Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950
Институт механики Академии Наук Союза ССР

О РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ СИЛЫ

В. В. Степанов (Москва)

Рассмотрим вопрос о наличии или отсутствии резонанса для уравнения

$$\ddot{x} + p(t)\,x = f(t) \tag{1}$$

где $p(t)$ — периодическая функция периода 2π, функция $f(t)$ — тоже периодическая функция. Этот вопрос важен для ряда приложений; несмотря на простоту постановки и решения этого вопроса, решение его в литературе не встречается.

Нас будет, естественно, интересовать случай, когда однородное уравнение

$$\ddot{x} + p(t)\,x = 0 \tag{2}$$

имеет устойчивое решение; при этом мы ограничимся общим случаем непериодических устойчивых решений уравнения (2). В таком случае фундаментальная система уравнения (2) имеет вид:

$$x_1 = e^{i\alpha t}\varphi_1(t), \quad x_2 = e^{-i\alpha t}\varphi_2(t)$$

где α — не целое (положительное) число, φ_1 и φ_2 — периодические функции периода 2π. Представим эти решения рядами Фурье (равномерно сходящимися)

$$x_k = e^{\pm i\alpha t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^{(k)} e^{int} \qquad (k = 1, 2)$$

Напишем частное решение уравнения (1) по элементарной формуле

$$X(t) = -x_1(t)\int^t x_2(\tau) f(\tau)\,d\tau + x_2(t)\int^t x_1(\tau) f(\tau)\,d\tau \tag{3}$$

где знаком $\int$ мы обозначаем первообразную, не содержащую в своем разложении постоянного члена.

1. Пусть сначала возмущающая сила представляет простое гармоническое колебание $f(t) = Ae^{i\lambda t}$. В этом случае

$$\int^t x_k(\tau) f(\tau)\,d\tau = A\int^t e^{i(\pm\alpha+\lambda)\tau}\sum_n b_n^{(k)} e^{in\tau}\,d\tau \tag{4}$$

Если частота возмущающей силы λ равна $n \pm \alpha$ (n целое), мы имеем под знаком квадратуры постоянный член, т. е. имеется резонанс и неограниченное частное решение. Если же $\lambda \neq n \pm \alpha$, то формула (4) дает

$$\int^t x_k(\tau) f(\tau)\,d\tau = A\int^t e^{i(\pm\alpha+\lambda)\tau}\sum_n b_n^{(k)} e^{in\tau}\,d\tau =$$

$$= A\sum \frac{b_n^{(k)}}{i(n\pm\alpha+\lambda)} e^{i(\pm\alpha+\lambda)t} e^{int} = Ae^{i(\pm\alpha+\lambda)t}\,\Phi_k(t)$$

где Φ_k ($k = 1, 2$) — периодические функции периода 2π. Для частного решения (1) получим из (3)

$$X(t) = Ae^{i\lambda t}\{\Phi_1(t)\,\varphi_2(t) - \Phi_2(t)\,\varphi_1(t)\}$$

Таким образом, если $\lambda \neq n \pm \alpha$, то решение неоднородного уравнения остается ограниченным; в частности отсутствует резонанс.

2. Пусть теперь возмущающая сила есть общая непрерывная периодическая функция времени. Сначала рассмотрим случай, когда она имеет период 2π (равный периоду коэффициента $p(t)$):

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{int}$$

В таком случае $x_k(\tau) f(\tau)$ есть произведение $e^{\pm i\alpha\tau}$ на периодическую функцию периода 2π:

$$x_k(\tau) f(\tau) \approx e^{\pm i\alpha\tau} \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n^{(k)} e^{int}$$

Отсюда получаем

$$\int^t x_k(\tau) f(\tau)\, d\tau = e^{\pm i\alpha t} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_n^{(k)}}{i(n \pm \alpha)} e^{int} = e^{\pm i\alpha t}\, \Psi_k(t) \qquad (k = 1, 2)$$

где Ψ_k — дифференцируемая периодическая функция периода 2π. Частное решение, которое дается формулой (3), принимает теперь вид:

$$X(t) = -e^{i\alpha t} \varphi_1(t) e^{-i\alpha t} \Psi_2(t) + e^{-i\alpha t} \varphi_2(t) e^{i\alpha t} \Psi_1(t) = \\ = \Psi_1(t) \varphi_2(t) - \Psi_2(t) \varphi_1(t) \qquad (5)$$

Мы имеем периодическое решение периода 2π; таким образом, если период возмущающей силы $f(t)$ равен периоду коэффициента $p(t)$, резонанс отсутствует и все решения ограничены.

Замечание. Легко видеть, что уравнение (1) имеет частное решение вида (5) также в предположении, что однородное уравнение (2) имеет действительные характеристические показатели

$$x_1 = e^{\beta t} \varphi_1(t), \qquad x_2 = e^{-\beta t} \varphi_2(t) \qquad (\beta > 0)$$

Таким образом, уравнение (1), в котором $p(t)$ и $f(t)$ имеют равный период, в случае неравных характеристических показателей всегда имеет частное периодическое решение. Остается рассмотреть случай, когда $f(t)$ имеет период $2\pi/\lambda$:

$$f(t) \approx \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{i\lambda nt}$$

Если λ рационально, то $p(t)$ и $f(t)$ допускают общий период и предыдущие рассуждения остаются в силе. Итак, предполагаем, что λ — иррационально. Теперь под знаком квадратур в формуле (3) стоят квазипериодические функции вида

$$e^{\pm\alpha i\tau} \sum_{m,\, n = -\infty}^{+\infty} b_m^{(k)} A_n e^{i(m\lambda + n)\tau}$$

и неопределенные интегралы от таких функций могут быть неограниченными (в силу наличия малых знаменателей).

Итак, в рассматриваемом случае возмущенное движение вообще неограниченно по амплитуде (хотя резонанс в узком смысле слова имеет место лишь при выполнении равенства $m\lambda + n \pm \alpha = 0$ для некоторых целых m и n).

Аналогичные результаты можно получить для линейного уравнения n-го порядка с периодическими коэффициентами, но мы не будем останавливаться на них ввиду меньшего значения для приложений.

Поступила 27 XI 1949