_{N_j = N_j^{(l)}(\mu, \theta\lambda), \lambda = \theta\lambda}$$

где θ — правильная положительная дробь. Далее

$$\frac{\partial Q_i^{(l)}}{\partial N_j} = \sum_{\alpha, \beta}^{1, n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_\alpha(t, \eta_1^{(l)}, \ldots, \eta_m^{(l)})}{\partial \eta_\beta^{(l)}} \psi_{\alpha i} \varphi_{\beta j}\, dt$$

Так как по условию частные производные функций f_s удовлетворяют в области G условию Коши-Липшитца (1.2), то из (4.8) и (4.4) вытекает

$$\left| \left(\frac{\partial Q_i^{(l)}}{\partial N_j} \right)_{\lambda = \lambda_1} - \left(\frac{\partial Q_i^{(l)}}{\partial N_j} \right)_{\lambda = \lambda_2} \right| <$$

$$< \sum_{\alpha, \beta}^{1, n} \int_0^{2\pi} K \sum_{\gamma=1}^{n} | L_\gamma(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) | \, |\lambda_1 - \lambda_2| \, |\varphi_{\beta j} \psi_{\alpha i}|\, dt <$$

$$< 2\pi n^3 BAKM^2 |\lambda_1 - \lambda_2|$$

где M — верхний предел величин $|\varphi_{sj}|$ и $|\psi_{sj}|$. Другими словами, производные $\partial Q_i^{(l)} / \partial N_j$ удовлетворяют по отношению к λ условию Коши-Липшитца с некоторым не зависящим от l коэффициентом. Но тогда тем же свойством обладает и функциональный определитель $\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)}) / \partial (N_1, \ldots, N_m)$ и, следовательно,

$$\left| \left(\frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} \right)_{\lambda = \lambda_1} - \left(\frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} \right)_{\lambda = \lambda_2} \right| < L |\lambda_1 - \lambda_2| \tag{4.11}$$

где L — некоторая не зависящая от l постоянная. Все это, конечно, будет справедливо лишь при таких значениях величин N_i, μ и λ, при которых величины $\eta_s^{(l)}$ лежат в области G.

[1] Параметр μ входит в $Q_i^{(l)}$ через величины $x_s^{(l-1)}$, содержащиеся в $f_s^{(l-1)}$.

Последнее будет наверное выполняться в области

$$|N_i - M_i^{(0)}| \equiv |N_i - N_i^{(l)}(\mu, 0)| \leqslant h, \qquad |\lambda| < \eta_l, \qquad |\mu| < \eta_l \tag{4.12}$$

Из (4.11) находим, что в области (4.12) выполняется неравенство

$$\left| \frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} - \left(\frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} \right)_{\lambda=0} \right| =$$

$$= \left| \frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} - D^{(0)}(N_1, \ldots, N_m) \right| < L\lambda \tag{4.13}$$

В той же области изменения переменных справедливо неравенство

$$|\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)}) / \partial (N_1, \ldots, N_{i-1}, \lambda, N_{i+1}, \ldots, N_m)| < C \tag{4.14}$$

где C — не зависящая от l величина, определяемая верхними пределами производных $\partial f_s / \partial x_j$ в области G.

Обозначим теперь через β верхний предел величины η_l, при которой при выполнении (4.12) величины $\eta_s^{(l)}$ лежат в области G. Как уже указывалось, это число β не зависит от l. Пусть

$$\eta = \min \{\beta, \alpha / 2L\theta, h\alpha / 2C\} \tag{4.15}$$

и покажем, что при $|\mu| \leqslant \eta$, $|\lambda| \leqslant \eta$ выполняются неравенства

$$|N_i^{(l)}(\mu, \lambda) - N_i^{(l)}(\mu, 0)| < h \tag{4.16}$$

В самом деле, эти неравенства во всяком случае выполняются при λ достаточно малом (предполагая $|\mu| \leqslant \eta$). Пусть $л$ — первое значение λ, при котором хотя бы одно из неравенств (4.16) переходит в равенство. Нам нужно показать, что $|л| > \eta$. Допустим противное, что $|л| \leqslant \eta$. Так как при этом $N_i^{(l)}(\mu, \theta л)$ еще лежат в области (4.12), то будут справедливы оценки (4.13) и (4.14), если в них заменить N_i через $N_i^{(l)}(\mu, \theta л)$, а λ через $\theta л$. Поэтому из (4.10) находим

$$|N_i^{(l)}(\mu, л) - N_i^{(l)}(\mu, 0)| \equiv |N_i^{(l)}(\mu, л) - M_i^{(0)}| < \frac{2Cл}{\alpha} \leqslant \frac{2C\eta}{\alpha} < h \tag{4.17}$$

так как (4.13) дает

$$\left| \left\{ \frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} - D^{(0)}(N_1, \ldots, N_m) \right| \right\}_{N_i = N_i^{(l)}(\mu, \theta л), \; \lambda = \theta л} < L\theta л \leqslant L\theta\eta \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

и, следовательно, на основании (4.6)

$$\left| \frac{\partial (Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)})}{\partial (N_1, \ldots, N_m)} \right|_{N_i = N_i^{(l)}(\mu, \theta л), \; \lambda = \theta л} > \frac{\alpha}{2}$$

Неравенства (4.17) противоречат предположению, что при $\lambda = л$ хотя бы одно из неравенств (4.16) переходит в равенство.

Таким образом, при $|\mu| \leqslant \eta$, $|\lambda| \leqslant \eta$ корни $N_i^{(l)}(\mu, \lambda)$ удовлетворяют неравенствам (4.16). Полагая $\mu = \lambda$, на основании (4.9) получим, что при

$$|\mu| \leqslant \eta \tag{4.18}$$

корни $M_i^{(l)}(\mu)$ уравнений (4.3) лежат в области (4.5). Вместе с этим величины $x_s^{(l)}$ будут лежать в области G, что и требовалось показать.

Переходим теперь в оценке разностей последовательных приближений. Прежде всего можно записать

$$|L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) - L_s(t, f_1^{(l-2)}, \ldots, f_n^{(l-2)})| < a_l$$

$$|M_i^{(l)} - M_i^{(l-1)}| < b_l$$

где a_l и b_l — постоянные, для которых на основании предыдущего можно назначить некоторые не зависящие от l верхние пределы.

Далее на основании (2.20) имеем

$$L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)}) - L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) =$$
$$= L_s(t, f_1^{(l)} - f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l)} - f_n^{(l-1)}) \tag{4.19}$$

Но функции f_s, очевидно, удовлетворяют условию Коши-Липшитца, и мы можем поэтому написать

$$|f_s^{(l)} - f_s^{(l-1)}| < P\sum_{\alpha=1}^{n} |x_\alpha^{(l)} - x_\alpha^{(l-1)}| \leqslant P\sum_{\alpha=1}^{n} \Big| \Big\{ \sum_{i=1}^{m} (M_i^{(l)} - M_i^{(l-1)})\varphi_{\alpha i} +$$
$$+ \mu [L_\alpha(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) - L_\alpha(t, f_1^{(l-2)}, \ldots, f_n^{(l-2)})] \Big\} \Big| < nP(mMb_l + a_l|\mu|)$$

где P — некоторая постоянная, а M — верхний предел функций $|\varphi_{\alpha i}|$. Следовательно, из (4.19) на основании (2.21) находим

$$|L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)}) - L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)})| < a_{l+1} \tag{4.20}$$

где

$$a_{l+1} = nPB(mMb_l + |\mu| a_l) \tag{4.21}$$

Оценим теперь разности $M_i^{(l+1)}(\mu) - M_i^{(l)}(\mu)$. Рассмотрим с этой целью вспомогательные уравнения

$$R_i^{(l)}(S_1^{(l)}, \ldots, S_m^{(l)}, \mu, \lambda) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.22}$$

где положено

$$R_i^{(l)}(S_1, \ldots, S_m, \mu, \lambda,) = \sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} (f_s(t, \zeta_1^{(l)}, \ldots, \zeta_n^{(l)}) \psi_{si}\, dt$$

$$\zeta_s^{(l)} = S_1\varphi_{s1} + \cdots + S_m\varphi_{sm} + \mu L_s(t, f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l-1)}) +$$
$$+ \lambda L_s(t, f_1^{(l)} - f_1^{(l-1)}, \ldots, f_n^{(l)} - f_u^{(l-1)}) \tag{4.23}$$

и параметр λ изменяется в области $|\lambda| \leqslant |\mu|$.

Величину η в неравенстве (4.18) можно, очевидно, выбрать настолько малой, чтобы величины $\zeta_s^{(l)}$ лежали в области G, если S_i лежат в области

$$| S_i - M_i^{(0)} | \leqslant h \tag{4.24}$$

и поэтому функции $R_i^{(l)}$ вполне определенные. Очевидно имеем

$$M_i^{(l+1)}(\mu) = S_i^{(l)}(\mu, \mu), \; M_i^{(l)}(\mu) = S_i^{(l)}(\mu, 0)$$

где $S_i^{(l)}(\mu, \lambda)$ — корни уравнений (4.22). Поэтому

$$M_i^{(l+1)}(\mu) - M_i^{(l)}(\mu) = S_i^{(l)}(\mu, \mu) - S_i^{(l)}(\mu, 0) = \mu\left(\frac{\partial S_i^{(l)}(\mu, \lambda)}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\theta\mu} = \tag{4.25}$$

$$= \mu\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right) / \partial\left(S_1, \ldots, S_{i-1}, \lambda, S_{i+1}, \ldots, S_m\right)}{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right) / \partial\left(S_1, \ldots, S_m\right)}\right\}_{S_j = S_j^{(l)}(\mu, \theta\mu),\ \lambda=\theta\mu}$$

где θ — правильная положительная дробь.

Совершенно так же, как это было показано для корней $M_i^{(l)}(\mu)$ уравнений (4.3), можно показать, что корни $S_i^{(l)}(\mu, \lambda)$ уравнений (4.22) лежат в области (4.24), если только величина η в неравенстве (4.18) достаточно мала.

Будем предполагать, что это условие выполнено и при этом величина η попрежнему не будет зависеть от l.

Функциональный определитель $\partial(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}) / \partial(S_1, \ldots, S_m)$ в области, определяемой неравенствами (4.18) и (4.24), удовлетворяет по отношению к λ условию Коши-Липшитца с некоторым не зависящим от l коэффициентом L^*.

Поэтому можно записать

$$\left|\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j = S_j^{(l)}(\mu, \theta\mu),\ \lambda=\theta\mu} - \right.$$

$$\left. - \left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j = S_j^{(l)}(\mu, \theta\mu),\ \lambda=0}\right| < L^*\theta\mu \tag{4.26}$$

Но на основании (4.23) и (4.8) имеем тождественно

$$\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j = S_j^{(l)}(\mu, \theta\mu),\ \lambda=0} \equiv \left\{\frac{\partial\left(Q_1^{(l)}, \ldots, Q_m^{(l)}\right)}{\partial(N_1, \ldots, N_m)}\right\}_{N_j = S_j^{(l)}(\mu, \theta\mu),\ \lambda=\mu}$$

и так как величины $S_i^{(l)}(\mu, \theta\mu)$ лежат в области (4.24), то на основании (4.13)

$$\left|\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j = S_j^{(l)}(\mu, \theta\mu),\ \lambda=0} - \right.$$

$$\left. - D^{(0)}\left(S_1^{(l)}(\mu, \theta\mu), \ldots, S_m^{(l)}(\mu, \theta\mu)\right)\right| < L\mu < \frac{\alpha}{2} \tag{4.27}$$

если только число η в неравенстве (4.18) выбрано меньше $\alpha / 2L$, что мы и будем предполагать.

Но так как в области (4.5) выполняется (4.6), то из (4.27) находим

$$\left|\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j=S_j^{(l)}(\mu,\, \theta\mu),\, \lambda=0}\right| > \frac{\alpha}{2}$$

Поэтому неравенство (4.26) дает

$$\left|\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j=S_j^{(l)}(\mu,\, \theta\mu),\, \lambda=\theta\mu}\right| > \frac{\alpha}{4} \tag{4.28}$$

если еще потребовать, чтобы $\eta < \alpha / 4L^*\theta$. Будем считать, что это условие относительно η также выполнено.

Далее имеем

$$\frac{\partial R_i^{(l)}}{\partial\lambda} = \sum_{\alpha,\,\beta}^{1,\,n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_\alpha}{\partial\zeta_\beta^{(l)}} L_\beta\left(t,\, f_1^{(l)} - f_1^{(l-1)}, \ldots,\, f_n^{(l)} - f_n^{(l-1)}\right) \psi_{\alpha i}\, dt$$

Поэтому в области изменения переменных $S_1, \ldots, S_m$, μ, λ, определяемой неравенствами $|\lambda| \leqslant |\mu|$, (4.24) и (4.18) на основании (4.20) справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial R_i^{(l)}}{\partial\lambda}\right| < 2\pi n^2 Q M a_{l+1} \tag{4.29}$$

где Q — верхний предел частных производных $\partial f_s / \partial x_i$ в области G, а M — верхний предел функций $|\psi_{sj}|$. Так как в вышеуказанной области изменения переменных частные производные $\partial R_i^{(l)} / \partial S_j$ имеют, очевидно, некоторый не зависящий от l верхний предел, то из (4.29) вытекает

$$\left|\left\{\frac{\partial\left(R_1^{(l)}, \ldots, R_m^{(l)}\right)}{\partial(S_1, \ldots, S_{i-1}, \lambda, S_{i+1}, \ldots, S_m)}\right\}_{S_j=S_j(\mu,\, \theta\mu),\, \lambda=\theta\mu}\right| < Ra_{l+1} \tag{4.30}$$

где R — некоторое не зависящее от l положительное число.

Формулы (4.25), (4.28) и (4.30) дают окончательно

$$|M_i^{(l+1)}(\mu) - M_i^{(l)}(\mu)| < b_{l+1}, \qquad b_{l+1} = \frac{4R}{\alpha} a_{l+1} |\mu| \tag{4.31}$$

Из (4.31) вытекает, что b_{l+1} / a_{l+1} не зависит от индекса l. Следовательно, можно считать, что b_l / a_l также не зависит от l.

Но тогда и отношения b_{l+1} / b_l и a_{l+1} / a_l также не зависит от l, так как на основании (4.21)

$$\begin{gathered} \frac{a_{l+1}}{a_l} = nPB\left(mM\,\frac{b_l}{a_l} + |\mu|\right) \\ \frac{b_{l+1}}{b_l} = \frac{4R}{\alpha}\,\frac{a_{l+1}|\mu|}{b_l} = \frac{4RnPB}{\alpha}\left(mM + \frac{|\mu|\, a_l}{b_l}\right)|\mu| \end{gathered} \tag{4.32}$$

Так как на основании (4.31) можно считать, что b_l / a_l содержит множитель $|\mu|$, то из (4.32) вытекает, что при достаточно малом $|\mu|$

отношения a_{l+1}/a_l и b_{l+1}/b_l будут меньше единицы. Отсюда непосредственно вытекает, что при достаточно малом $|\mu|$ последовательности $L_s(t, f_1^{(l)}, \ldots, f_n^{(l)})$ и $M_i^{(l)}$ равномерно сходятся. Следовательно, последовательность функций $x_s^{(l)}$ также равномерно сходится к некоторым функциям x_s. Так как все функции $x_s^{(l)}$ периодические, то и функции x_s будут также периодическими. Доказательство, что эти функции удовлетворяют уравнениям (1.1) и, следовательно, определяют искомое периодическое решение, не представляет никаких трудностей и проводятся обычным для метода последовательных приближений приемом.

§ 5. Случай аналитических уравнений. Допустим, что f_s суть аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ в области G. В этом случае, как было показано в [4] для более общих уравнений, искомое периодическое решение как вдали от резонанса, так и вблизи него будет аналитическим относительно μ. Поэтому это решение можно искать в виде рядов

$$x_s = x_s^{(0)}(t) + \mu x_s^{(1)}(t) + \mu^2 x_s^{(2)} + \cdots \tag{5.1}$$

где $x_s^{(l)}$ — неизвестные периодические функции времени. Подставляя эти ряды в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, для определения $x_s^{(l)}$ получим уравнения вида

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt} = a_{s1}x_1^{(l)} + \cdots + a_{sn}x_n^{(l)} + F_s^{(l)} \tag{5.2}$$

где $F_s^{(0)} = 0$, а $F_s^{(l)} (l > 0)$ суть полиномы с периодическими коэффициентами от $x_s^{(0)}, x_s^{(1)}, \ldots, x_s^{(l-1)}$. В частности,

$$F_s^{(1)} = f_s(t, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \tag{5.3}$$

Если $x_s^{(0)}, \ldots, x_s^{(l-1)}$ уже вычислены и вышли периодическими, то $F_s^{(l)}$ будут известными периодическими функциями t. Тогда в нерезонансном случае уравнения (5.2) дадут одно и только одно периодическое решение для $x_s^{(l)}$. В частности, получим $x_s^{(0)} = 0$ и, исходя из этого порождающего решения, последовательно определим $x_s^{(1)}, x_s^{(2)}, \ldots$. В резонансном случае для периодичности $x_s^{(l)}$ необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^{2\pi} F_\alpha^{(l)} \psi_{\alpha i}\, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{5.4}$$

и если это имеет место, то будем иметь

$$x_s^{(l)} = M_1^{(l)} \varphi_{s1} + \cdots + M_m^{(l)} \varphi_{sm} + \overline{x}_s^{(l)}(t)$$

где $\overline{x}_s^{(l)}$ — частное периодическое решение уравнений (5.2) а $M_i^{(l)}$ — произвольные постоянные. При этом

$$x_s^{(0)} = M_1^{(0)} \varphi_{s1} + \cdots + M_m^{(0)} \varphi_{sm} \tag{5.5}$$

и уравнения (5.4) при $l = 1$ дают на основании (5.3) уравнения (3.2) для постоянной $M_i^{(0)}$.

Постоянные $M_i^{(j)}$ $(j > 0)$ определяются из условия периодичности $x_s^{(j+1)}$, т. е. из уравнений (5.4) при $l = j + 1$.

Уравнения (5.4) при $l > 1$, как это показано в общем виде в работе [4], будут обязательно линейными с определителем, отличным от нуля, если только выполняется условие (3.3). Таким образом, для каждого порождающего решения (5.5), в котором $M_i^{(0)}$ являются простым решением уравнений (3.2), будет получена вполне определенная система рядов (5.1), определяющая искомое периодическое решение системы (1.1).

Примечание. Во всем исследовании предполагалось, что порождающая система имеет вид (1.3). Однако все рассуждения останутся в силе, если предположить, что порождающая система имеет более общий вид:

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = a_{s1}x_1^{(0)} + \cdots + a_{sn}x_n^{(0)} + F_s(t) \tag{5.6}$$

где $F_s(t)$ — разлагающиеся в ряды Фурье непрерывные периодические функции времени. При этом в резонансном случае необходимо будет предположить, что эти функции не содержат резонирующих гармоник или, общее, что для них выполняются условия

$$\sum_{s=1}^{n} \int_0^{2\pi} F_s \psi_{si}\, dt = 0$$

Действительно, этот случай приводится к рассмотренному простой заменой переменных $y_s = x_s - x_s^*(t)$, где $x_s^*(t)$ — какое-нибудь частное периодическое решение (единственное в нерезонансном случае) системы (5.6).

Поступила в редакцию
21 IV 1950

Уральский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Колебания квазилинейных систем с неаналитической характеристикой нелинейности. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 1.
2. Лурье А. И. О периодическом решении системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 4.
3. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
4. Малкин И. Г. К теории периодических решений Пуанкаре. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 6.