О РАВНОВЕСИИ КОЛЬЦЕВОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ СТЕПЕННОМ ЗАКОНЕ УПРОЧНЕНИЯ

А. Г. Костюк (Москва)

Рассмотрим кольцевую пластинку, ограниченную контурами $r = a$, $r = b$, толщина которой есть степенная функция радиуса $h = h_0 \rho^{-\lambda}$, где $\rho = r / a$, предполагая, как обычно, распределение напряжений по толщине равномерным и считая заданными радиальные напряжения на контурах.

Материал пластинки будем считать несжимаемым при законе упрочнения $\sigma_i = N\varepsilon_i^{\mu}$, где σ_i, ε_i — интенсивности напряжений и деформаций, $0 \leqslant \mu \leqslant 1$.

Зависимости теории малых упруго-пластических деформаций [1] для данного случая принимают вид:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_\theta\right), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\left(\sigma_\theta - \frac{1}{2}\sigma_r\right) \tag{1}$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2}, \qquad \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\varepsilon_r^2 + \varepsilon_r\varepsilon_\theta + \varepsilon_\theta^2} \tag{2}$$

Здесь ε_r и ε_θ — деформации, σ_r и σ_θ — напряжения соответственно в радиальном и окружном направлениях. Уравнение равновесия и уравнение совместности деформаций, как известно, имеют вид:

$$\frac{d}{d\rho}(h\sigma_r) + h\,\frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \qquad \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{\rho} = 0 \tag{3}$$

Введем новую переменную $\omega = \sigma_r / \sigma_\theta$. Тогда из уравнения равновесия (3), используя $h = h_0\,\rho^{-\lambda}$, получаем

$$\sigma_\theta = C \operatorname{sign}\sigma_\theta \frac{\rho^\lambda}{|\omega|} \exp\left(\int \frac{1-\omega}{\omega}\,\frac{d\rho}{\rho}\right) \tag{4}$$

С другой стороны, из уравнения совместности (3) при помощи (1), (2), принимая во внимание, что $\sigma_i = N\varepsilon_i^{\mu}$, можно получить

$$\sigma_\theta = D \operatorname{sign}\sigma_\theta \frac{(1-\omega+\omega^2)^{-\frac{1}{2}(1-\mu)}}{|2-\omega|^{\mu}} \exp\left(-3\mu\int\frac{1-\omega}{2-\omega}\,\frac{d\rho}{\rho}\right) \tag{5}$$

В равенствах (4) и (5) C и D — положительные постоянные.

Приравнивая (4) и (5) и взяв от обеих частей получающегося равенства логарифмическую производную по ω, после преобразований получаем

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{d\rho}{d\omega} = \frac{1}{2(1-\lambda-3\mu)}\,\frac{(\omega-2)^2 + 3\mu\omega^2}{(1-\omega+\omega^2)(\omega-p_1)(\omega-p_2)} \tag{6}$$

Величины p_1 и p_2 определяются из соотношения

$$p_{1,2} = \frac{3(1-\mu) - 2\lambda \pm \sqrt{9\mu^2 + 6\mu(1+2\lambda) + (1-2\lambda)^2}}{2(1-\lambda-3\mu)} \tag{7}$$

Для $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ значения p_1 и p_2 всегда действительны.

Интеграл уравнения (6) имеет вид:

$$\rho = A(1-\omega+\omega^2)^\alpha\,|\omega-p_1|^\beta\,|\omega-p_2|^\gamma \exp\left(\delta \operatorname{arc\,tg}\frac{2\omega-1}{\sqrt{3}}\right) \tag{8}$$

Здесь A — постоянная интегрирования,

$$\alpha = \frac{3}{4}\,\frac{(1-\mu)(1-2\lambda-3\mu)}{\Delta\,(1-\lambda-3\mu)^2}, \qquad \beta = \frac{(p_1-2)^2 + 3\mu p_1^2}{2(1-\lambda-3\mu)(p_1-p_2)(1-p_1+p_1^2)}$$

$$\gamma = -\frac{(p_2-2)^2 + 3\mu p_2^2}{2(1-\lambda-3\mu)(p_1-p_2)(1-p_2+p_2^2)}, \qquad \delta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{1-\mu^2}{\Delta\,(1-\lambda-3\mu)^2} \tag{9}$$

при этом

$$\Delta = (1 - p_1 + p_1^2)(1 - p_2 + p_2^2)$$

Из равенства (5) при помощи (6) имеем

$$\sigma_\theta = B(1 - \omega + \omega^2)^k \, |\omega - p_1|^l \, |\omega - p_2|^m \exp\left(n \operatorname{arc\,tg} \frac{2\omega - 1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (10)$$

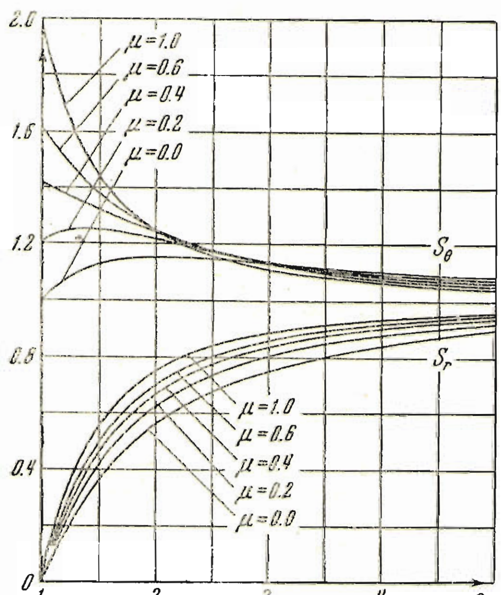
Здесь B — постоянная интегрирования,

$$k = -\frac{1-\mu}{2}\left[1 - \frac{3}{2}\,\frac{\lambda(2\lambda - 1) + 6\mu(\mu + \lambda)}{\Delta(1 - \lambda - 3\mu)^2}\right], \qquad l = -\beta\left(\lambda + 3\mu\,\frac{p_1 - 1}{p_1 - 2}\right)$$

$$m = -\gamma\left(\lambda + 3\mu\,\frac{p_2 - 1}{p_2 - 2}\right), \qquad n = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{(1-\mu)(\lambda + 2\mu)}{\Delta(1 - \lambda - 3\mu)^2} \qquad (11)$$

После определения σ_θ напряжение σ_r находится из равенства $\sigma_r = \omega\sigma_\theta$.

На фигуре представлено распределение напряжений в бесконечной пластинке постоянной толщины для нескольких значений μ; при этом σ — напряжение на бесконечности, $s_r = \sigma_r / \sigma$, $s_\theta = \sigma_\theta / \sigma$.



Отметим частное решение для пластинки постоянной толщины (σ_0 — постоянная интегрирования):

$$\sigma_r = \sigma_0\,\rho^{-\frac{1}{2}(1+3\mu)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1 - 3\mu}{2}\,\sigma_0\,\rho^{-\frac{1}{2}(1+3\mu)} \qquad (12)$$

Оно следует из (8) и (10) при $\omega = p_1 = \text{const}$ и соответствует, например, распределению напряжений в бесконечной пластинке с круговым вырезом, на контуре которого приложено радиальное напряжение σ_0, а на бесконечности напряжения отсутствуют (для $1/3 < \mu \leqslant 1$).

Приняв обычные гипотезы о характере деформации при изгибе [1], можно полученное решение распространить и на случай деформации этой же пластинки равномерно распределенными по ее контурам изгибающими моментами. Для этого достаточно величину λ в выражениях (7), (9) и (11) заменить на $\lambda(\mu + 2)$. Тогда правая часть (10) даст величину $M_0\rho^{\lambda(\mu+2)}$, где M_θ — изгибающий момент в радиальном сечении, ρ дается формулой (8). Второй главный момент $M_r = \omega M_\theta$.

Определение прогиба w приводится в квадратуре

$$w = A_1 + B_1 \int M_0^{\frac{1}{\mu}} (1 - \omega + \omega^2)^{\frac{1-\mu}{2\mu}} (2 - \omega)\,\rho^{\frac{\mu + \lambda\mu + 2\lambda}{\mu}}\, d\rho \qquad (13)$$

Здесь A_1 и B_1 — постоянные интегрирования.

Поступила 27 III 1950 Московский энергетический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.