Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

О ХАРАКТЕРИСТИЧНЫХ ЧИСЛАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Ф. Былов

(Москва)

Настоящая работа посвящена изучению правильных линейных систем дифференциальных уравнений и их характеристичных чисел. Понятие правильности системы и основные определения и теоремы о характеристичных числах систем решений, которые использованы в этой работе, взяты из книги А. М. Ляпунова [1].

§ 1. Постановка задачи и преобразование системы линейных дифференциальных уравнений к виду, удобному для исследования. Пусть дана произвольная система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{(1)} u_r \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

коэффициенты которой $a_{sr}^{(1)}$ суть ограниченные непрерывные функции вещественной переменной t, определенные для всех значений $t > 0$.

О. Перроном была доказана теорема о существовании линейного преобразования $X = QU$, где Q — матрица преобразования, которое обладает всеми свойствами ляпуновского [1] и которое приводит систему (1.1) к треугольному виду [2]

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}^{(1)} x_r \qquad (p_{sr}^{(1)} = 0 \text{ при } s < r) \tag{1.2}$$

Матрицу Q можно при этом считать унитарной.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\frac{dw_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} a_{sr}^{(2)} w_r \tag{1.3}$$

Предположим, что

$$\lim_{t\to\infty} | a_{sr}^{(1)} - a_{sr}^{(2)} | = 0 \qquad (s, r = 1, \ldots, n)$$

Ясно, что если преобразование $X = QU$ приводит систему (1.1) к треугольному виду, то преобразование $Y = QW$ приводит (1.3) к виду

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}^{(2)} y_r \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Легко видеть, что в силу сделанного предположения будем иметь

$$\lim_{t\to\infty} | p_{sr}^{(1)} - p_{sr}^{(2)} | = 0 \qquad (s, r = 1, \ldots, n)$$

В частности,

$$\lim_{t\to\infty} | p_{sr}^{(2)} | = 0 \qquad \text{при } r > s$$

Так как матрица преобразования Q ограничена вместе с матрицами Q^{-1} и Q', то преобразование Q сохраняет характеристичные числа решений систем (1.1) и (1.3) для систем (1.2) и (1.4) и не нарушает ограниченности и непрерывности коэффициентов этих систем [1].

Предположим далее, что система (1.1) была правильной. Ляпуновское преобразование сохраняет правильность системы. Необходимым же и достаточным условием правильности треугольной системы является существование пределов

$$\lambda_s^{(1)} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)} d\tau \tag{1.5}$$

Учитывая, что $|p_{ss}^{(1)} - p_{ss}^{(2)}| \to 0$ при $t \to \infty$, заключаем, что

$$-\lim \frac{1}{t-t_0} \int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}^{(2)} d\tau = \lambda_s^{(1)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Пределы (1.5) являются характеристичными числами нормальной системы решений уравнений (1.2). Равенства (1.6) и стремление к нулю величины $|p_{sr}^{(2)}|$ при $r > s$ позволяют сделать гипотезу о совпадении характеристичных чисел систем (1.2) и (1.4) и, следовательно, систем (1.1) и (1.3).

Таким образом, ставится вопрос о возможной справедливоати следующей теоремы: *если система (1.1) правильная и система (1.3) произвольна, причем выполнено условие* $\lim |a_{sr}^{(1)} - a_{sr}^{(2)}| = 0$ *при* $t \to \infty$, *то характеристичные числа системы* (1.3) *совпадают с характеристичными числами системы* (1.1)

Под совпадением характеристичных чисел понимается следующее.

Пусть характеристичные числа нормальных систем решений уравнений (1.1) и (1.3) соответственно будут

$$\lambda_{i_1}^{(1)} \leqslant \lambda_{i_2}^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{i_n}^{(1)}, \qquad \lambda_{j_1}^{(2)} \leqslant \lambda_{j_2}^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{j_n}^{(2)}$$

Если $\lambda_{i_s}^{(1)} = \lambda_{j_s}^{(2)}$, то говорят, что характеристичные числа систем (1.1) и (1.3) совпадают.

Утверждение теоремы полностью доказано лишь для того случая, когда система (1.1) имеет постоянные коэффициенты [3].

В силу равенств (1.6) для доказательства общего утверждения достаточно установить, что характеристичные числа системы (1.4) определяются пределами (1.6).

Ниже это будет установлено для некоторого частного случая систем уравнений. Предварительно покажем, что верна следующая лемма.

Лемма 1. Пусть дана система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}^{(2)} y_r \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.7}$$

причем $|p_{sr}^{(2)}| \to 0$ при $t \to \infty$ для $r > s$.

Существует такая функция $v(t)$, что преобразование $y_s = v^{s/n} z_s$ приводит (1.7) к новой системе уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}{}^{*} z_r \tag{1.8}$$

причем:

1) $\quad |p_{sr}{}^{*}| \to 0 \quad$ при $t \to \infty$ для $s \neq r$

2) $\quad |p_{ss}{}^{(2)} - p_{ss}{}^{*}| \to 0 \quad$ при $t \to \infty$

3) общие свойства коэффициентов рассматриваемых систем не меняются;

4) характеристичные числа нормальных систем решений уравнений (1.7) и (1.8) совпадают.

Доказательство. Рассмотрим функцию $m(t) = \max |p_{sr}{}^{(2)}|$ для $r > s$. Ясно, что функция $m(t)$ непрерывна, $m(t) \geqslant 0$ и $m(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Определим теперь функцию $u(t) = \max m(T)$ при $T \geqslant t$.

Значение функции u в точке t полагается равным максимальному значению функции $m(t)$ на полуинтервале $[t, \infty)$. Такое максимальное значение достигается в некоторой точке T, так как $m(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Очевидно, что $u(t) \geqslant m(t) \geqslant 0$ и при этом функция $u(t)$ непрерывна и, не возрастая, стремится к нулю при $t \to \infty$. Функция

$$u^{*}(t) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

будет определена для $t \geqslant t_0$ и дает среднее значение функции $u(t)$ на отрезке $[t_0, t]$, причем: 1) имеет место $u^{*}(t) \geqslant u(t) \geqslant m(t)$, так как среднее значение невозрастающей функции на отрезке $[t_0, t]$ не меньше, чем значение самой функции в точке t; 2) функция $u^{*}(t)$ непрерывна, дифференцируема и стремится к нулю при $t \to \infty$; 3) производная

$$u^{*\prime}(t) = -\frac{1}{(t - t_0)^2} \int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau + \frac{1}{t - t_0} u(t)$$

будет непрерывной функцией для всех значений $t > t_0$. Положим

$$\varphi(t) = u^{*}(t) + \frac{1}{t - t_0} \tag{1.10}$$

Очевидно, что $\varphi(t)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, при этом $\varphi(t) > m(t) \geqslant 0$; кроме того $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$

Будем обозначать характеристичное число функции $\varphi(t)$ через $\chi(\varphi)$. Нетрудно показать, что любая степень $\varphi^{\alpha}(t)$ функции $\varphi(t)$ будет иметь своим характеристичным числом нуль. Для $\alpha = 0$ это очевидно. Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим функции $\varphi^{\alpha}(t)$ и $\varphi^{-\alpha}(t)$. Имеем

$$\varphi^{-\alpha}(t) < (t - t_0)^{\alpha}; \qquad \varphi^{\alpha}(t) \to 0, \quad \varphi^{-\alpha}(t) \to \infty, \quad \text{при } t \to \infty.$$

Отсюда заключаем, что

$$\chi(\varphi^{\alpha}) \geqslant 0, \qquad \chi(\varphi^{-\alpha}) \geqslant 0$$

Учитывая, что $\chi(\varphi^{\alpha}) + \chi(\varphi^{-\alpha}) \leqslant 0$, будем иметь

$$\chi(\varphi^{\alpha}) = \chi(\varphi^{-\alpha}) = 0 \tag{1.11}$$

Таким же образом доказывается утверждение и для $\alpha < 0$.

Из построения функции $\varphi(t)$ следует, что $\varphi(t) > m(t) \geqslant 0$. Отсюда

$$0 \leqslant \frac{m(t)}{\varphi(t)} < 1; \qquad \frac{m(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} = \frac{m(t)}{\varphi(t)} \sqrt{\varphi(t)} < \sqrt{\varphi(t)} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Из последнего неравенства имеем

$$\frac{m(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} \to 0; \qquad \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}} \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty \tag{1.12}$$

Положим

$$v(t) = \frac{1}{\sqrt{\varphi(t)}} \qquad \left(\varphi(t) = \frac{1}{t - t_0}\left[\int_{t_0}^{t} u(\tau)\, d\tau + 1\right]\right) \tag{1.13}$$

Из (1.12) и определения функции v следует, что

$$\begin{aligned} v^{\alpha}(t) &\to \infty \quad \text{при } t \to \infty, \text{ если } \alpha > 0 \\ v^{\alpha}(t) &\to 0 \quad \text{при } t \to \infty, \text{ если } \alpha < 0 \\ m(t)\, v^{\alpha}(t) &\to 0 \quad \text{при } t \to \infty, \text{ если } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{aligned}$$

В силу сделанного замечания о характеристичном числе любой степени $\varphi^{\alpha}(t)$ с действительным показателем заключаем, что и любая степень функции $v(t)$ будет обладать нулевым характеристичным числом.

Сделаем преобразование:

$$y_s = v^{\frac{s}{n}} z_s, \quad \text{или} \quad y_s v^{-\frac{s}{n}} = z_s \tag{1.14}$$

Из теоремы о характеристичном числе произведения функций имеем

$$\chi(y_s) \geqslant \chi(v^{\frac{s}{n}}) + \chi(z_s) = \chi(z_s), \qquad \chi(z_s) \geqslant \chi(v^{-\frac{s}{n}}) + \chi(y_s) = \chi(y_s)$$

Сопоставление неравенств дает $\chi(y_s) = \chi(z_s)$, т. е. преобразование (1.14) не меняет характеристичных чисел функций. Преобразование (1.14) приводит исходную систему (1.7) к требуемому виду. Действительно,

$$\frac{dy_s}{dt} = \frac{dz_s}{dt} v^{\frac{s}{n}} + \frac{s}{n} v^{\frac{s}{n} - 1} v' z_s = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}^{(2)} v^{\frac{r}{n}} z_r$$

Отсюда

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{(s \neq r)} p_{sr}^{(2)} v^{\frac{r-s}{n}} z_r + \left(p_{ss}^{(2)} - \frac{s}{n} \frac{v'}{v}\right) z_s \tag{1.15}$$

Введем обозначения:

$$p_{sr}^{*} = p_{sr}^{(2)} v^{\frac{r-s}{n}} \quad (s \neq r), \qquad p_{ss}^{*} = p_{ss}^{(2)} - \frac{s}{n} \frac{v'}{v} \qquad (s, r = 1, \ldots, n),$$

Коэффициенты p_{sr}^{*} преобразованной системы будут непрерывными функциями t на любом полуинтервале $[T, \infty)$, если $T > t_0$.

Так как $p_{sr}^{(2)}$ — ограниченные функции t, то

$$p_{sr}^{(2)} | v^{\frac{r-s}{n}} \to 0 \quad (r < s), \qquad | p_{sr}^{(2)} | v^{\frac{r-s}{n}} < m(t)\, v \to 0 \quad (r > s) \quad \text{при} \quad t \to \infty$$

Остается показать ограниченность коэффициентов p_{ss}^*. Вычисления дают при $t \to \infty$

$$\frac{v'}{v} = (\ln v)' = -\frac{1}{2}(\ln \varphi)' = -\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)\,d\tau + \frac{1}{t-t_0}\right)\right]' \to 0$$

Это и доказывает ограниченность p_{ss}^* на полуинтервале $[T, \infty)$ при $T > t_0$. Из того, что $v'/v \to 0$, в частности, следует

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} p_{ss}^{(2)}\,d\tau = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t-T}\int\limits_{T}^{t} p_{ss}^*\,d\tau$$

Покажем что характеристичные числа систем (1.15) и (1.7) совпадают. Рассмотрим матрицу Y фундаментальной системы решений уравнений (1.7) и матрицу V, определенные так

$$Y = \begin{Vmatrix} y_{11} & y_{12} \ldots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} \ldots & y_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n1} & y_{n2} \ldots & y_{nn} \end{Vmatrix} \qquad V = \begin{Vmatrix} v^{\frac{1}{n}} & 0 \ldots & 0 \\ 0 & v^{\frac{2}{n}} \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots & v \end{Vmatrix}$$

Будем считать, что каждый столбец матрицы Y есть одно из независимых решений уравнений (1.7). При любом t детерминант $D(Y) \neq 0$. Матрица $V^{-1}Y$, дает фундаментальную систему решений уравнений (1.15), так как из того, что $D(V) \neq 0$, $D(Y) \neq 0$ при $t > T$, следует

$$D(V^{-1}Y) \neq 0$$

Нетрудно показать, что, и обратно, по всякой фундаментальной системе решений уравнений (1.15) можно построить фундаментальную систему решений уравнений (1.7).

Покажем, что нормальной системе решений уравнений (1.7) соответствует нормальная же система решений $V^{-1}Y$ уравнений (1.15).

Предположим, что это не так. Но система решений не будет нормальной в том и только в том случае, когда сумма характеристичных чисел входящих в нее решений не достигает максимального значения, определенного для сумм характеристичных чисел произвольных фундаментальных систем решений. Отсюда следует, что сумма характеристичных чисел для системы решений не достигает своего максимального значения, т. е. существует система решений Z уравнений (1.15), сумма характеристичных чисел которой строго больше, чем такая же сумма для $V^{-1}Y$. Так как преобразование V сохраняет характеристичные числа каждого из решений, то VZ является фундаментальной системой решений уравнений (1.7) с суммой характеристичных чисел большей, чем для системы решений Y. Полученное заключение противоречиво с предположенной нормальностью Y. Противоречия не будет только в том случае, когда нормальной системе решений Y уравнений (1.7) соответствует нормальная же система решений $V^{-1}Y$ уравнений (1.15).

§ 2. Определение характеристичных чисел линейных систем дифференциальных уравнений в некотором частном случае. Докажем теорему.

Теорема 1. Пусть дана система линейных уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}^{(2)} y_r \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

с действительными коэффициентами $p_{sr}^{(2)}$, для которых выполняются следующие условия:

1. Для $r > s$

$$|p_{sr}^{(2)}| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty \tag{2.2}$$

2. Существуют пределы

$$-\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-T} \int_T^t p_{ss}^{(2)} d\tau = \lambda_s^{(1)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

3. Для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $A > 0$, что как только $T_2 - T_1 \geqslant A$, то

$$\left| \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} p_{ss}^{(2)} d\tau + \lambda_s^{(1)} \right| < \varepsilon \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

Тогда характеристичные числа нормальной системы решений уравнений (2.1) определяются значениями пределов (2.3).

Условие (2.4) теоремы нуждается в пояснении. Ясно, что предел (2.3) не зависит от выбора нижнего предела интеграции. Следовательно, для любого фиксированного T_1 можно найти такое значение $T(T_1)$, что для произвольного $T_2 > T(T_1)$ будет выполнено условие (2.4).

Таким образом, для выполнения условия (2.4) достаточно, чтобы $T = T(T_1)$ была ограниченной функцией.

Замечание. Условия (2.4) будут выполнены, если вместо $p_{ss}^{(2)}$ в них подставить p_{ss}^* такие, что $|p_{ss}^{(2)} - p_{ss}^*| \to 0$ при $t \to \infty$. Величина константы A при этом, конечно, может измениться.

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 предыдущего параграфа существует преобразование $Y = VZ$ такое, что (2.1) переходит в систему

$$\frac{dz_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr}^* z_r \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

для коэффициентов которой будут выполнены условия

$$|p_{sr}^*| \to 0 \quad (s \neq r), \qquad |p_{ss}^{(2)} - p_{ss}^*| \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-T} \int_T^t p_{ss}^* d\tau = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-T} \int_T^t p_{ss}^{(2)} d\tau \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

при этом характеристичные числа систем (2.1) и (2.5) совпадают.

Предварительно покажем, что систему (2.5) можно привести некоторым ляпуновским преобразованием к такому виду, что диагональные коэффициенты будут отличаться от соответствующих им значений $-\lambda_s^{(1)}$ меньше, чем на любое наперед заданное $\delta > 0$. Зададим $\delta > 0$ и подберем A согласно условию (2.4) так, чтобы при $T_2 - T_1 \geqslant A$ выполнялось

$$\left| \frac{1}{T_2 - T_1} \int\limits_{T_1}^{T_2} p_{ss}^*\, d\tau + \lambda_s^{(1)} \right| < \delta$$

Разобьем полуинтервал $[T, \infty)$ на отрезки величины A точками

$$T_1 = T, \quad T_2 = T + A, \ \cdots, \ T_{k+1} = T + kA$$

Тогда

$$\left| \int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} p_{ss}^*\, d\tau + \lambda_s^{(1)} (T_{k+1} - T_k) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} (p_{ss}^* + \lambda_s^{(1)})\, d\tau \right| < \delta (T_{k+1} - T_k) = \int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} \delta d\tau$$

В таком случае

$$\int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} (p_{ss}^* + \lambda_s^{(1)} - \delta)\, d\tau < 0, \qquad \int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} (p_{ss}^* + \lambda_s^{(1)} + \delta)\, d\tau > 0 \tag{2.7}$$

Отсюда следует, что можно найти такое $\delta_k^{(s)}$, что

$$|\delta_k^{(s)}| < \delta, \qquad \int\limits_{T_k}^{T_{k+1}} (p_{ss}^* + \lambda_s^{(1)} + \delta_k^{(s)})\, d\tau = 0$$

Определим функцию $\psi_{ss} = \lambda_s^{(1)} + \delta_k^{(s)}$ для $T_k < t \leqslant T_{k+1}$.

Функция ψ_{ss} ограничена и может иметь разрывы только в точках T_k, следовательно, существует интеграл

$$\int\limits_{T_1}^{t} \psi_{ss}\, d\tau \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Далее, при $T_m < t \leqslant T_{m+1}$ и произвольном m имеем

$$\left| \int\limits_{T_1}^{t} (p_{ss}^* + \psi_{ss}) d\tau \right| = \left| \sum_{k=2}^{m} \int\limits_{T_{k-1}}^{T_k} (p_{ss}^* + \psi_{ss})\, d\tau + \int\limits_{T_m}^{t} (p_{ss}^* + \psi_{ss})\, dt \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{T_m}^{t} (p_{ss}^* + \psi_{ss}) d\tau \right| < A (C + |\lambda_s^{(1)}| + \delta) \tag{2.8}$$

Здесь C — константа, ограничивающая модули коэффициентов системы (2.5). Изменим ψ_{ss} до непрерывности на интервалах Δ_k, содержащих точки T_k, так, чтобы сумма длин этих интервалов представляла сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Delta_k = p < \infty$$

Например, можно положить на интервалах Δ_k функцию линейной, принимающей в концах интервала Δ_k значения $\delta_k^{(s)}$ и $\delta_{k+1}^{(s)}$.

Обозначим полученную функцию через ψ_{ss}^*. Ясно, что

$$\left|\int_{T_1}^{t} (\psi_{ss} - \psi_{ss}^*)\, d\tau\right| < \delta \sum_{h=1}^{\infty} \Delta_h = \delta p \tag{2.9}$$

Сопоставляя (2.8) и (2.9), заключаем, что

$$\left|\int_{T_1}^{t} (p_{ss}^* + \psi_{ss}^*)\, d\tau\right| < M \tag{2.10}$$

где M — некоторая константа, не зависящая от t.

Сделаем теперь преобразование системы (2.5) по формулам

$$z_s = v_s^{(1)} \exp \int_{T_1}^{t} (p_{ss}^* + \psi_{ss}^*)\, d\tau$$

Матрица преобразования и обратная к ней в силу предыдущих оценок ограничены вместе с производной, т. е. это преобразование является ляпуновским. Система (2.5) при этом перейдет в систему

$$\frac{dv_s^{(1)}}{dt} = \sum_{\substack{r=1 \\ (r=s)}}^{n} \psi_{sr}^* v_r^{(1)} - \psi_{ss}^* v_s^{(1)} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.11}$$

где

$$\psi_{sr}^* = p_{sr}^* \left(\exp \int_{T_1}^{t} (p_{rr}^* + \psi_{rr}^*)\, d\tau\right)\left(\exp - \int_{T_1}^{t} (p_{ss}^* + \psi_{ss}^*)\, d\tau\right) \tag{2.12}$$

для $s \neq r$, а ψ_{ss}^* имеют прежние значения.

Так как $|p_{sr}^*| \to 0$, то из (2.10) и (2.12) для $s \neq r$ видно, что $|\psi_{sr}^*| \to 0$ при $t \to \infty$. Коэффициенты ψ_{ss}^* имеют вид:

$$\psi_{ss}^* = \lambda_s^{(1)} + \delta_s(t) \qquad (|\delta_s(t)| < \delta)$$

Наряду с системой (2.11) рассмотрим систему

$$\frac{dv_s^{(2)}}{dt} = -\lambda_s^{(1)} v_s^{(2)} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

характеристичные числа которой суть $\lambda_s^{(1)}$.

По теореме об устойчивости характеристичных чисел для систем с постоянными коэффициентами [3] заключаем в силу предположенной малости δ, что характеристичные числа системы (2.11) мало отличаются от $\lambda_s^{(1)}$. Точнее говоря, δ могло быть выбрано таким, что характеристичные числа системы (2.11) и, следовательно, систем (2.5) и (2.1) отличались бы от $\lambda_s^{(1)}$ на любую малую наперед заданную величину. Отсюда следует, что характеристичные числа системы (2.1) суть $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(1)}$.

Теорема 1 полностью доказана. Аналогичные рассуждения можно провести с небольшими изменениями и для того случая, когда исходная система уравнений (2.1) имеет комплексные коэффициенты. Характеристичные числа в этом случае определятся пределами

$$\lambda_s = -\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t - T_1} \int_{T_1}^{t} \operatorname{Re}(p_{ss}^{(2)})\, d\tau$$

§ 3. Совпадение характеристичных чисел линейных систем. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть для произвольного $\varepsilon_0 > 0$ и любого решения $\{u_1, \ldots, u_n\}$ системы (1.1) с начальными данными $u_s(t_0) = u_s^0$, по модулю меньшими чем единица, существует константа $C(\varepsilon_0)$, не зависящая от t_0 и зависящая только от ε_0, такая, что выполняются неравенства

$$|u_s| < C(\varepsilon_0) \exp[(-\lambda + \varepsilon_0)(t - t_0)] \qquad (3.1)$$

где λ — характеристичное число решения $\{u_1, \ldots, u_n\}$ и

$$\exp \int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} a_{ss}^{(1)}\, d\tau > C(\varepsilon_0) \exp\left[\left(-\sum_{s=1}^{n} \lambda_s^{(1)} - \varepsilon_0\right)(t - t_0)\right] \qquad (3.2)$$

где $\lambda_s^{(1)}$ — характеристичные числа нормальной системы решений уравнений (1.1). Тогда характеристичные числа систем (1.1) и (1.3) совпадают.

Доказательство. Пусть характеристичные числа систем (1.1) и (1.3) соответственно будут

$$\lambda_1^{(1)} \leqslant \lambda_2^{(1)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^{(1)}, \qquad \lambda_1^{(2)} \leqslant \lambda_2^{(2)} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n^{(2)}$$

Проведем преобразования $X = QU$ и $Y = QW$ в системах (1.1) и (1.3). Получим системы (1.2) и (1.4). Очевидно, что для доказательства теоремы достаточно установить, что коэффициенты $p_{ss}^{(2)}$ системы (1.4) удовлетворяют условию (2.4) теоремы 1. В силу сделанного замечания к условиям теоремы 1 для этого в свою очередь достаточно показать, что коэффициенты $p_{ss}^{(1)}$ удовлетворяют указанному условию.

Преобразование Q можно считать таким, что для коэффициентов системы (1.3) выполнены неравенства

$$\lambda_s^{(1)} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)}\, d\tau \leqslant -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^{t} p_{rr}^{(1)}\, d\tau = \lambda_r^{(1)} \qquad (3.3)$$

$$(r > s;\ s, r = 1, \ldots, n)$$

Этого можно добиться соответствующей перестановкой столбцов в матрице фундаментальной системы решений уравнений (1.1), с помощью которой строится матрица преобразования [2].

Покажем, что при выполнении неравенств (3.3) фундаментальная система решений с единичной матрицей для начальных значений при $t = t_0$ будет нормальной. Нетрудно видеть, что такая фундаментальная система определится по формулам ($s = 1, \ldots, n$ — номер решения):

$$x_{ss} = \exp \int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)}\, d\tau \qquad (r = s)$$

$$x_{rs} = 0 \qquad (r < s) \qquad (3.4)$$

$$x_r = \left(\exp \int_{t_0}^{t} p_{rr}^{(1)}\, d\tau\right) \int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{r-1} p_{ri} x_{is} \left(\exp - \int_{t_0}^{t} p_{rr}^{(1)} d\tau\right) dt \qquad (r > s)$$

По этим формулам x_{rs} определяются рекуррентно с помощью нахождения квадратур от известных уже функций.

Для доказательства нормальности этой системы решений достаточно показать, что ее характеристичные числа суть $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots, \lambda_n^{(1)}$.

Пусть λ_s^* — характеристичное число решения $\{x_{1s}, \ldots, x_{ns}\}$. Так как $\chi(x_{ss}) = \lambda_s^{(1)}$, то

$$\lambda_s^* \leqslant \lambda_s^{(1)} \tag{3.5}$$

Покажем, что

$$\chi(x_{rs}) \geqslant \lambda_s^{(1)} \qquad \text{для } r = 1, \ldots, n$$

Доказательство проведем методом индукции. Для $r \leqslant s$ утверждение очевидно. Предположим, что для $s \leqslant r < k$ имеет место $\chi(x_{rs}) \geqslant \lambda_s^{(1)}$.

Возможны два случая:

$$\chi\Big(\sum_{i=1}^{k-1} p_{ki}^{(1)} x_{is} \exp - \int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)}\, d\tau\Big) \leqslant 0 \tag{3.6}$$

$$\chi\Big(\sum_{i=1}^{k-1} p_{ki}^{(1)} x_{is} \exp - \int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)} d\tau\Big) > 0 \tag{3.7}$$

В первом случае (3.6) имеем на основании теоремы о характеристичном числе интеграла

$$\chi(x_{ks}) \geqslant \chi\Big(\exp\int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)}\, d\tau\Big) + \chi\Big(\sum_{i=1}^{k-1} p_{ki}^{(1)} x_{is}\Big) +$$

$$+ \chi\Big(\exp - \int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)} d\tau\Big) \geqslant \lambda_k^{(1)} + \lambda_s^{(1)} - \lambda_k^{(1)} = \lambda_s^{(1)} \tag{3.8}$$

Во втором случае (3.7) выражение для x_{ks} представим в таком виде:

$$x_{ks} = c_0 \exp\int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)}\, d\tau - \Big(\exp\int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)} d\tau\Big) \int_{t}^{\infty} \sum_{i=1}^{k-1} p_{ki}^{(1)} x_{is} \Big(\exp - \int_{t_0}^{t} p_{kk}^{(1)}\, d\tau\Big)\, dt \tag{3.9}$$

где c_0 таково, что $x_{ks}(t_0) = 0$.

В силу неравенства (3.3) характеристичное число первого слагаемого в (3.9) не меньше, чем $\lambda_s^{(1)}$. Характеристичное число второго слагаемого тоже не меньше $\lambda_s^{(1)}$, что доказывается с помощью неравенства, аналогичного (3.8).

Таким образом, в первом и втором случаях $\chi(x_{ks}) \geqslant \lambda_s^{(1)}$. Проводя индукцию по k, будем иметь

$$\chi(x_{rs}) \geqslant \lambda_s^{(1)} \qquad (r = 1, \ldots, n)$$

В таком случае $\lambda_s^* \geqslant \lambda_s^{(1)}$, что вместе с (3.5) дает

$$\lambda_s^* = \lambda_s^{(1)} \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Замечание. При доказательстве существенно использовано условие (3.3). Для произвольных систем уравнений треугольного вида фундаментальная система решений с единичной матрицей для начальных значений не будет, вообще говоря, нормальной.

Рассмотрим фундаментальную систему решений $U(t)$ уравнений (1.1) с матрицей начальных значений, определяемой равенством

$$U(t_0) = Q^*(t_0) \tag{3.10}$$

где $Q^*(t_0)$ — матрица, полученная транспонированием матрицы $Q(t_0)$.

Легко видеть, что

$$QU = X, \qquad X = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} \ldots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} \ldots x_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{n1} & x_{n2} \ldots x_{nn} \end{Vmatrix} \tag{3.11}$$

где x_{rs} определены по формулам (3.4). Действительно, при $t = t_0$ имеем

$$Q(t_0)U(t_0) = Q(t_0)Q^*(t_0) = E = X(t_0)$$

Отсюда в силу единственности решения следует справедливость равенства (3.11) при любом t.

Из унитарности матрицы Q следует, что модули всех ее элементов $|q_{sr}|$ меньше единицы. С учетом равенства (3.10) это дает возможность использовать условия теоремы 2 для оценки модуля функций x_{rs}. Имеем

$$|x_{rs}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |q_{ri}|\,|u_{is}| < C(\varepsilon_0)\, n \exp[(-\lambda_s^{(1)} + \varepsilon_0)(t - t_0)] \tag{3.12}$$

Отсюда, в частности, следует оценка

$$\exp\int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)} d\tau < C(\varepsilon_0)\, n \exp[(-\lambda_s^{(1)} + \varepsilon_0)(t - t_0)] \tag{3.13}$$

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz_s}{dt} = -\sum_{r=1}^{n} p_{rs}^{(1)} z_r$$

присоединенную к системе (1.2). Известно, что матрица $Z = X^{-1}$ дает для нее нормальную систему решений. Из вида матрицы X следует, что элементами z_{ss} матрицы Z будут функции

$$z_{ss} = \exp - \int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)}\, d\tau$$

Из (3.11) и равенств $D(Q) = 1$ и $D[U(t_0)] = 1$ имеем

$$D(X) = D(Q)\,D(U) = \exp\int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} a_{ss}^{(1)}\, d\tau \tag{3.14}$$

Используя оценки (3.12), равенство (3.14) и условие (3.2), получим

$$|z_{sr}| = \left| \frac{D_{rs}(X)}{D(X)} \right| =$$

$$= K(\varepsilon_0) \exp\Big[\sum_{(j \neq s)} (-\lambda_j + \varepsilon_0)(t - t_0)\Big] \exp\Big[\Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j + \varepsilon_0\Big)(t - t_0)\Big] =$$

$$= K(\varepsilon_0) \exp[(\lambda_s^{(1)} + n\varepsilon_0(t - t_0)]$$

где через $D_{rs}(X)$ обозначено алгебраическое дополнение элемента x_{rs} матрицы X, а $K(\varepsilon_0)$ — не зависящая от t_0 константа. В частности, при $r=s$ будем иметь

$$\exp - \int_{t_0} p_{ss}^{(1)} d\tau < K(\varepsilon_0) \exp\left[(\lambda_s^{(1)} + n\varepsilon_0)(t-t_0)\right] \tag{3.15}$$

Логарифмируя неравенства (3.13) и (3.15) и объединяя их, имеем

$$\left| \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)} d\tau + \lambda_s^{(1)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\ln B(\varepsilon_0)}{t-t_0}$$

где

$$\varepsilon = 2\varepsilon_0 n, \qquad B(\varepsilon_0) = \max\{K(\varepsilon_0), C(\varepsilon_0), 1\}$$

При достаточно большом A и $t-t_0 \geqslant A$

$$\frac{\ln B(\varepsilon_0)}{t-t_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Таким образом, доказано, что при выполнении условий теоремы 2 для коэффициентов $p_{ss}^{(1)}$ системы (1.2) выполняются условия (2.4) теоремы 1. Так как $|p_{ss}^{(1)} - p_{ss}^{(2)}| \to 0$ при $t \to \infty$, то условия (2.4) выполнены и для системы уравнений (1.4). Отсюда следует, что характеристичные числа системы (1.4) найдутся как пределы

$$\lambda_s^{(2)} = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(2)} d\tau = -\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} p_{ss}^{(1)} d\tau = \lambda_s^{(1)}$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

Доказательство теоремы завершено.

Замечание 1. Можно доказать, что при выполнении условий теоремы характеристичные числа системы (1.1) будут устойчивы.

Метод доказательства мало отличается от изложенного, но связан с более громоздкими оценками и поэтому здесь не приводится.

Замечание 2. Условия, аналогичные высказанным в теореме 2, были использованы К. П. Персидским[4] для системы первого приближения уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} a_{sr} x_r + X_s(x_1, \ldots, x_n, t)$$

при доказательстве равномерной устойчивости тривиального решения.

Поступила в редакцию
21 IV 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. ОНТИ. 1935.
2. Perron O. Über eine Matrixtransformation. Math. Zeit. 1930. Bd. 32.
Персидский К. П. О характеристичных числах дифференциальных уравнений. Известия Казахской Академии наук. 1947. Вып. 1.
Персидский К. П. Об устойчивости по первому приближению. Бюллетень Второго всесоюзного съезда математиков в Ленинграде. Июнь 1934.