# ЗАМЕЧАНИЕ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

**Н. П. Еругин** (Ленинград)

Пусть дана система дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = v(x, y) \tag{1}$$

Предполагаем выполнение равенств Коши

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \tag{2}$$

Положим

$$z = x + iy, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

Тогда систему (1) можно представить в виде

$$\frac{dz}{dt} = u(x, y) + iv(x, y) = F(z) \tag{3}$$

где $F(z)$ — аналитическая функция.

Из уравнения (3) получаем интеграл системы (1) в конечном виде:

$$\Phi(z) = \int \frac{dz}{F(z)} = t + C \tag{4}$$

Заметим, что если $u(x, y)$ и $v(x, y)$ полиномы, то и $F(z)$ будет полином.

*Пример.* Пусть

$$\frac{dx}{dt} = y + \alpha x^2 + 2\beta xy - \alpha y^2, \quad \frac{dy}{dt} = -x - \beta x^2 + 2\alpha xy + \beta y^2 \tag{5}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — постоянные.

Вводя обозначение $\alpha - i\beta = a$, легко получаем

$$\frac{dz}{dt} = -iz + az^2, \qquad z = -i\frac{Ce^{-it}}{1 - aCe^{-it}} \tag{6}$$

где $C$ — произвольная постоянная.

Отделяя здесь вещественную и мнимую части, получим выражения для $x$ и $y$.

Заметим, что для системы (5), как это видно из равенства (6), начало координат будет центром. Для многих других случаев также легко решается проблема центра и фокуса.

Отметим еще, что если в системе (1) правые части содержат переменную $t$, но условия (2) выполнены, то во многих случаях решение также находится в квадратурах. Например, это будет для системы

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x + \beta(t)y + P(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = -\beta(t)x + \alpha(t)y + Q(x, y, s) \tag{7}$$

где $P(x, y, t)$ и $Q(x, y, t)$ — однородные полиномы относительно $x$ и $y$ с коэффициентами, зависящими от $t$.

Если полиномы $P$ и $Q$ удовлетворяют условию (2), то уравнение (3) получится в виде

$$\frac{dz}{dt} = a(t)z + b(t)z^n$$

и, следовательно, интеграл легко находится в квадратурах.

Поступила 17 I 1950