Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБЗОРЫ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД[1]

М. М. Фридман

(Саратов)

В настоящей работе дается обзор исследований по математической теории упругости анизотропного тела, опубликованных в Советском Союзе. Обзор охватывает следующие проблемы: плоская задача; обобщенная плоская деформация; кручение и изгиб призматических стержней; осесимметричная деформация тел вращения. Вопросы изгиба анизотропных плит освещены в обзорной работе Г. Ю. Джанелидзе [13]. Проблемы устойчивости, как нам представляется, требуют самостоятельного обзора и в нашей статье не рассматриваются. Однако мы сочли уместным привести библиографию и по этим вопросам. Обзор состоит из трех частей.

В первой части дается обзор работ, в которых даны постановка и доказательство существования и единственности решения плоской задачи теории упругости анизотропных сред.

Во второй части рассмотрены эффективные методы решения плоской задачи теории упругости анизотропных тел.

Третья часть работы посвящена задаче об обобщенной плоской деформации, кручению и изгибу призматических стержней и осесимметричной деформации тел вращения.

---

[1] За последние два десятилетия советскими учеными разработаны многие основные проблемы математической теории упругости анизотропных тел. Эти работы являются дальнейшим обобщением и распространением исследований Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили по плоской задаче в теории упругости изотропного тела. Исследования Г. В. Колосова и Н. И. Мусхелишвили хорошо известны в научной литературе за рубежом. Многие работы советских ученых по теории упругости анизотропных тел реферировались в основных реферативных журналах.

Однако за последние годы ряд иностранных авторов, преимущественно в Англии, повторяет результаты, полученные ранее советскими учеными, и выдают их за собственные.

Например, A. E. Green, C. J. Taylor, A. S. Stevenson, S. Holgate (Proceedings of the Roy. Soc., London. ser. A. vol. 173, pp. 162, 173, 1939; vol. 184. N 997, N 998, 1945; vol. 185, N 1000, 1946) воспроизводят результаты С. Г. Лехницкого, получая их тем же методом Колосова-Мусхелишвили, но приписывая этот метод одному из своих коллег. Для закрепления приобретенных таким образом результатов указанные авторы цитируют друг друга.

Подобное «научное направление», появившееся на страницах старинного известного английского издания, не служит его украшением.

Настоящий обзор имеет своей основной целью дать молодым ученым представление о работах, опубликованных в советской научной литературе по теории упругости анизотропных тел.

От редакции

§ 1. Плоская задача математической теории упругости анизотропных сред

1. Основные уравнения теории упругости анизотропных сред. Основными уравнениями теории упругости анизотропного тела являются уравнения равновесия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}+X=0\\
&\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\
&\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0
\end{aligned}\tag{1.1}$$

и уравнения обобщенного закона Гука

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=a_{11}\sigma_x+a_{12}\sigma_y+a_{13}\sigma_z+a_{14}\tau_{yz}+a_{15}\tau_{xz}+a_{16}\tau_{xy}\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=a_{21}\sigma_x+a_{22}\sigma_y+a_{23}\sigma_z+a_{24}\tau_{yz}+a_{25}\tau_{xz}+a_{26}\tau_{xy}\\
\frac{\partial w}{\partial z}&=a_{31}\sigma_x+a_{32}\sigma_y+a_{33}\sigma_z+a_{34}\tau_{yz}+a_{35}\tau_{xz}+a_{36}\tau_{xy}\\
\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}&=a_{41}\sigma_x+a_{42}\sigma_y+a_{43}\sigma_z+a_{41}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz}+a_{46}\tau_{xy}\\
\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}&=a_{51}\sigma_x+a_{52}\sigma_y+a_{53}\sigma_z+a_{54}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz}+a_{56}\tau_{xy}\\
\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}&=a_{61}\sigma_x+a_{62}\sigma_y+a_{63}\sigma_z+a_{64}\tau_{yz}+a_{65}\tau_{xz}+a_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Для однородного прямолинейно-анизотропного тела коэффициенты a_{kj}, характеризующие анизотропию среды, являются постоянными. Коэффициенты a_{kj} образуют в шестимерном пространстве симметричный тензор второго порядка и, следовательно, при преобразовании координат преобразуются по известным законам. В общем случае среди 36 коэффициентов a_{kj} число независимых равно 21. Если в каждой точке однородного упругого тела существует плоскость упругой симметрии, параллельная, например, плоскости xy, то

$$a_{14}=a_{15}=a_{24}=a_{25}=a_{34}=a_{35}=a_{46}=a_{56}=0 \tag{1.3}$$

и, следовательно, число упругух постоянных равно 13. Если через каждую точку однородного упругого тела проходят три взаимно ортогональные плоскости упругой симметрии, перпендикулярные соответственно осям x, y и z, то, кроме соотношений (1.3), имеют место равенства

$$a_{16}=a_{26}=a_{36}=a_{45}=0 \tag{1.5}$$

и, следовательно, число независимых упругих постоянных равно 9. Если, наконец, через каждую точку однородного упругого тела проходит плоскость, параллельная плоскости xy, в которой все направления являются эквивалентными в смысле упругих свойств, то к соотношениям (1.3) и (1.4) следует присоединить равенства

$$a_{23}=a_{13},\qquad a_{22}=a_{11},\qquad a_{55}=a_{44},\qquad a_{66}=2(a_{11}-a_{12}) \tag{1.4}$$

и, следовательно, для трансверсально-изотропного тела число упругих постоянных равно 5.

Аналитическое исследование обобщенного закона Гука дано в работах П. Бехтерева [6, 7]. Числовые значения коэффициентов a_{kj} для некоторых материалов указаны в работах [5, 12, 53, 54, 55, 56, 66, 76]. Отметим, в частности, обзорную статью А. Н. Митинского [54], в которой обсуждается вопрос об упругих постоянных древесины.

2. Плоская деформация. Задачу о плоской деформации бесконечного однородного анизотропного цилиндра впервые исследовал С. Г. Лехницкий [20, 21, 24].

Рассмотрим бесконечный однородный анизотропный цилиндр и предположим, что, во-первых, в каждой точке цилиндра существует плоскость упругой симметрии, нормальная к образующей, и, во-вторых, внешние усилия, поверхностные и объемные, приложенные к цилиндру, не имеют составляющей в направлении образующей и не меняются вдоль образующей. При сделанных предположениях однородный анизотропный цилиндр будет находиться в состоянии плоской деформации: нормальные сечения цилиндра при деформации не будут искривляться и не будут поворачиваться одно относительно другого. Примем какую-нибудь плоскость поперечного сечения цилиндра за плоскость xy, направив ось z параллельно образующей. Далее, для простоты будем считать, что объемные силы отсутствуют. Тогда

$$u = u(x,\ y), \qquad v = v(x,\ y), \qquad w = 0$$

$$\tau_{yz} = 0, \qquad \tau_{xz} = 0, \qquad \sigma_z = -\frac{a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{36}\tau_{xy}}{a_{33}}$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \beta_{11}\sigma_x + \beta_{12}\sigma_y + \beta_{16}\tau_{xy} \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \beta_{21}\sigma_x + \beta_{22}\sigma_y + \beta_{26}\tau_{xy} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} &= \beta_{16}\sigma_x + \beta_{26}\sigma_y + \beta_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь $\beta_{kj} = a_{kj} - a_{k3}a_{3j} / a_{33}$ $(k,\ j=1,\ 2,\ 6)$. Функция напряжений F $(x,\ y)$ удовлетворяет уравнению в частных производных четвертого порядка

$$\beta_{22}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66})\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16}\frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \tag{1.8}$$

Характеристическое уравнение

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0 \tag{1.9}$$

не имеет вещественных корней. Пусть μ_1, μ_2, $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_2$ — корни характеристического уравнения (1.9). Тогда, если корни μ_1, μ_2, μ_1 и μ_2 различны, то общее решение уравнения (1.8) может быть представлено в виде

$$F(x,\ y) = 2\,\mathrm{Re}\,[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \tag{1.10}$$

Здесь $F_1(z)$ и $F_2(z_2)$ — произвольные функции комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1 = x + \mu_1 y$, и $z_2 = x_2 + iy_2 = x + \mu_2 y$, аналитические в областях S_1 и S_2. Если корни характеристического уравнения (1.9) попарно равны, то уравнение (1.9) легко приводится к бигармоническому, общее решение которого известно. В дальнейшем предполагается, что корни уравнения (1.9) различны.

Для компонент тензора напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} и компонент вектора перемещений u и v имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mathrm{Re}\,[\mu_1^2\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\Phi_2'(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\mathrm{Re}\,[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1'(z_1) + \mu_2\Phi_2'(z_2)] \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} u &= 2\mathrm{Re}\,[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)] - \omega y + u_0 \\ v &= 2\mathrm{Re}\,[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)] + \omega x + v_0 \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь

$$\Phi_k(z_k) = \frac{dF_k(z_k)}{dz_k}, \qquad \begin{array}{l} p_k = \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k \\ q_k = \beta_{12}\mu_k - \beta_{26} + \beta_{22} / \mu_k \end{array} \qquad (k = 1,\ 2)$$

При заданных на поверхности цилиндра внешних усилиях функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ должны удовлетворять следующим краевым условиям:

$$2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2)] = f_1 + c_1, \quad 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2)] = f_2 + c_2 \quad (1.13)$$

где f_1 и f_2 — известные функции, c_1 и c_2 — комплексные постоянные. Если на поверхности цилиндра заданы перемещения, то функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ удовлетворяют таким краевым условиям:

$$2\,\mathrm{Re}\,[p_1\Phi_1(z_1) + p_2\Phi_2(z_2)] = g_1, \quad 2\,\mathrm{Re}\,[q_1\Phi_1(z_1) + q_2\Phi_2(z_2)] = g_2 \quad (1.14)$$

Здесь g_1 и g_2 — заданные функции.

Если область S поперечного сечения цилиндра односвязная, то функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ — однозначные аналитические функции, соответственно в областях S_1 и S_2. Если область S многосвязна, то функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, вообще говоря, многозначные аналитические функции соответственно в областях S_1 и S_2. Характер этой многозначности вполне определяется условиями однозначности компонент тензора напряжений и вектора перемещений в области S.

3. Обобщенное плоское напряженное состояние. Задача о плоской деформации однородного анизотропного цилиндра математически эквивалентна задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии анизотропной пластинки, также впервые исследованной С. Г. Лехницким [20,21,45].

Рассмотрим тонкую однородную анизотропную пластинку постоянной толщины. Срединную плоскость пластинки примем за плоскость xy, направив ось z нормально плоскости xy. Предположим, что, во-первых, в каждой точке пластинки существует плоскость упругой симметрии, параллельная срединной плоскости, и, во-вторых, пластинка деформируется усилиями, приложенными вдоль ее боковой поверхности; эти усилия расположены в плоскостях, параллельных плоскости xy, распределены симметрично относительно срединной плоскости и мало изменяются по толщине пластинки. При сделанных предположениях напряженно-деформированное состояние тонкой пластинки будет достаточно точно определяться осредненными по толщине значениями компонент тензора напряжений и вектора перемещений. Для осредненных по толщине значений компонент тензора напряжений и вектора перемещений имеют место соотношения (1.6) и (1.7) и уравнение (1.8), где вместо коэффициентов β_{kj} следует подставить a_{kj}. Как и для случая плоской деформации, при обобщенном плоском напряженном состоянии характеристическое уравнение (1.9) не имеет вещественных корней. Рассматривая, как и выше, случай, когда корни характеристического уравнения различны, С. Г. Лехницкий получает для осредненных по толщине значений компонент тензора напряжений и вектора перемещений формулы (1.11) и (1.12), где всюду β_{kj} должно быть заменено a_{kj}.

4. Существование и единственность решения плоской задачи теории упругости анизотропной среды. Теорема существования и единственности решения плоской задачи теории упругости анизотропной среды была впервые доказана С. Г. Михлиным [57]. Рассматривая односвязную область, ограниченную достаточно гладким контуром, С. Г. Михлин приводит плоскую задачу теории упругости анизотропной среды для указанной области к системе четырех сингулярных интегральных уравнений с ядром Гильберта. Применяя далее известные приемы регуляризации, С. Г. Михлин приводит систему сингулярных интегральных уравнений к эквивалентной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода, единственное решение которой и дает решение поставленной задачи теории упругости.

В дальнейшем Г. Н. Савин [69] дал доказательство теоремы существования и единственности решения плоской задачи теории упругости анизотропной среды для односвязной бесконечной области; им же дано другое доказательство [70] теоремы существования и единственности решения для односвязной конечной области.

Д. И. Шерман [81,82,83] указал несколько методов решения плоской задачи теории упругости анизотропной среды для многосвязной конечной области.

Рассмотрим один из этих методов.

Пусть в плоскости $z = x + iy$ анизотропная среда заполняет некоторую многосвязную область S, ограниченную контуром L, состоящим из $m+1$ простых замкнутых кривых $L_1, L_2, \ldots, L_{m+1}$. Предположим далее, что главный вектор внешних усилий на каждом из контуров L_k равен нулю. Случай, когда главный вектор внешних усилий на каждом из контуров L_k не равен нулю, легко приводится к предыдущему. Д. И. Шерман приводит плоскую задачу теории упругости анизотропного тела к следующей системе интегральных уравнений Фредгольма:

$$\overline{\omega(t_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\lg\frac{\bar t_1 - \bar t_{10}}{t_2 - t_{20}} + \frac{\mu_1 - \bar\mu_2}{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d\lg\frac{t_1 - t_{10}}{t_2 - t_{20}} + \tag{1.15}$$

$$+ \sum_{k=1}^{m+1}\left(\frac{\mu_1 - \bar\mu_2}{\bar\mu_1 - \bar\mu_2}\,\frac{b_k}{t_{10} - a_k} + \frac{\bar b_k}{\bar t_{10} - \bar a_k}\right) = \frac{(1 - i\bar\mu_2)\,[f(t_0) + c_j] - (1 + i\mu_2)\,[\overline{f(t_0)} + \bar c_j]}{2i\,(\bar\mu_1 - \bar\mu_2)}$$

Здесь $\omega(t)$ — неизвестная функция, $f(t)$ — заданная функция, t и t_0, t_1 и t_{10}, t_2 и t_{20} — аффиксы точек, соответственно L, L_1, L_2, где L_1 и L_2 — границы областей S_1 и S_2, b_k и c_k — некоторые функционалы от неизвестной функции $\omega(t)$, a_k — постоянные, зафиксированные некоторым определенным способом. Система интегральных уравнений Фредгольма (1.15) имеет единственное решение, удовлетворяющее всем условиям задачи.

Д. И. Шерман [84] рассмотрел также задачу об определении напряжений в анизотропной, упругой и однородной среде, состоящей из нескольких сопряженных между собой посредством насадки тел.

§ 2. Эффективные решения плоской задачи теории упругости анизотропной среды

В работах [57, 69, 70, 80—84], указанных в предыдущем параграфе, даны общие методы решения плоской задачи теории упругости анизотропной среды для областей довольно широкого класса. Однако применение этих общих методов к конкретным задачам сопряжено с большими трудностями. Поэтому, естественно, встает проблема о нахождении иных, менее общих, но более эффективных решений.

Для многих практически интересных задач в настоящее время указаны такие решения. Они получены либо непосредственным подбором функции напряжений, либо благодаря использованию методов теории функций комплексного переменного, которые, как и в случае изотропной среды, здесь оказывают неоценимую услугу.

1. Элементарные решения. Укажем, во-первых, задачи, решения которых были получены элементарными методами. Выбирая функцию напряжений в виде целых полиномов, С. Г. Лехницкий [20] рассмотрел следующие задачи:

1) чистый изгиб анизотропной балки;

2) изгиб анизотропной балки, заделанной одним концом, силой, приложенной к другому концу;

3) изгиб анизотропной балки, заделанной одним концом, под влиянием нагрузки, равномерно распределенной по верхней грани;

4) изгиб анизотропной балки, лежащей на двух опорах, под действием нагрузки, равномерно распределенной по верхней грани.

Позже некоторые из указанных задач были решены другим методом А. А. Курдюмовым [16].

Более сложной задачей является задача об изгибе анизотропной клинообразной консоли. Выбирая функцию напряжений в виде $F = r^n \Phi_n(\theta)$, где r и θ — полярные координаты, С. Г. Лехницкий [20] решил следующие задачи:

1) изгиб клина силой, приложенной к вершине;

2) изгиб клина моментом, приложенным к вершине;

3) изгиб клина нагрузкой, равномерно распределенной вдоль верхней грани.

С. Г. Лехницким [32] указаны также элементарные решения задач о чистом изгибе кривого бруса, обладающего цилиндрической анизотропией, об изгибе кривого бруса с цилиндрической анизотропией поперечной силой и задачи о распределении напряжений в трубе с цилиндрической анизотропией под действием равномерно распределенного внешнего и внутреннего давлений, решение которой для частного вида анизотропии было получено еще Сен Венаном. Задача о распределении напряжений во вращающемся диске, обладающем цилиндрической анизотропией, решена Г. С. Глушковым [15]. К числу задач, решение которых получено элементарными средствами, относится также и задача о распределении напряжений во вращающемся эллиптическом анизотропном диске. Решение этой задачи, найденное С. Г. Лехницким [42], учитывает даже изменение напряжений по толщине пластинки.

Укажем в заключение на решение С. Г. Лехницким [20] плоской задачи теории упругости для ортотропной полуплоскости, полученное в интегралах Фурье.

2. Решения, основанные на применении теории функций комплексного переменного. В 1936 г. С. Г. Лехницким [20] было найдено эффективное решение плоской задачи теории упругости анизотропной среды для бесконечной области с эллиптическим отверстием. После установления общих уравнений плоской задачи теории упругости анизотропной среды и доказательства теоремы существования и единственности решения этих уравнений это решение явилось следующим шагом в развитии теории упругости анизотропных тел. Рассмотрим это решение более подробно.

Направим оси координат вдоль главных осей эллиптического отверстия. Пусть уравнение контура отверстия есть $z = a\cos\vartheta + ib\sin\vartheta$. Наряду с плоскостью $z = x + iy$ рассмотрим также плоскости $z_1 = x + \mu_1 y$ и $z_2 = x + \mu_2 y$, которые получаются из плоскости z аффинным преобразованием. При этом преобразовании заданный эллипс Γ на плоскости z переходит в эллипсы Γ_1 и Γ_2 соответственно на плоскостях z_1 и z_2. Отобразив внешность заданного эллипса Γ и внешность эллипсов Γ_1 и Γ_2 на плоскостях z_1 и z_2 на внешность окружности γ единичного радиуса плоскости ζ при помощи функций

$$z = \frac{a+b}{2}\zeta + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\zeta}, \quad z_k = \frac{a - i\mu_k b}{2}\zeta + \frac{a + i\mu_k b}{2}\frac{1}{\zeta} \qquad (k = 1, 2) \qquad (2.1)$$

получим, что точкам на эллипсах Γ, Γ_1 и Γ_2, находящихся в аффинном соответствии, будет соответствовать одна точка на окружности γ единичного радиуса. Краевые условия (1.13) при конформных отображениях (2.1) преобразуются в условия на окружности γ единичного радиуса. Вне Γ_k функция $\Phi_k(z_k)$ имеет вид:

$$\Phi_k(z_k) = A_{k0} + \qquad (2.2)$$

$$+ A_k \lg \frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}}{a - i\mu_k b} + \sum_{m=1}^{\infty} A_{km}\left(\frac{a - i\mu_k b}{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}}\right)^m$$

Таким образом, разложив заданные правые части краевых условий (1.13) в ряды

$$f_k = \alpha_k \lg\sigma + \alpha_{k0} + \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_{km}\sigma^m + \overline{\alpha}_{km}\overline{\sigma}^m) \qquad (k = 1, 2)$$

где $\sigma = e^{i\vartheta}$, подставив в краевые условия (1.13) функции (2.2) и сравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях σ, получим систему уравнений для определения коэффициентов A_k и A_{km}. Коэффициенты A_{km} определяются из этой системы уравнений непосредственно. Для определения коэффициентов A_k к найденным уравнениям нужно добавить соотношения, являющиеся условиями однозначности компонент тензора напряжений и вектора перемещений. В работах С. Г. Лехницкого [23, 25, 27, 29, 35] даны многочисленные применения найденного решения к практически интересным задачам. Несколько других частных случаев рассмотрено Г. Н. Савиным[67] и И. И. Фаербергом[78].

В 1939 г. Г. Н. Савин[71] указал другое решение плоской задачи теории упругости анизотропной среды для бесконечной области с эллиптическим отверстием. Отобразив внешность заданного эллипса Γ и внешность эллипсов Γ_1 и Γ_2 на внутренность единичного круга и применяя далее к преобразованным краевым условиям (1.13) формулу Шварца, восстанавливающую функцию комплексного переменного, аналитическую внутри круга, по значению ее вещественной части на окружности, Г. Н. Савин получает решение рассматриваемой задачи в замкнутой форме. В этой же работе Г. Н. Савин, используя формулу Шварца для полуплоскости, дает решение плоской задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости в виде следующих формул:

$$\begin{aligned}\Phi_1(z_1) &= \frac{i}{2\pi(\mu_1-\mu_2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mu_2 f_1 - f_2)\,\frac{1+z_1 x}{x-z_1}\,\frac{dx}{1+x^2}\\ \Phi_2(z_2) &= -\frac{i}{2\pi(\mu_1-\mu_2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\mu_1 f_1 - f_2)\,\frac{1+z_2 x}{x-z_2}\,\frac{dx}{1+x^2}\end{aligned} \tag{2.3}$$

Последние формулы были применены Г. Н. Савиным к решению некоторых контактных задач теории упругости анизотропных сред.

Решение плоской задачи теории упругости анизотропной среды для сплошного эллипса было дано впервые С. Г. Лехницким[26] в 1937 г. Внутри эллипса Γ_k функция $\Phi_k(z_k)$ может быть разложена в ряд

$$\Phi_k(z_k) = A_{k0} + A_{k1} z_k + \\ + \sum_{m=2}^{\infty} A_{km}\left[\left(z_k - \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}\right)^m + \left(z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}\right)^m\right] \tag{2.4}$$

по специальным полиномам; на контуре Γ_k ряд (2.4) обращается в ряд по степеням σ. Разложив далее правые части краевых условий (1.13) в ряды по степеням σ, автор приходит к системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов A_{km}, которая при выполнении условий равновесия имеет единственное решение.

Два года спустя П. П. Куфарев[17] дал другое решение плоской задачи теории упругости анизотропной среды для сплошного эллипса, используя способ решения соответствующей задачи для изотропной среды, предложенный Н. И. Мусхелишвили, в соединении с методом С. Г. Лехницкого, примененным при решении плоской задачи теории упругости анизотропного тела для бесконечной области с эллиптическим отверстием. Области S в плоскости z, ограниченной эллипсом Γ, соответствуют в плоскостях z_1 и z_2 области S_1 и S_2, ограниченные соответственно эллипсами Γ_1 и Γ_2. Проведем в области S_k $(k=1,2)$ разрез l_k по отрезку большой оси эллипса Γ_k, соединяющему точки $z_k = c_k$ и $z_k = -c_k$, где $c_k^2 = a^2 + \mu_k^2 b^2$. Функция (2.1) отображает область S_k с разрезом на концентрическое кольцо, причем эллипсу Γ_k соответствует внешняя окружность γ единичного радиуса, а разрезу l_k — внутренняя окружность радиуса, меньшего единицы. Функция $\Phi_k(z_k)$, однозначная и голоморфная в области S_k, переходит при отображении (2.1) в функцию, однозначную и голоморфную в кольце, и, следовательно, она может быть разложена в ряд

$$\Phi_k(z_k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{km}\left(\frac{z_k + \sqrt{z_k^2 - a^2 - \mu_k^2 b^2}}{a - i\mu_k b}\right)^m \tag{2.5}$$

коэффициенты которого связаны соотношениями

$$A_{k(-m)} = \left(\frac{a + i\mu_k b}{a - i\mu_k b}\right)^m A_{km} \tag{2.6}$$

вытекающими из условия равенства значений функции $\Phi_k(z_k)$ на нижнем и верхнем берегах разреза l_k. Разложив заданные правые части краевых условий (1.13) в ряды Фурье, подставив в эти краевые условия функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ из (2.5) и приравнивая далее коэффициенты Фурье в левой и правой частях полученных равенств, П. П. Куфарев получает систему уравнений, которая вместе с соотношениями (2.6) полностью определяет коэффициент A_{km}. Условия равновесия предполагаются выполненными.

П. П. Куфарев[18] указал также решение плоской задачи теории упругости анизотропного тела для бесконечного клина, когда на его гранях заданы нормальные и касательные напряжения. Задача состоит в определении двух функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, голоморфных в областях $|\arg z| < \gamma$ и удовлетворяющих следующим краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\mu_1 a_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 a_2 \Phi_2(z_2)] &= Q_1(\rho) \\ 2\operatorname{Re}[a_1 \Phi_1(z_1) + a_2 \Phi_2(z_2)] &= P_1(\rho) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad z = \rho e^{i\gamma}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\operatorname{Re}[\mu_1 b_1 \Phi_1(z_1) + \mu_2 b_2 \Phi_2(z_2)] &= Q_2(\rho) \\ 2\operatorname{Re}[b_1 \Phi_1(z_1) + b_2 \Phi_2(z_2)] &= P_2(\rho) \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad z = \rho e^{-i\gamma}$$

Здесь

$$a_k = \cos\gamma + \mu_k \sin\gamma, \qquad b_k = \cos\gamma - \mu_k \sin\gamma \qquad (k = 1, 2)$$

При некоторых предположениях относительно заданных функций $P_k(\rho)$ и $Q_k(\rho)$ решение поставленной задачи дается в виде следующих формул:

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} \Big\{ & [A_{1k}(u) + A_{2k}(u)][P_1(\rho) + P_2(\rho)] + \\ & + [A_{3k}(u) - A_{4k}(u)][Q_1(\rho) - Q_2(\rho)]\Big\}\left(\frac{\rho}{z_k}\right)^{iu}\frac{d\rho}{\rho} + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} \Big\{ & [A_{1k}(u) - A_{2k}(u)][P_1(\rho) - P_2(\rho)] + \\ & + [A_{3k}(u) + A_{4k}(u)][Q_1(\rho) + Q_2(\rho)]\Big\}\left(\frac{\rho}{z_k}\right)^{iu}\frac{d\rho}{\rho} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь $A_{sk}(u) = D_{sk}(u)/D(u)$, где $D_{sk}(u)$ — минор элемента, стоящего на пересечении s-й строчки и k-го столбца определителя

$$D(u) = \begin{vmatrix} a_1^{1-iu} & a_2^{1-iu} & \bar{a}_1^{1-iu} & \bar{a}_2^{1-iu} \\ b_1^{1-iu} & b_2^{1-iu} & \bar{b}_1^{1-iu} & \bar{b}_2^{1-iu} \\ \mu_1 a_1^{1-iu} & \mu_2 a_2^{1-iu} & \bar{\mu}_1 \bar{a}_1^{1-iu} & \bar{\mu}_2 \bar{a}_2^{1-iu} \\ \mu_1 b_1^{1-iu} & \mu_2 b_2^{1-iu} & \bar{\mu}_1 \bar{b}_1^{1-iu} & \bar{\mu}_2 \bar{b}_2^{1-iu} \end{vmatrix}$$

Заметим, что задача о распределении напряжений в плоском безграничном анизотропном клине служила предметом исследований В. М. Абрамова[1].

П. П. Куфарев и В. А. Свекло[19] решили задачу об изгибе бесконечной анизотропной полосы, когда на ее сторонах заданы нормальные и касательные напряжения. Задача состоит в определении функций $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$, голоморфных при $|y| < h$ и удовлетворяющих следующим краевым условиям:

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)] = P_1(x), \quad 2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)] = Q_1(x) \quad \text{при } y = h$$

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1)+\Phi_2(z_2)] = P_2(x), \quad 2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1)+\mu_2\Phi_2(z_2)] = Q_2(x) \quad \text{при } y = -h$$

При некоторых ограничениях, наложенных на заданные функции $P_k(x)$ и $Q_k(x)$ и на характер убывания напряжений при $|z| \to \infty$, решение рассматриваемой задачи дается в виде следующих формул:

$$\Phi_k(z_k) = \tag{2.8}$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \{A_{1k}(u)\,[P_1(\xi)+P_2(\xi)] + A_{3k}(u)[Q_1(\xi)+Q_2(\xi)]\} \cos u(z_k-\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} \{A_{4k}(u)\,[P_1(\xi)-P_2(\xi)] + A_{2k}(u)[Q_1(\xi)-Q_2(\xi)]\} \sin u(z_k-\xi)\, d\xi$$

Здесь $A_{sk}(u) = D_{sk}(u)\,/\,D(u)$, где $D_{sk}(u)$ — минор элемента, стоящего на пересечении s-й строчки и k-го столбца определителя

$$D(u) = \begin{vmatrix} \cos\mu_1 uh & \cos\mu_2 uh & \cos\bar\mu_1 uh & \cos\bar\mu_2 uh \\ \mu_1\sin\mu_1 uh & \mu_2\sin\mu_2 uh & \bar\mu_1\sin\bar\mu_1 uh & \bar\mu_2\sin\bar\mu_2 uh \\ \mu_1\cos\mu_1 uh & \mu_2\cos\mu_2 uh & \bar\mu_1\cos\bar\mu_1 uh & \bar\mu_2\cos\bar\mu_2 uh \\ \sin\mu_1 uh & \sin\mu_2 uh & \sin\bar\mu_1 uh & \sin\bar\mu_2 uh \end{vmatrix}$$

Выше были указаны эффективные решения первой основной задачи теории упругости анизотропной среды для односвязных областей, ограниченных либо прямыми, либо кривыми второго порядка. С. Г. Михлин[58] указал эффективное решение плоской задачи теории упругости анизотропной среды для области, представляющей собой бесконечную плоскость с конечным числом разрезов на вещественной оси.

3. Контактные задачи. Смешанная задача теории упругости анизотропной среды служила предметом исследований Г. Н. Савина и Л. А. Галина.

Г. Н. Савин в работе [72] решил плоскую задачу теории упругости о распределении напряжений в анизотропной однородной полуплоскости, когда к участку $(-l, +l)$ границы полуплоскости приложен абсолютно жесткий штамп, на который действует сила K. Приняв допущения, что, во-первых, штамп перемещается поступательно вниз, во-вторых, силы трения под штампом отсутствуют, автор приводит поставленную задачу к задаче решения интегрального уравнения

$$\int_{-l}^{+l} P(t)\lg|t-t_0|\,dt = f(t_0) + C \tag{2.9}$$

совпадающего с интегральным уравнением соответствующей задачи для изотропного тела. Решение интегрального уравнения (2.9) известно. По найденному давлению $P(t)$ под штампом функции $\Phi_1(z_1)$ и $\Phi_2(z_2)$ определяются по формулам (2.3).

Рассмотренное выше решение было применено Н. Н. Савиным[75] к исследованию некоторых практически интересных задач.

В работе [73] Г. Н. Савин решил плоскую задачу теории упругости о напряжениях в анизотропной полуплоскости, когда к ее границе в интервале $(-l, +l)$ приложен абсолютно жесткий штамп и одновременно на конечном числе участков границы полуплоскости приложены внешние нормальные и касательные усилия. Полагая, что, во-первых, силы трения под абсолютно жестким штампом отсутствуют, во-вторых, вертикальные перемещения точек упругой среды, находящихся непосредственно под подошвой абсолютно жесткого штампа, равны вертикальным перемещениям соответствующих точек контура подошвы штампа, Г. Н. Савин сводит решение поставленной задачи к решению интегрального уравнения вида (2.9). В заключение автор рассматривает задачи, представляющие практический интерес.

Л. А. Галин [11] рассмотрел задачу о напряженном состоянии в упругой анизотропной полуплоскости, в которую вдавливаются несколько абсолютно жестких штампов. При этом на линии контакта имеют место силы трения, подчиняющиеся закону Кулона. Поставленную задачу Л. А. Галин приводит к задаче Гильберта, решение которой дается в явном виде.

§ 3. Пространственные задачи математической теории упругости анизотропных сред

1. Обобщенная плоская деформация однородного упругого тела с произвольной анизотропией. Рассмотрим однородный бесконечный цилиндр, находящийся в равновесии под действием усилий, поверхностных и объемных, расположенных в плоскостях, перпендикулярных образующей цилиндра и меняющихся вдоль образующей. Под действием указанной системы нагрузок изотропный цилиндр испытывает плоскую деформацию. Плоской будет деформация и анизотропного цилиндра, если в каждой его точке существует плоскость упругой симметрии, перпендикулярная образующей. В общем случае произвольных упругих постоянных деформация бесконечного однородного анизотропного цилиндра не будет плоской.

С. Г. Лехницкий [31,33] исследовал напряженно-деформированное состояние бесконечного однородного цилиндра с произвольной анизотропией под действием плоской системы сил. Как обычно, примем какую-нибудь плоскость поперечного сечения цилиндра за плоскость xy, направив ось z параллельно образующей. Для простоты будем считать, что объемные силы равны нулю. Тогда $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $w = w(x, y)$ и

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$
$$\sigma_z = -\frac{a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{xz} + a_{36}\tau_{xy}}{a_{33}} \tag{3.1}$$

где функции напряжений $F(x, y)$ и $\Psi(x, x)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$L_4 F + L_3 \Psi = 0, \quad L_3 F + L_2 \Psi = 0 \tag{3.2}$$

Здесь

$$L_4 = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66})\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16}\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial y^4}$$
$$L_3 = -\beta_{24}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46})\frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial x} - (\beta_{14} + \beta_{56})\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15}\frac{\partial^3}{\partial y^3} \tag{3.3}$$
$$L_2 = \beta_{44}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55}\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

где

$$\beta_{kj} = a_{kj} - \frac{a_{k3}a_{3j}}{a_{33}} \qquad (k, j = 1, 2, 4, 5, 6)$$

Алгебраическое уравнение шестой степени

$$l_4(\mu)\, l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0 \tag{3.4}$$

где

$$l_4(\mu) = \beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22}$$

$$l_3(\mu) = \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu^2 + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - \beta_{24}$$

$$l_3(\mu) = \beta_{55}\mu^2 - 2\beta_{45}\mu + \beta_{44}$$

не имеет вещественных корней. Будем в дальнейшем считать, что, во-первых, корни уравнения (3.4) не являются одновременно корнями уравнений $l_2(\mu) = 0$, $l_4(\mu) = 0$ или $l_3(\mu) = 0$ и, во-вторых, среди корней уравнения (3.4) нет равных. Тогда, обозначая корни уравнения (3.4) через μ_1, $\bar{\mu}_1$, μ_2, $\bar{\mu}_2$, μ_3 и $\bar{\mu}_3$, С. Г. Лехницкий получает для функций $F(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ следующие общие выражения: (3.5)

$$F(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\,[F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3)],\ \Psi(x, y) = 2\,\mathrm{Re}\,[\Psi_1(z_1) + \Psi_2(z_2) + \Psi_3(z_3)]$$

где $F_k(z_k)$ и $\Psi_k(z_k)$ — произвольные аналитические функции комплексного пере менного $z_k = x + \mu_k y$ $(k = 1, 2, 3)$.

Для компонент тензора напряжений и вектора перемещений имеют место следующие формулы: (3.6)

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1^2\,\Phi_1'(z_1) + \mu_2^2\,\Phi_2'(z_2) + \mu_3^2\lambda_3\,\Phi_3'(z_3)]\\
\sigma_y &= 2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2'(z_2) + \lambda_3\,\Phi_3'(z_3)]\\
\tau_{xy} &= -2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\,\Phi_1'(z_1) + \mu_2\,\Phi_2'(z_2) + \mu_3\lambda_3\,\Phi_3'(z_3)]\\
\tau_{xz} &= 2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\lambda_1\,\Phi_1'(z_1) + \mu_2\lambda_2\,\Phi_2'(z_2) + \mu_3\,\Phi_3'(z_3)]\\
\tau_{yz} &= -2\,\mathrm{Re}\,[\lambda_1\,\Phi_1'(z_1) + \lambda_2\,\Phi_2'(z_2) + \Phi_3'(z_3)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u &= 2\,\mathrm{Re}\,[p_1\,\Phi_1(z_1) + p_2\,\Phi_2(z_2) + p_3\,\Phi_3(z_3)] - \omega y + u_0\\
v &= 2\,\mathrm{Re}\,[q_1\,\Phi_1(z_1) + q_2\,\Phi_2(z_2) + q_3\,\Phi_3(z_3)] + \omega x + v_0\\
w &= 2\,\mathrm{Re}\,[r_1\,\Phi_1(z_1) + r_2\,\Phi_2(z_2) + r_3\,\Phi_3(z_3)] + w_0
\end{aligned}$$

Здесь p_k, q_k, r_k и λ_k $(k = 1, 2, 3)$ — некоторые постоянные, выражающиеся через упругие константы a_{ij}.

При заданных на поверхности цилиндра напряжениях краевые условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
2\,\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \lambda_3\Phi_3(z_3)] &= f_1 + C_1\\
2\,\mathrm{Re}\,[\mu_1\,\Phi_1(z_1) + \mu_2\,\Phi_2(z_2) + \mu_3\lambda_3\Phi_3(z_3)] &= f_2 + C_2\\
2\,\mathrm{Re}\,[\lambda_1\,\Phi_1(z_1) + \lambda_2\,\Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3)] &= C_3
\end{aligned} \tag{3.7}$$

где f_1 и f_2 — известные функции и C_1, C_2 и C_3 — комплексные постоянные.

Если задаются смещения точек поверхности цилиндра, то в этом случае контурные условия получаем непосредственно из (3.6)

С. Г. Лехницкий исследовал характер многозначности функций $\Phi_k(z_k)$ и показал, что если область S поперечного сечения цилиндра односвязная, то функции $\Phi_k(z_k)$ будут однозначными голоморфными функциями в областях S_k, получаемых из области S путем аффинного преобразования; в случае многосвязной области S функции $\Phi_k(z_k)$, вообще говоря, будут многозначными.

С. Г. Лехницкий применил разработанную им теорию обобщенной плоской деформации упругого цилиндра с произвольной анизотропией к решению следующих частных задач об упругом равновесии: 1) бесконечного пространства с полостью в форме бесконечного эллиптического цилиндра; 2) бесконечного полупространства, ограниченного плоскостью или поверхностью параболического цилиндра.

Рассмотрим упругое равновесие однородного анизотропного пространства с произвольной анизотропией, имеющего внутреннюю полость в виде эллиптического цилиндра неограниченной длины. Поместим начало координат на оси полости, ось z направим по этой оси, оси x и y — по главным осям сечения. Пусть внешние усилия действуют только на поверхности полости, не имеют осевой составляющей и не меняются вдоль оси z. С. Г. Лехницкий получает решение рассматриваемой задачи в виде (2.2), где $k = 1, 2, 3$.

Приведем решение [34] первой основной задачи теории упругости для однородного анизотропного полупространства с произвольной анизотропией, ограниченного поверхностью параболического цилиндра, под действием внешних усилий, распределенных по цилиндрической поверхности. Относительно внешних усилий сделаем, как обычно, следующие предположения. Внешние усилия не имеют составляющей в направлении образующей цилиндрической поверхности и не меняются вдоль образующей; объемные силы отсутствуют. Примем какое-нибудь сечение, нормальное к образующей, за плоскость xy, направив ось z вдоль образующей. На плоскости xy получается область S, внешняя по отношению к параболе. Направим оси x и y так, чтобы уравнение контура L области S имело вид $y = ax^2$ $(a > 0)$. Тогда решение поставленной задачи дается формулами

$$\Phi_1'(z_1) = \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_1 z_1}} \frac{1}{2\pi i\Delta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_n(1-\lambda_2\lambda_3) + Y_n(\mu_2 - \mu_3\lambda_1\lambda_3)}{t - \zeta_1(z_1)} \sqrt{1+4a^2t^2}\, dt \tag{3.8}$$

$$\Phi_2'(z_2) = \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_2 z_2}} \frac{1}{2\pi i\Delta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_n(\lambda_1\lambda_2 - 1) + Y_n(\mu_3\lambda_1\lambda_3 - \mu_1)}{t - \zeta_2(z_2)} \sqrt{1+4a^2t^2}\, dt$$

$$\Phi_3'(z_3) = \frac{1}{\sqrt{1+4a\mu_3 z_3}} \frac{1}{2\pi i\Delta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{X_n(\lambda_2 - \lambda_1) + Y_n(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)}{t - \zeta_3(z_3)} \sqrt{1+4a^2t^2}\, dt$$

Здесь X_n и Y_n — составляющие внешних усилий,

$$\Delta = \mu_1 - \mu_2 + \lambda_2\lambda_3(\mu_3 - \mu_1) + \lambda_1\lambda_3(\mu_2 - \mu_3)$$

$$\zeta_k(z_k) = \frac{\sqrt{1+4a\,\mu_k z_k} - 1}{2\mu_k\, a} \qquad (k = 1,\ 2,\ 3)$$

При $a = 0$ получим решение рассматриваемой задачи для полупространства, ограниченного плоскостью $y = 0$.

2. Кручение и изгиб анизотропных призм. Одной из первых работ, опубликованных в Советском Союзе и посвященных проблеме кручения анизотропных призм, была работа А. С. Локшина [50]. Рассмотрим однородный анизотропный цилиндр, скручиваемый моментами, приложенными к его торцам. Примем какую-нибудь плоскость поперечного сечения цилиндра за плоскость xy, направив ось z параллельно образующей. Предположим, что в каждой точке цилиндра существует плоскость упругой симметрии, параллельная плоскости xy. А. С. Локшин распространяет аналогию между задачей кручения изотропной призмы и задачей о прогибе мембраны, установленную Прандтлем, на случай анизотропных призм указанного частного вида анизотропии. Введя функцию напряжений $\tau_{xz} = \partial\varphi / \partial y$, $\tau_{yz} = -\partial\varphi / \partial x$, автор приводит задачу о кручении анизотропной призмы к задаче решение уравнения

$$a_{44}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - 2a_{45}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + a_{55}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2C \tag{3.9}$$

при краевом условии $\varphi = 0$. Для скручивающего момента автор получает формулу, совпадающую с соответствующей формулой Прандтля для изотропной призмы.

Далее из условия положительности квадратичной формы потенциальной энергии деформации следует, что $a_{45}^2 - a_{44}\,a_{55} < 0$ и, следовательно, уравнение $a_{55}^2\,\mu^2 - 2a_{45}\,a_{55}\,\mu + 2a_{45}^2 - a_{44}\,a_{45} = 0$ имеет лишь вещественные корни μ_1 и μ_2.

Вводя новые переменные $x_1 = x + \mu_1 y$, $y_1 = x + \mu_2 y$, А. С. Локшин преобразует уравнение (3.9) к виду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_1^2} = \frac{2C a_{55}}{a_{44}\,a_{55} - a_{45}^2}$$

Последнее уравнение, как известно, есть уравнение для прогиба мембраны. Краевое условие для функции φ остается прежним. Скручивающий момент в новых координатах x_1 и y_1 равен

$$M = \frac{2a_{55}}{\sqrt{a_{55}\,a_{44} - a_{45}^2}} \iint \varphi\, dx_1\, dy_1 \tag{3.10}$$

где интегрирование распространяется на преобразованную область. Далее в работе дается решение задач о кручении кругового анизотропного цилиндра, эллиптического анизотропного цилиндра и прямоугольной анизотропной призмы.

Л. С. Лейбензон [48, 49], рассматривая задачу о кручении ортотропной призмы, получил уравнение (3.9) для функции напряжений из вариационной формулы Кастилиано. Им же рассмотрена задача о кручении ортотропной призмы, поперечное сечение которой есть авиационный профиль. Один частный пример для авиационного профиля еще ранее рассмотрен В. Д. Ванториным [10].

Н. Х. Арутюнян [3,4] дал решение некоторых задач о кручении анизотропного цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой эллиптический кольцевой сектор. Предполагая, что материал цилиндра ортотропный, и вводя новые координаты ρ и ϑ по формулам $x = a\rho^{\frac{1}{2}} \cos \vartheta$, $y = b\rho^{\frac{1}{2}} \sin \vartheta$, автор приводит задачу о кручении анизотропного стержня к задаче о минимуме некоторого функционала. Задача о минимуме функционала решается по методу Л. В. Канторовича. Н. Х. Арутюнян рассмотрел в первом приближении задачи о кручении анизотропного цилиндра, поперечное сечение которого представляет собой: 1) эллиптический кольцевой сектор с центральным углом, равным $\pi/2$; 2) эллиптический сводчатый профиль с центральным углом, равным π; 3) эллиптический трубчатый профиль с радиальной трещиной.

Задача об изгибе балки из материала, обладающего анизотропией частного вида, рассматривалась С. В. Серенсеном [77] и Л. С. Лейбензоном [48, 49]. В общем случае задача исследована С. Г. Лехницким [40]. Рассмотрим упругое равновесие однородной анизотропной цилиндрической балки с анизотрипией общего вида, один конец которой заделан, а другой подвергается действию усилий, приводящихся к силе P. Сила P нормальна к образующей цилиндрической поверхности, а линия ее действия проходит через центр тяжести концевого сечения и совпадает с одной из главных осей инерции. Поместим начало координат в центре тяжести загруженного концевого сечения и направим ось x по линии действия силы P, а ось z параллельно образующей. При решении поставленной задачи С. Г. Лехницкий пользуется полуобратным методом. Предполагая, что $\sigma_z = Pxz/I + f(x, y)$ и σ_x, σ_y, τ_{yz}, τ_{xz}, τ_{xy} — функции только x, y, автор удовлетворяет основным уравнениям математической теории упругости анизотропного тела и условиям на боковой поверхности и в поперечных сечениях. В результате, С. Г. Лехницкий приходит к следующим выражениям для компонент тензора напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \tau_2, \quad \tau_{xz} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} + \tau_1$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = &- \frac{a_{13}\,\sigma_x + a_{23}\,\sigma_y + a_{34}\,\tau_{yz} + a_{35}\,\tau_{xz} + a_{36}\,\tau_{xy}}{a_{33}} + \\ &+ \frac{Pxz}{I} + \frac{P}{2I}\,\frac{a_{35}\,x^2 + a_{34}\,xy}{a_{33}} + \frac{Ax + By + C}{a_{33}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Функции напряжений $F(x, y)$ и $\Psi(x, y)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$L_4 F + L_3 \Psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\beta_{25}\tau_1 + \beta_{24}\tau_2) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(\beta_{56}\tau_1 + \beta_{46}\tau_2) - $$
$$-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\beta_{15}\tau_1 + \beta_{25}\tau_2) + \frac{P(a_{34}a_{36} - 2a_{23}a_{35})}{2Ia_{33}}$$
$$L_3 F + L_2 \Psi = \frac{\partial}{\partial x}(\beta_{45}\tau_1 + \beta_{44}\tau_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\beta_{35}\tau_1 + \beta_{45}\tau_2) + \tag{3.12}$$
$$+\frac{P[(a_{34}a_{35} - 2a_{33}a_{36})x + (a_{34}{}^2 - 4a_{23}a_{33})y]}{2Ia_{33}} - 2\vartheta$$

Здесь операторы L_4, L_3, L_2 определяются по формулам (3.3), τ_1 и τ_2 — некоторые специально подбираемые функции; A, B, C и ϑ — постоянные, подлежащие определению; коэффициенты β_{kj} определяются по соответствующим формулам предыдущего раздела.

Удовлетворяя краевым условиям на боковой поверхности цилиндра, С. Г. Лехницкий приходит к следующим краевым условиям для функций $F(x, y)$ и $\Psi(x, y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = C_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = C_2, \quad \Psi = C_3 + \int_0^s (\tau_2\, dx - \tau_1\, dy) \tag{3.13}$$

где C_1, C_2, и C_3 — постоянные. Усилия, действующие в поперечном сечении балки, должны приводиться к силе P, направленной вдоль оси x. Это дает четыре уравнения для определения постоянных A, B, C и ϑ.

Система уравнений (3.12) может быть проинтегрирована в общем виде. В самом деле, общие выражения для функций F и Ψ можно представить в виде $F = F_0 + F_1$ и $\Psi = \Psi_0 + \Psi_1$, где F_0 и Ψ_0 — какое-нибудь частное решение неоднородной системы (3.12) и F_1 и Ψ_1 — общее решение соответствующей однородной системы; функции F_1 и Ψ_1 имеют вид (3.5).

Для компонент тензора напряжений имеют место следующие формулы:

$$\sigma_x = \sigma_x{}^1 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \sigma_y{}^1 + \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2}$$
$$\tau_{xy} = \tau_{xy}{}^1 - \frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y}, \qquad \tau_{yz} = \tau_{yz}{}^1 - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} + \tau_2, \qquad \tau_{xz} = \tau_{xz}{}^1 + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} + \tau_1 \tag{3.14}$$

где $\sigma_x{}^1$, $\sigma_y{}^1$, $\tau_{xy}{}^1$ $\tau_{xz}{}^1$ и $\tau_{yz}{}^1$ определяются из (3.6), функция σ_z попрежнему дается формулой (3.11).

На контуре поперечного сечения функции $\Phi_k(z_k)$ должны удовлетворять условиям

$$2\mathrm{Re}\,[\Phi_1(z_1) + \Phi_2(z_2) + \lambda_3 \Phi_3(z_3)] = C_1 - \frac{\partial F_0}{\partial x}$$
$$2\mathrm{Re}\,[\mu_1\Phi_1(z_1) + \mu_2\Phi_2(z_2) + \mu_3\lambda_3\Phi_3(z_3)] = C_2 - \frac{\partial F_0}{\partial y} \tag{3.15}$$
$$2\mathrm{Re}\,[\lambda_1\Phi_1(z_1) + \lambda_2\Phi_2(z_2) + \Phi_3(z_3)] = C_3 - \Psi_0 + \int_0^s (\tau_2\, dx - \tau_1\, dy)$$

Таким образом, задача об обобщенном изгибе однородной балки с анизотропией общего вида может быть сведена к задаче определения трех функций $\Phi_k(z_k)$, голоморфных в своих областях S_k и удовлетворяющих на контуре поперечного сечения балки краевым условиям (3.15).

В заключение этого раздела укажем на работу Г. Н. Савина [68], в которой рассматривается изгиб тонкостенной трубы, сопровождаемый сплющиванием поперечного сечения, при следующих предположениях: 1) материал имеет разные модули Юнга для продольного и поперечного направлений; 2) длина срединной линии поперечного сечения при деформации не изменяется. Задача об изгибе такой трубы решается приближенно методом Ритца.

3. **Симметричная деформация тела вращения.** С. Г. Лехницкий [36] рассмотрел задачу о симметричной деформации тела вращения при следующих предположениях. Поместим начало координат в центре тяжести какого-нибудь поперечного сечения и направим ось z вдоль оси тела. Предположим, что все направления, лежащие в плоскостях, нормальных к оси тела, являются эквивалентными в смысле упругих свойств, или, иначе говоря, тело является изотропным в плоскостях, нормальных к его оси. Тело, обладающее такой анизотропией, называют трансверсально-изотропным телом.

Рассмотрим случай, когда объемные силы отсутствуют, а распределение внешних усилий обладает симметрией вращения (относительно оси тела), или, иначе говоря, внешние усилия не имеют составляющих в направлении касательных к параллелям тела вращения и не меняются вдоль параллелей. Полагая $v = 0$, $u = u(r, z)$, $w = w(r, z)$, где u, v, w — составляющие вектора перемещения, отнесенные к цилиндрической системе координат, найдем, что $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$, а остальные компоненты тензора напряжений удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0$$

$$a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z - \frac{\partial}{\partial r}\{r(a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z)\} = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z) + \frac{\partial^2}{\partial r^2}(a_{13}\sigma_r + a_{13}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z) - a_{44}\frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial r \partial z} = 0$$

Здесь a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}, a_{44} — упругие постоянные трансверсально-изотропного тела. Как и в случае изотропного тела, компоненты тензора напряжений, удовлетворяющие системе (3.16), могут быть выражены через одну функцию напряжений $\varphi(r, z)$

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{b}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right), \quad & \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left(c\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{c}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + d\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \\ \sigma_\theta &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(b\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right), \quad & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

где a, b, c и d — постоянные, выражающиеся через упругие константы.

Функция напряжений $\varphi(r, z)$ удовлетворяет уравнению в частных производных четвертого порядка

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(c\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{c}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + d\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = 0 \tag{3.18}$$

С. Г. Лехницкий рассмотрел некоторые задачи на применение общей теории. В частности, им рассмотрена задача о распределении напряжений в упругом трансверсально-изотропном полупространстве под действием симметричной нормальной нагрузки. В частности, из указанного решения путем предельного перехода автор получил и исследовал решение задачи о распределении напряжений в упругом трансверсально-изотропном полупространстве под действием сосредоточенной силы.

С. Г. Лехницкий рассмотрел также следующую задачу. Имеется тяжелый однородный трансверсально-изотропный массив, ограниченный сверху горизонтальной плоскостью и ослабленный выработкой в виде крупного цилиндра с осью, нормальной ограничивающей плоскости. Предполагается, что выработка начинается у плоскости и уходит вглубь на бесконечность. Требуется определить напряжения от собственного веса и нормального давления, распределенного по поверхности выработки по линейному закону. Решение поставленной задачи оказывается элементарным и дается формулами

$$\sigma_r = \frac{a_{12}\gamma}{a_{11}+a_{12}}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)z - \frac{kR^2}{r^2}z, \qquad \sigma_z = -\gamma z$$

$$\sigma_\theta = \frac{a_{13}\gamma}{a_{11}+a_{12}}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)z + \frac{kR^2}{r^2}z, \qquad \tau_{rz} = 0$$

Здесь γ — удельный вес массива, R — радиус выработки, k — коэффициент, характеризующий интенсивность гидростатического давления.

Поступила в редакцию
19 XI 1949

Саратовский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов В. М. Распределение напряжений в плоском безграничном клине при произвольной нагрузке. Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений НИИММ ЛГУ и НИИМех МГУ. М. 1937.

2. Амбарцумян С. А. К теории анизотропных пологих оболочек. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 1.

3. Арутюнян Н. Х. О кручении эллиптического кольцевого сектора. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.

4. Арутюнян Н. Х. Приближенное решение некоторых задач о кручении анизотропных стержней. Сообщения Института математики и механики АН Арм. ССР. Сообщение 2. 1948.

5. Балабух Л. И. Устойчивость фанерных пластинок. Техника воздушного флота. 1937. № 9.

6. Бехтерев П. Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение учения о потенциальной энергии и начала наименьшей работы. Журнал Русского физико-химического общества при Ленинградском университете. Часть физическая. 1925. Т. 57.

7. Бехтерев П. Аналитическое исследование обобщенного закона Гука. Применение метода преобразования координат. Журнал Русского физико-химического общества при Ленинградском университете. Часть физическая. 1926. Т. 58.

8. Бурмистров Е. Ф. Некоторые случаи изгиба треугольной ортотропной пластинки. Вестник инженеров и техников. 1947. № 2.

9. Бурмистров Е. Ф. Симметричная деформация оболочки, мало отличающейся от цилиндрической. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 4.

10. Ванторин В. Д. Кручение анизотропной призмы, поперечное сечение которой ограничено кривой $y^2 = k^2(1-x)^2x$. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 3.

11. Галин Л. А. Смешанные задачи теории упругости с силами трения для полуплоскости. ДАН СССР. 1943. Т. XXXIX. № 3.

12. Гиммельфабр А. Л. Модули упругости ортотропных материалов. Труды Московского авиационного института. 1947. Вып. 5.

13. Джанелидзе Г. Ю. Обзор работ по теории изгиба тонких и толстых плит, опубликованных в СССР. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 1.

14. Житков П. Н. Расчет ортотропных пластинок. Записки Воронежского сельскохозяйственного института. 1940. Т. XIX. Вып. 2.

15. Глушков Г. С. Определение напряжений во вращающемся диске при различных упругих свойствах материала в двух направлениях. Труды Московского станкоинструментального института. 1939. Т. III.

16. Курдюмов А. А. О решении в полиномах плоской задачи теории упругости для прямоугольной анизотропной полосы. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 4.

17. Куфарев П. П. Определение напряжений в эллиптической анизотропной пластинке. ДАН СССР. Новая серия. 1939. Т. XXXIII. № 3.

18. Куфарев П. П. Определение напряжений в анизотропном клине. ДАН СССР. Новая серия. 1941. Т. XXII. № 8.

19. Куфарев П. П., Свекло В. А. Определение напряжений в анизотропной полосе. ДАН СССР. Новая серия. 1941. Т. XXXII. № 9.

20. Лехницкий С. Г. Некоторые случаи плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Экспериментальные методы определения напряжений и деформаций в упругой и пластической зонах. Сборник. М. 1935.

21. Лехницкий С. Г. О влиянии сосредоточенных сил на распределение напряжений в анизотропной упругой среде. ПММ. 1936. Т. III. Вып. 1.

22. Лехницкий С. Г. Напряжения в неограниченной анизотропной пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием. ДАН СССР. 1936. Т. IV (XIII). № 3.

23. Лехницкий С. Г. Концентрация напряжений вблизи эллиптического и кругового отверстия в растягиваемой анизотропной пластинке. Вестник инженеров и техников. 1936. № 5.

24. Лехницкий С. Г. Плоская статическая задача теории упругости анизотропного тела. ПММ. Новая серия. 1937. Т. I. Вып.1.

25. Лехницкий С. Г. Теоретическое исследование напряженного состояния анизотропной пластинки, ослабленной эллиптическим или круговым отверстием. Труды конференции по оптическому методу изучения напряжений НИИММ ЛГУ и НИИМех МГУ. Л. — М. 1937.

26. Лехницкий С. Г. Решение плоской задачи теории упругости анизотропного тела для сплошного эллипса. ДАН СССР. Новая серия. 1937. Т. XV. № 9.

27. Лехницкий С. Г. О напряжениях вблизи кругового отверстия в анизотропной пластинке при изгибе. Вестник инженеров и техников. 1937. № 4.

28. Лехницкий С. Г. Определение напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки кругового сечения. Изв. АН СССР. ОТН. 1938. № 7.

29. Лехницкий С. Г. Определение напряжений в тяжелом анизотропном массиве вблизи горизонтальной цилиндрической выработки эллиптического и кругового сечения. Изв. АН СССР. ОТН. 1938. № 8—9.

30. Лехницкий С. Г. О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит. ПММ. Новая серия. 1938. Т. II. Вып. 2.

31. Лехницкий С. Г. Обобщение задачи о плоской деформации на случай тела с произвольной анизотропией. Ученые записки Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Серия Физико-математического института. 1938. Т. I. (XIV). Вып. 2.

32. Лехницкий С. Г. Плоская задача теории упругости для тела, обладающего цилиндрической анизотропией. Ученые записки Саратовского государственного университета им. Н. Г. Чернышевского. Серия Физико-математического института. 1938. Т. I. (XIV). Вып. 2.

33. Лехницкий С. Г. Некоторые случаи упругого равновесия однородного цилиндра с произвольной анизотропией. ПММ. Новая серия. 1939. Т. II. Вып. 3.

34. Лехницкий С. Г. Обобщенная плоская деформация в упругом анизотропном полупространстве, ограниченном поверхностью параболического цилиндра. ДАН СССР. 1939. Т. XXV. № 3.

35. Лехницкий С. Г. Некоторые случаи распределения напряжений в анизотропной пластинке с круговым отверстием. Ученые записки Ленинградского государственного университета. Серия математических наук. Механика. 1939. Вып. 8.

36. Лехницкий С. Г. Симметричная деформация и кручение анизотропного тела вращения с анизотропией частного вида. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 3.

37. Лехницкий С. Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 1.

38. Лехницкий С. Г. Плоская задача теории упругости для среды со слабо выраженной анизотропией. ДАН СССР. 1941. Т. XXXI. № 5 и 9.

39. Лехницкий С. Г. К расчету на устойчивость ортотропной пластинки. Вестник инженеров и техников. 1941. № 1.

40. Лехницкий С. Г. О равновесии анизотропной консольной балки. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 1.

41. Лехницкий С. Г. Устойчивость анизотропных пластинок. Пособие для авиаконструкторов. М.—Л. 1943.

42. Лехницкий С. Г. Распределение напряжений во вращающейся эллиптической анизотропной пластинке. Ученые записки Ленинградского государственного университета. Серия математических наук. Механика. 1944. Вып. 13.

43. Лехницкий С. Г. О комплексных параметрах, входящих в общие формулы некоторых задач теории упругости анизотропного тела. Ученые записки Ленинградского государственного университета. Серия математических наук. Механика. 1944. Вып. 13.

44. Лехницкий С. Г. Устойчивость анизотропной пластинки, усиленной ребрами по двум сторонам. Научный бюллетень Ленинградского государственного университета. 1945. № 2.

45. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. М. — Л. 1947.

46. Лехницкий С. Г. Изгиб пластинки с ребрами жесткости. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 3.

47. Лехницкий С. Г. Распределение напряжений в упругом стержне с криволинейной анизотропией под действием растягивающей силы и изгибающих моментов. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.

48. Лейбензон Л. С. Некоторые задачи об изгибе и кручении анизотропных призм. Ученые записки Московского государственного университета. Механика. 1940. Вып. 46.

49. Лейбензон Л. С. Вариационные методы решения задач теории упругости. М. — Л. 1943.

50. Локшин А. С. К кручению анизотропных призм. Записки Днепропетровского института народного образования. 1927. Т. I.

51. Митинский А. Н. К вопросу об определении напряжений в деревянной сверленой трубе, подверженной действию внутреннего давления. Вестник инженеров и техников. 1936. № 5.

52. Митинский А. Н. Напряжения в толстостенной анизотропной трубе под действием наружного и внутреннего давлений. Сборник Ленинградского института инженеров железнодорожного транспорта. 1947. Вып. 136. Теоретический.

53. Митинский А. Н. Обобщенный закон Гука для древесины как анизотропного тела. Сборник трудов Кафедры строительной механики и древесиноведения Лесотехнической академии им. С. М. Кирова. 1941.

54. Митинский А. Н. Упругие постоянные древесины как ортотропного материала. Тр. Лесотехнической акад. им. С. М. Кирова. 1948. № 63.
55. Митинский А. Н. Модуль кручения и модуль сдвига древесины как анизотропного материала. Тр. Лесотехнической акад. им. С. М. Кирова. 1949. № 65.
56. Митинский А. Н. Упругие постоянные древесины как трансверсально-изотропного материала. Тр. Лесотехнической акад. им. С. М. Кирова. 1949. № 67.
57. Михлин С. Г. Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического института АН СССР. 1936. № 76.
58. Михлин С. Г. Об одной частной задаче теории упругости. ДАН СССР. 1940. Т. XXVII. № 6.
59. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с приложениями к задачам устойчивости упругого равновесия. Известия Физико-математического общества и НИИММ при Казанском университете. 1938. Т. XI. Серия 3.
60. Муштари Х. М. Некоторые обобщения теории тонких оболочек с применением к решению задач устойчивости упругого равновесия. ПММ. Новая серия. 1939. Т. II. Вып. 4.
61. Одиноков Ю. Г. Об устойчивости ортотропной цилиндрической оболочки кругового сечения. Сб. трудов Казанского авиационного института. 1940. № 10.
62. Ростовцев Г. Г. Приведенная ширина изотропной и анизотропной пластинки. Труды Ленинградского института инженеров гражданского воздушного флота. 1936. № 6.
63. Ростовцев Г. Г. К вопросу о приведенной ширине ортотропной пластинки. Техника воздушного флота. 1937. № 10.
64. Ростовцев Г. Г. Расчет тонкой плоской обшивки, подкрепленной ребрами жесткости, при нагрузке силами, лежащими в ее плоскости и перпендикулярными к ней. Труды Ленинградского института инженеров гражданского воздушного флота. 1940. Вып. 20.
65. Рабинович А. Л. Об упругих постоянных и прочности анизотропных материалов. Труды ЦАГИ. 1946. № 582.
66. Рабинович А. Л. О расчете ортотропных слоистых панелей на растяжение, сдвиг и изгиб. Труды Министерства авиационной промышленности. 1948. № 675.
67. Савин Г. Н. Изгиб анизотропной балки постоянной перерезывающей силой, ослабленной эллиптическим и круговым отверстием. Вестник инженеров и техников. 1938. № 4.
68. Савин Г. Н. Изгиб криволинейной тонкостенной трубы эллиптического поперечного сечения с учетом сплющивания. Труды Днепропетровского инженерно-строительного института. 1938. Сообщение 23.
69. Савин Г. Н. Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды (односвязная бесконечная область). Труды Института строительной механики АН УССР. 1938. № 32.
70. Савин Г. Н. Об одном методе решения основной плоской статической задачи теории упругости анизотропной среды. Труды Института математики АН УССР. 1939. № 3.
71. Савин Г. Н. Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды. ДАН СССР. 1939. Т. XXIII. № 3.
72. Савин Г. Н. Давление абсолютно жесткого штампа на упругую анизотропную среду (плоская задача). ДАН УССР. 1939. № 6.
73. Савин Г. Н. О дополнительном давлении, передающемся по подошве абсолютно жесткого штампа на упругое анизотропное основание, вызванном близлежащей нагрузкой (плоская задача). ДАН УССР. 1940. № 7.

74. Савин Г. Н. Давление в анизотропном массиве при заданной нагрузке на поверхности (плоская задача). Вестник инженеров и техников. 1940. № 3.

75. Савин Г. Н. Давление жесткого ленточного фундамента на упругое анизотропное основание. Вестник инженеров и техников. 1940. № 5.

76. Секерж-Зенькович Я. И. К расчету на устойчивость листа фанеры как анизотропной пластинки. Труды ЦАГИ. 1931. № 76.

77. Серенсен С. В. Основы технической теории упругости. 1934.

78. Фаерберг И. М. Концентрация напряжений в анизотропной пластинке с круговым отверстием. Труды Министерства авиационной промышленности. 1948. № 674.

79. Ченцов Н. Г. Исследование фанеры как ортотропной пластинки. Технические заметки ЦАГИ. 1936. № 91.

80. Шармазанашвили А. Х. Расчет анизотропных толстостенных сферических оболочек. Вестник инженеров и техников. 1938. № 7.

81. Шерман Д. И. Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Труды сейсмологического института АН СССР. 1938. № 86.

82. Шерман Д. И. Новое решение плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ДАН СССР. 1941. Т. XXXII. № 5.

83. Шерман Д. И. К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 6.

84. Шерман Д. И. К определению напряжений в анизотропной упругой и однородной среде, состоящей из нескольких сопряженных между собой посредством насадки тел. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 4.

85. Штаерман И. Я. К теории симметричных деформаций анизотропных упругих оболочек. Изв. Киевского политехнического и сельскохозяйственного институтов. 1924.

86. Штаерман И. Я. Устойчивость цилиндрических труб и сводов. ПММ. Новая серия. 1938. Т. II. Вып. 2.

87. Шулежко П. Г. Уравнение движения и равновесия анизотропной неоднородной тонкой плиты переменной толщины. Сборник Украинского научно-исследовательского института сооружений. 1938. № 2.

88. Шулежко П. Г. К теории устойчивости тонких анизотропных плит переменной жесткости. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3.

ИСПРАВЛЕНИЕ К РАБОТЕ Ю. А. МИТРОПОЛЬСКОГО

Медленные процессы в нелинейных колебательных системах со многими степенями свободы. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 2.

В этой работе основной интервал изменения аргумента τ всегда является замкнутым. В статье при указании интервалов изменения τ неравенствами $0 < \tau < L$ по недосмотру автора опущены знаки равенств. Таким образом, везде следует читать $0 \leqslant \tau \leqslant L$ вместо напечатанного $0 < \tau < L$.