ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р. С. Гусарова (Москва)

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Если $p(x)$ — действительная непрерывная периодическая функция периода π и удовлетворяет условиям

$$p(x) \geqslant n^2 \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\pi \int_0^\pi p(x)\,dx \leqslant 4(n+1) + n^2\left(\frac{\pi^2}{2} + 4\right) \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ 3{,}4)$$

то все решения уравнения

$$y'' + p(x)\,y = 0 \tag{1}$$

ограничены для всех значений x.

Доказательство. Пусть $A_0, E_0, A_1, E_1, A_2, \ldots$ — волны кривой (см. фигуру), удовлетворяющей уравнению (1).

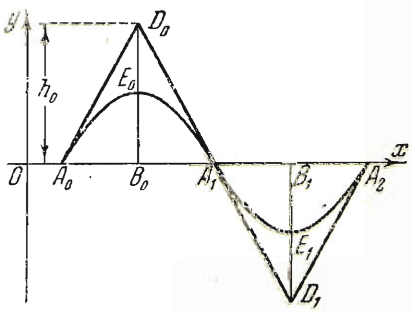
Так как $p(x) \geqslant n^2$, то по теореме сравнения расстояние A_iF_{i+1} между соседними нулями любого решения уравнения (1) меньше или равно π / n.

Можно доказать, что при $p(x) \neq \mathrm{const}$ существует такой нуль A_k, что расстояние от него до следующего нуля A_{k+1} строго меньше π / n. Будем предполагать, что $A_0A_1 < \pi / n$. Тогда

$$A_0A_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \cdots + A_{n-1}A_n < \pi$$

Допустим, что $A_0A_{n+1} \leqslant \pi$. Тогда существует хотя бы один нуль A_k такой, что

$$A_kA_{k+1} \leqslant \frac{\pi}{n+1}$$



Пусть для определенности

$$A_0A_1 \leqslant \frac{\pi}{n+1}$$

Обозначим $\operatorname{tg} D_kA_kB_k = m_k$. Из уравнения (1) следует, что

$$\int_{A_0}^{A_1} p(x)\,y\,dx = m_0 + m_1$$

Так как $p(x) \geqslant n^2$, то $p(x) = n^2 + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — непрерывная периодическая функция периода π, причем $\varphi(x) \geqslant 0$. Таким образом,

$$\int_{A_0}^{A_1} p(x)\,y\,dx = \int_{A_0}^{A_1} n^2 y\,dx + \int_{A_0}^{A_1} \varphi(x)\,y\,dx$$

Очевидно, что (см. фигуру)

$$\int_{A_0}^{A_1} y\,dx < A_0A_1 \frac{h_0}{2}$$

Следовательно,

$$\int_{A_0}^{A_1} p(x)\,y\,dx < n^2 A_0A_1 \frac{h_0}{2} + h_0 \int_{A_0}^{A_1} \varphi(x)\,dx$$

Поэтому

$$h_0\left(\frac{n^2 A_0 A_1}{2}+\int\limits_{A_0}^{A_1}\varphi(x)\,dx\right)>m_0+m_1\quad\left(h_0=\frac{A_0A_1\,m_0m_1}{m_0+m_1}\right)$$

Отсюда

$$\pi\left(\frac{n^2 A_0 A_1}{2}+\int\limits_{A_0}^{A_1}\varphi(x)\,dx\right)>\frac{(m_0+m_1)^2}{m_0m_1}\,(n+1)=\left[4+\frac{(m_0-m_1)^2}{m_0m_1}\right](n+1)$$

или

$$\pi\left(\frac{n^2 A_0 A_1}{2}+\int\limits_{A_0}^{A_1}\varphi(x)\,dx\right)>4\,(n+1)$$

Но, так как вообще

$$\int\limits_{A_k}^{A_{k+1}}p(x)\,|\,y\,|\,dx=m_k+m_{k+1},\qquad A_kA_{k+1}\leqslant\frac{\pi}{n}$$

то рассуждения, аналогичные предыдущим, дают

$$\pi\left(\frac{n^2 A_k A_{k+1}}{2}+\int\limits_{A_k}^{A_{k+1}}\varphi(x)\,dx\right)>n\,\frac{(m_k+m_{k+1})^2}{m_k+m_{k+1}}>4n\quad(k=1,2,\ldots,n)$$

Поэтому

$$\pi\left(\frac{n^2}{2}\sum_{k=1}^{n}A_kA_{k+1}+\int\limits_{A_0}^{A_{n+1}}\varphi(x)\,dx\right)>4n^2$$

$$\pi\left(\frac{n^2}{2}\sum_{k=0}^{n}A_kA_{k+1}+\int\limits_{A_0}^{A_{n+1}}\varphi(x)\,dx\right)>4n^2+4\,(n+1)$$

По предположению $A_0A_{n+1}\leqslant\pi$. Следовательно,

$$\frac{\pi^2 n^2}{2}+\pi\int\limits_0^{\pi}\varphi(x)\,dx>4\,(n+1)+4n^2$$

$$\pi\int\limits_0^{\pi}p(x)\,dx=\pi^2n^2+\pi\int\limits_0^{\pi}\varphi(x)\,dx>4\,(n+1)+n^2\left(\frac{\pi^2}{2}+4\right)$$

Это неравенство получено в предположении, что $A_0A_{n+1}\leqslant\pi$. Поэтому, если

$$\pi\int\limits_0^{\pi}p(x)\,dx\leqslant 4\,(n+1)+n^2\left(\frac{\pi^2}{2}+4\right)$$

то $A_0A_{n+1}>\pi$. Но $A_0A_n<\pi$. Это означает, что нуль A_0 произвольного решения уравнения (1) периодически с периодом π не повторяется. Этого достаточно для ограниченности всех решений[1] уравнения (1). Полученное неравенство не противоречиво для $n\leqslant 4$. При $n=0$ оно превращается в неравенство Ляпунова

$$\pi\int\limits_0^{\pi}p(x)\,dx\leqslant 4$$

Поступила 9 III 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусарова Р. С. Об ограниченности решений линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.