ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ВСЛЕДСТВИЕ ВНЕЗАПНОГО НАГРЕВА ЕГО ГРАНИЦЫ

В. И. Даниловская (Москва)

Обычно при решении задач термоупругости пренебрегают инерционными членами, входящими в уравнения движения упругого тела. Однако в нестационарных задачах (прогрев, охлаждение) быстрое изменение температурного поля в некоторых случаях вызывает термические напряжения динамического характера, и в такого рода задачах инерционные члены будут играть существенную роль.

В настоящей заметке решается одномерная задача термоупругости с учетом инерционных членов в уравнениях движения упругого тела.

Пусть температура тела задана как функция координаты x и времени t

$$T = T(x, t)$$

Возникающие вследствие неравномерного распределения температуры напряжения будут зависеть от координаты x и времени t. Смещения v, w и напряжения X_y, Z_x считаем равными нулю. В этом случае два из трех уравнений движения удовлетворяются тождественно и остается лишь одно уравнение

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1}$$

Дифференцируя обе части (1) по x и подставляя вместо производной $\partial u / \partial x$ ее выражение через напряжения X_x по закону Гука, получим

$$a^2 \frac{\partial^2 X_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 X_x}{\partial t^2} = s \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}\right) \tag{2}$$

Здесь a — скорость распространения упругой волны, λ и μ — постоянные Ламе, ρ — плотность, s — постоянная, имеющая размерность напряжения

$$s = \alpha(2\mu + 3\lambda)$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Решим задачу о внезапном нагреве границы упругого полупространства, пользуясь уравнением (2).

Температура $T(x, t)$ полупространства удовлетворяет:

уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (x \geqslant 0, t \geqslant 0) \tag{3}$$

начальному условию

$$T(x, t)|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

граничному условию

$$T(x, t)|_{x=0} = T_0 \tag{5}$$

Решение уравнения (3) при условиях (4) и (5) в символах операционного исчисления имеет вид:

$$T^* = \frac{T_0}{p} \exp\left(-x \sqrt{\frac{p}{k}}\right) \tag{6}$$

где

$$T^*(x, p) = \int_0^\infty T(x, t)\, e^{-pt} dt \tag{7}$$

Возникающее вследствие неравномерного нагрева напряжение X_x удовлетворяет уравнению (2), начальным условиям

$$X_x\Big|_{t=0} = \frac{\partial X_x}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{8}$$

граничному условию

$$X_x|_{x=0} = 0 \tag{9}$$

и предельному условию: напряжение X_x остается конечным при $x \to \infty$.

Умножая обе части уравнения (2) на e^{-pt} и интегрируя по t в пределах от нуля до бесконечности, приняв во внимание начальные условия для $X_x(x, t)$ и $T(x, t)$, получим уравнение относительно $X_x{}^*$

$$a^2 \frac{d^2X_x{}^*}{dx^2} - p^2 X_x{}^* = spT_0 \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{k}}\right) \tag{10}$$

с граничным условием

$$X_x{}^*|_{x=0} = 0 \tag{11}$$

и предельным условием: $X_x{}^*$ — остается конечной величиной при $x \to \infty$.

Решение уравнения (10) имеет вид:

$$X_x{}^* = \frac{sT_0}{p - a^2/k} \exp\frac{-px}{a} - \frac{sT_0}{p - a^2/k} \exp\left(-x\sqrt{\frac{p}{k}}\right) \tag{12}$$

При построении оригинала первого слагаемого в (12) воспользуемся теоремой запаздывания, второго — теоремой умножения операционного исчисления. Окончательно для X_x получим

(13)

$$X_x = -sT_0 \int_0^t \exp\left[\frac{a^2}{k}(t-\tau)\right] \frac{x}{2\sqrt{\pi k \tau^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k\tau}\right) d\tau \qquad \text{для } t < \frac{x}{a}$$

$$X_x = sT_0 \left\{\exp\left[\frac{a^2}{k}\left(t - \frac{x}{a}\right)\right] - \int_0^t \exp\left[\frac{a^2}{k}(t-\tau)\right] \frac{x}{2\sqrt{\pi k \tau^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4k\tau}\right) d\tau\right\}$$

$$\text{для } t > \frac{x}{a}$$

Входящий в это выражение интеграл (обозначим его через J) можно привести к более простому виду, если сделать замену переменной интегрирования, положив

$$\frac{x}{2\sqrt{k\tau}} = \theta$$

Эта замена, как нетрудно показать, корректна при любом значении x, включая $x = 0$. Получим

$$J = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_\chi^\infty \exp\left[-\left(\frac{a^2x^2}{4k^2\theta^2} + \theta^2\right)\right] d\theta \qquad \left(\chi = \frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) \tag{14}$$

Вычисление последнего интеграла можно свести к вычислению гиперболических функций и интеграла вероятностей, если воспользоваться формулой, приведенной в работе [1]:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_m^\infty \exp\left(-\frac{\lambda^2}{\theta^2} - \theta^2\right) d\theta = \operatorname{ch} 2\lambda - \frac{1}{2} e^{2\lambda} \Phi\left(m + \frac{\lambda}{m}\right) - \frac{1}{2} e^{-2\lambda} \Phi\left(m - \frac{\lambda}{m}\right) \tag{15}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0 e^{-\theta^2}d\theta, \; \Phi(-x) = -\Phi(x)$$

Если ввести безразмерную координату $\xi = xa/k$ и положить время $t = n^2x/a\xi$ где n^2 может принимать любое значение, заключенное между нулем и бесконечностью, то, принимая во внимание (14) и (15), выражение (13) для X_x можно привести к виду, более удобному для вычислений:

для моментов времени $t \leqslant x/2a$

$$X_x = -\frac{sT_0}{2}\left\{e^{\xi^2(n^2-1)}\left[1-\Phi\left(\xi\frac{1-2n^2}{2n}\right)\right]+e^{\xi^2(n^2+1)}\left[1-\Phi\left(\xi\frac{2n^2+1}{2n}\right)\right]\right\}$$

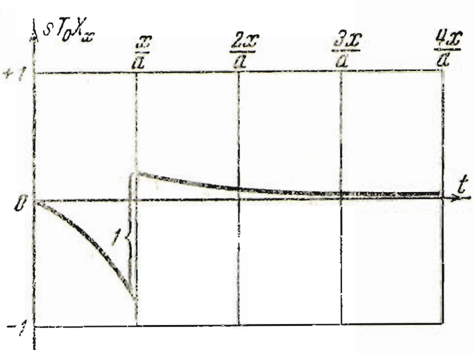
для моментов времени $x/2a \leqslant t < x/a$

$$X_x = -\frac{sT_0}{2}\left\{e^{\xi^2(n^2-1)}\left[1+\Phi\left(\xi\frac{2n^2-1}{2n}\right)\right]+e^{\xi^2(n^2+1)}\left[1-\Phi\left(\xi\frac{2n^2+1}{2n}\right)\right]\right\}$$

для моментов времени $t > x/a$

$$X_x = \frac{sT_0}{2}\left\{e^{\xi^2(n^2-1)}\left[1-\Phi\left(\xi\frac{2n^2-1}{2n}\right)\right]-e^{\xi^2(n^2+1)}\left[1-\Phi\left(\xi\frac{2n^2+1}{2n}\right)\right]\right\}$$

Зафиксируем теперь какое-либо сечение $x = \text{const}$ (или, что то же самое, $\xi = \text{const}$) и посмотрим, как будет меняться напряжение X_x с течением времени в этом сечении.



До момента времени $t = x/a$ напряжение X_x растет от нуля до некоторого отрицательного значения, величина которого всегда меньше, чем sT_0. В момент времени $t = x/a$ (т. е. в тот момент времени, когда упругая волна, начавшая свое движение от границы полупространства в момент $t = 0$, достигнет фиксированного сечения) напряжение X_x делает скачок на величину sT_0 в область положительных значений и затем быстро убывает до нуля. На фигуре дан график изменения напряжения X_x с течением времени в сечении $\xi = 1$.

Таким образом при внезапном нагреве границы упругого тела в нем возникают кратковременные растягивающие и сжимающие напряжения порядка sT_0.

Если бы в уравнениях движения упругого тела инерционные члены не учитывать, то напряжение X_x в этой задаче вообще получилось бы равным нулю.

Поступила 9 II 1950

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. О неустановившихся движениях грунтовых вод при фильтрации из водохранилищ. ПММ. 1949. Т. XIII. вып. 2.