Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950
Институт механики Академии Наук Союза ССР

ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ВИДА

Ю. Ф. Харкевич

(Иркутск)

Графический метод решения краевых задач уравнения Лапласа, представляющий собой перенесение в область графики известного численного метода, основанного на замене дифференциального уравнения уравнением в конечных разностях, развит в работе Д. Ю. Панова [1]; этот метод получил название графического метода сеток. В настоящей работе дается применение метода сеток к графическому решению уравнений в частных производных параболического вида, причем для определенности рассматривается уравнение теплопроводности.

1. Тонкий стержень ограниченной длины. Пусть имеется тонкий стержень, поперечными размерами которого можно пренебречь по сравнению с его длинной d, изолированный от окружающего пространства. В начальный момент $t=0$ известен закон распределения температуры в стержне, а на его концах удерживается либо постоянная температура, либо изменяющаяся по известному закону. Требуется найти закон распределения температуры в точках стержня для любого момента времени $t>0$.

Очевидно, вопрос сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \tag{1.1}$$

где $u = u(x, t)$, при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x) \tag{1.2}$$

и двух граничных условиях

$$u|_{x=0} = \varphi_1(t), \qquad u|_{x=d} = \varphi_2(t) \tag{1.3}$$

Коэффициент a^2, как известно, зависит от плотности ε стержня, его внутренней теплопроводности ρ и удельной теплоемкости C и вычисляется по формуле

$$a^2 = \frac{1}{k^2} \qquad \left(k^2 = \frac{\rho}{C\varepsilon}\right)$$

Решение уравнения (1.1) по методу Фурье дает частный интеграл в форме

$$u(x, t) = e^{\alpha^2 k^2 t}(A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)$$

где коэффициенты α, A и B определяются из условий (1.2) и (1.3).

Обратимся к графическому решению уравнения (1.1). Заменяя в нем частные производные через конечные разности, получим

$$\frac{u_{i-1,\,k} - 2u_{i,\,k} + u_{i+1,\,k}}{h^2} = a^2 \frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k}}{l} \tag{1.4}$$

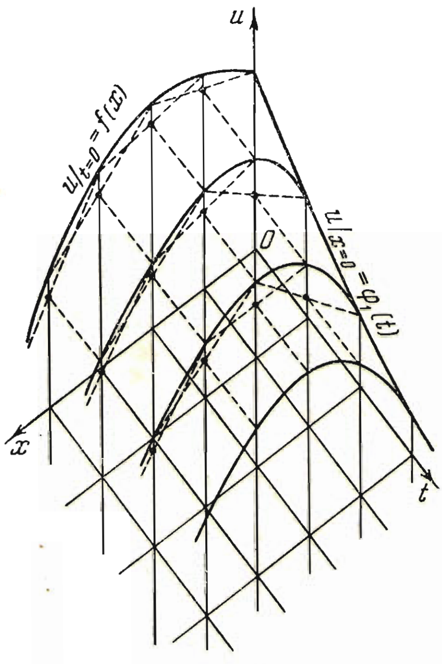
Здесь через h и l обозначены шаги разностей прямоугольной сетки соответственно по осям x и t, а для значения функции введено обозначение $u_{i,\,k} = u(ih, kl)$.

После преобразования уравнение (1.4) примет вид:

$$u_{i,\,k+1} = \left(1 - \frac{2l}{a^2h^2}\right)u_{i,\,k} + \frac{l}{a^2h^2}(u_{i-1,\,k} + u_{i+1,\,k}) \tag{1.5}$$

По уравнению (1.5), зная значение функции u в точках $i-1$, i, $i+1$ слоя k, мы можем вычислить значение u в точке i следующего слоя $k+1$.

Наиболее простая и удобная для графического интегрирования формула получается из (1.5) при



Фиг. 1

$$l = \frac{a^2h^2}{2} \tag{1.6}$$

так как тогда

$$u_{i,\,k+1} = \frac{u_{i-1,\,k}+u_{i+1,\,k}}{2} \tag{1.7}$$

Построение аппликат интегральной поверхности уравнения производится следующим образом.

На оси x в выбранном масштабе откладываем длину данного стержня d и, задавшись шагом разности $h = d/n$, по формуле (1.6) вычисляем шаг разности l по оси t. По уравнению (1.2) строим в плоскости $t=0$ кривую начального распределения температуры в стержне (фиг. 1), а по уравнениям (1.3) в плоскостях $x=0$ и $x=d$ — кривые изменения температуры на концах стержня. Для построения ординат кривой распределения температуры в первом слое для момента $t_1 = l$ прикладываем линейку к концам ординат $u_{0,\,0}$ и $u_{2,\,0}$ и отмечаем точку пересечения на ординате $u_{1,\,0}$, отрезок которой от оси x до помеченной точки дает величину ординаты $u_{1,\,1}$. Приложив линейку к концам ординат $u_{1,\,0}$ и $u_{3,\,0}$, отмечаем точку пересечения на ординате $u_{2,\,0}$, отрезок которой от оси x до отмеченной точки дает ординату $u_{2,\,1}$, и так далее. Полученные ординаты $u_{1,\,1}, u_{2,\,1}, \ldots, u_{n-1,\,1}$ переносим параллельно оси u в точки (1,1), (2,1), ..., $(n-1, 1)$ первого слоя. Соединив концы ординат $u_{0,\,1}, u_{1,\,1}, \ldots, u_{n,\,1}$ плавной кривой, получим кривую распределения температуры в стержне для момента $t_1 = l$. Построив средние арифметические ординат этой кривой и перенеся их в точки (1,2), (2,2), ..., $(n-1,2)$, будем знать величины ординат $u_{0,\,2}, u_{1,\,2}, \ldots, u_{n,\,2}$, по которым построим кривую распределения температуры в стержне во втором слое для момента $t_2 = 2l$, и так далее. Очевидно, что все эти кривые лежат на поверхности, удовлетворяющей уравнению (1.7). Практически ось u и ординаты кривых следует направлять по диагоналям прямоугольной сетки и не искажать в аксонометрии прямоугольную область интеграции. Это значительно облегчает построения и чтение чертежа.

Пример 1. Пусть тонкий медный стержень длины $d = 23$ см, изолированный от окружающего пространства, имеет при $t=0$ заданное распределение температуры:

$$u\,|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{46} + \cos\frac{\pi x}{46}$$

а на его концах поддерживается температура

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=d} = \max\exp\frac{-k^2\pi^2 t}{46}$$

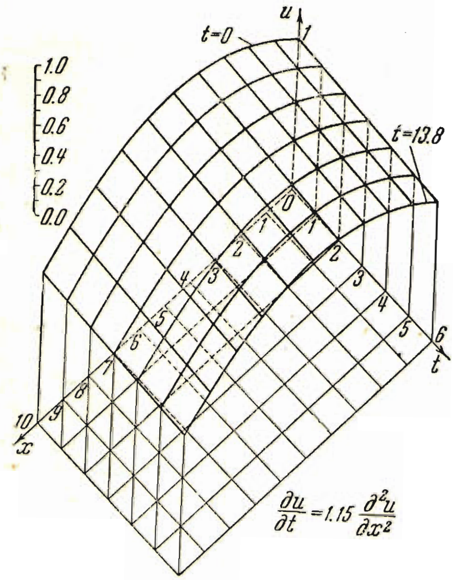
Требуется найти функцию $u(x, t)$ для $t > 0$. Взяв из справочника физических констант значения ρ, ε и C для меди, найдем $k^2 = 1.15$.

Таким образом будем иметь уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 1.15 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

На фиг. 2 показано построение при графическом решении этого уравнения для $h = 2.3$ и $l = h^2/\,2k^2 = 2.3$, причем интегрирование доведено до момента $t = 13.8$ сек. По оси u масштаб взят в десять раз крупнее. В табл. 1 приведены данные графического решения в сопоставлении с аналитическим, по формуле

$$u\,(x,\, t) = e^{-0.005t}\,(\cos 0.068x + \sin 0.068x)$$



Фиг. 2

Таблица 1

x	$t = 0$	$t = 13.8$ графич. решение	$t = 13.8$ аналит. решение
0	1.000	0.935	0.933
2.3	1.141	1.071	1.065
4.6	1.259	1.181	1.173
6.9	1.345	1.259	1.255
9.2	1.396	1.305	1.302
11.5	1.414	1.322	1.320
13.8	1.396	1.305	1.302
16.1	1.345	1.259	1.255
18.4	1.259	1.181	1.173
20.7	1.141	1.071	1.065
23.0	1.000	0.935	0.933

Если стержень не изолирован от окружающего пространства, то будет происходить потеря тепла посредством лучеиспускания, теплопроводности и конвекции и дифференциальное уравнение в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho' u \tag{1.8}$$

где $\rho' = rp\,/\,C\varepsilon s$ — коэффициент внешней теплопроводности, r — постоянная излучения, p — периметр поперечного сечения, s — его площадь, а C, ε и k^2 имеют прежнее значение. Если считать лучеиспускание происходящим по закону Ньютона, то граничными условиями будут

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\rho'}{\rho}\, u\right|_{x=0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=d} - \left.\frac{\rho'}{\rho}\, u\right|_{x=d} = 0 \tag{1.9}$$

Кроме того, необходимо, чтобы удовлетворялось и начальное условие (1.2).

Подстановкой $u = e^{-\rho' t} u^*$ уравнение (1.8) легко приводится к однородному

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \tag{1.10}$$

и вопрос о решении уравнения (1.8) сводится к решению уравнения (1.10) при условиях (1.2) и (1.9). Так как частный интеграл уравнения (1.8) будет отличаться от частного интеграла уравнения (1.10) лишь множителем $e^{-\rho' t}$, то, выполнив графически интегрирование уравнения (1.10), надо численные значения ординат температурных кривых умножить на $e^{-\rho' t}$. Особенностью здесь является построение значений функции u на границах сеточной области, т. е. в точках сетки на прямых $x = 0$ и $x = d$, по нормальным производным из условий (1.9).

Пусть u_0, u_1, u_2, ... и u_0', u_1', u_2', ... неизвестные значения u, подлежащие определению в точках сетки, соответственно на границах $x = 0$ и $x = d$. Значения

u_0 и u_0' находим из условия (1.2), так как $u_0 = f(0)$, а $u_0' = f(d)$, для остальных же значений u выведем приближенную формулу, выразив нормальную производную в граничных условиях (1.9) через нормальную разность $u_k - u_{(k)}$ (соответственно $u_k - u_{(k)}'$), где u_k — значение u в точке $(0, k)$ на оси t и $u_{(k)}$ — значение u в ближайшей внутренней точке сетки $(1, k)$. Положим

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_k - u_{(k)}}{h}$$

где h — шаг сетки на оси x; тогда первое из условий (1.9) заменится приближенным

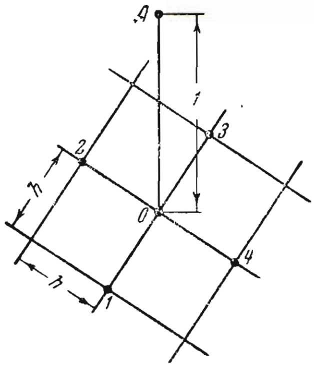
$$\frac{u_k - u_{(k)}}{h} + \frac{\rho'}{\rho} u_k = 0$$

Отсюда

$$u_k = \frac{u_{(k)}}{1+q} \qquad \left(q = \frac{h\rho'}{\rho}\right) \tag{1.11}$$

Во втором условии (1.9) мы должны положить

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx -\frac{u_k' - u_{(k)}'}{h}, \quad \text{или} \quad u_k' = \frac{u_{(k)}}{1+q} \tag{1.12}$$



Фиг. 3

Графически процесс построения значений u на границах сеточной области совершается так же, как и при численном решении уравнений теплопроводности.

2. Тонкая пластинка. Если имеется тонкая прямоугольная пластинка, изолированная от окружающего пространства, и в момент $t = 0$ известен закон распределения температуры в ее внутренних точках и на границе, то нахождение распределения температуры в любой момент $t > 0$ сводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.1}$$

где $u = u(x, y, t)$ при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x, y) \tag{2.2}$$

и граничных условиях

$$u|_{x=0} = \varphi_1(y, t), \quad u|_{x=m} = \varphi_2(y, t), \quad u|_{y=0} = \psi_1(x, t), \quad u|_{y=n} = \psi_2(x, t) \tag{2.3}$$

если стороны пластинки m и n приняты за координатные оси x и y.

Искомая функция $u = u(x, y, t)$ представляет семейство поверхностей, зависящих от одного параметра t, следовательно, при фиксированном значении t можно построить одну поверхность семейства, занумерованную соответствующим значением t. Это позволяет осуществить графическое интегрирование уравнения (2.1).

Построим в выбранном масштабе прямоугольник со сторонами m и n, покроем его квадратной сеткой с шагом h и обозначим через l шаг сетки на оси переменной t, которая в построениях участвовать не будет, так как уступит место оси u. Заменяя в уравнении (2.1) частные производные конечными разностями в точках 0, 1, 2, 3, 4 сетки (фиг. 3), получим разностное уравнение

$$u_A = \left(1 - \frac{4l}{a^2h^2}\right)u_0 + \frac{l}{a^2h^2}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4) \tag{2.4}$$

которое приближенно определяет значение функции u в точке A пространственной области интеграции. Если между h и l возьмем соотношение

$$l = \frac{a^2h^2}{4} \tag{2.5}$$

то получим уравнение

$$u_A = \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{4} \tag{2.6}$$

из которого видно, что для построения интегральных поверхностей при каждом фиксированном значении t надо графически находить среднее арифметическое аппликат в точках 1, 2, 3, 4, что выполняется способом, указанным в работе[1].

Построив по условиям (2.2) и (2.3) поверхность начального распределения температуры, мы сможем по формуле (2.6) последовательно построить интегральные поверхности, отвечающие значениям $t = l, 2l, 3l, \ldots$

Пример 2. Тонкая прямоугольная никелевая пластинка размерами $m = 18$ см и $n = 25.2$ см, изолированная от окружающего пространства, нагрета в центре так, что в момент $t = 0$ распределение температуры определяется уравнением

$$u\,|_{t=0} = \cos\frac{\pi x}{18}\cos\frac{\pi y}{126} \qquad \text{(a)}$$

Найти закон распределения температуры для моментов $t > 0$, если периметр пластинки удерживается при постоянной температуре 0°.

Так как для никеля $k^2 = 0.15$, то для решения задачи получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.15\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

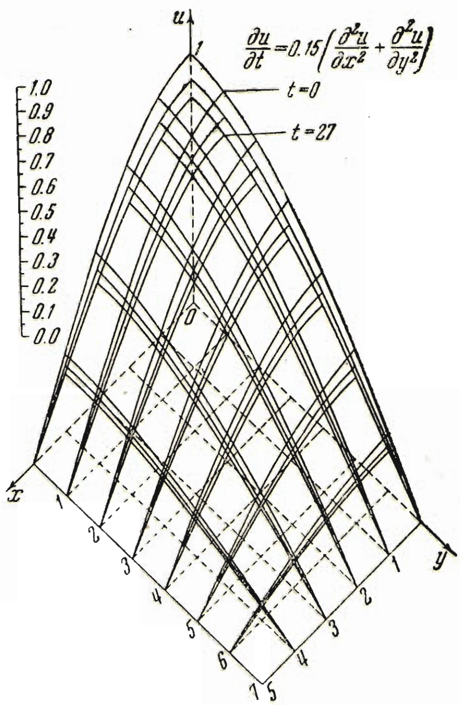
$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=m} = 0$$

$$u\,|_{y=0} = u|_{y=n} = 0$$

Поместим начало координат в центре пластинки, а оси x и y направим параллельно ее сторонам m и n.

Возьмем шаг квадратной сетки $h = 1.8$ см, тогда из соотношения (2.5) найдем $l = 5.4$ сек.

Схема построения при графическом интегрировании по формуле (2.6) представлена на фиг. 4, а полученные значения функции u для $t = l = 27$ сек. для четверти пластинки даны в табл 2 в сопоставлении со значениями, вычисленными из аналитического решения:



Фиг. 4

$$u\,(x, y, t) = e^{-0.007t}\cos 0.175x \cos 0.125y$$

Если пластинка не изолирована от окружающего пространства, то для решения задачи будем иметь неоднородное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \rho' t \qquad (2.7)$$

при том же начальном условии (2.2), что же касается граничных условий, то они могут быть заданы либо по типу (1.9) на каждой стороне пластинки, либо в самом общем случае в виде уравнения

$$\beta u + \delta\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma \qquad (2.8)$$

где β, δ и γ — заданные функции переменных x, y, t, определенные в каждой точке границы, а нормальная производная берется во внешней нормали к границе. В первом случае значения функции u для каждого фиксированного значения t вычисляются, как и для стержня, по формуле (1.11) с той лишь разницей, что аппликаты во внутренних точках области строятся по формуле (2.6). Во втором же

Таблица 2

Коорд. точки	Графич. решение	Аналит. решение	Коорд. точки	Графич. решение	Аналит. решение	Коорд. точки	Графич. решение	Аналит. решение
(0.0)	0.822	0.828	(1.0)	0.788	0.789	(2.0)	0.662	0.670
(0.1)	0.800	0.806	(1.1)	0.760	0.766	(2.1)	0.641	0.651
(0.2)	0.732	0.745	(1.2)	0.705	0.710	(2.2)	0.592	0.601
(0.3)	0.632	0.637	(1.3)	0.604	0.606	(2.3)	0.511	0.515
(0.4)	0.495	0.516	(1.4)	0.476	0.491	(2.4)	0.400	0.416
(0.5)	0.335	0.356	(1.5)	0.318	0.338	(2.5)	0.270	0.288
(0.6)	0.165	0.182	(1.6)	0.158	0.173	(2.6)	0.137	0.147
(0.7)	0.000	0.000	(1.7)	0.000	0.000	(2.7)	0.000	0.000
(3.0)	0.473	0.484	(4.0)	0.245	0.256	(5.0)	0.000	0.000
(3.1)	0.460	0.471	(4.1)	0.239	0.249	(5.1)	0.000	0.000
(3.2)	0.420	0.436	(4.2)	0.215	0.230	(5.2)	0.000	0.000
(3.3)	0.358	0.374	(4.3)	0.170	0.197	(5.3)	0.000	0.000
(3.4)	0.280	0.302	(4.4)	0.146	0.160	(5.4)	0.000	0.000
(3.5)	0.190	0.209	(4.5)	0.101	0.111	(5.5)	0.000	0.000
(3.6)	0.099	0.107	(4.6)	0.051	0.056	(5.6)	0.000	0.000
(3.7)	0.000	0.000	(4.7)	0.000	0.000	(5.7)	0.000	0.000

случае значения u на границе вычисляются по формуле

$$u_k = \frac{\gamma + \nu u_{(k)}}{\beta + \nu} \tag{2.9}$$

которая получается из (2.8) при замене нормальной производной через нормальную разность $u_k - u_{(k)}$, а $\nu = \delta / h$.

Построение аппликат во внутренних точках области производится также по формуле (2.6). Уравнение (2.7) подстановкой $u = e^{-\rho' t} u^*$ приводится предварительно к однородному вида (2.1).

3. Прямоугольный параллелепипед. Если прямоугольный параллелепипед изолирован от окружающего пространства и в момент $t = 0$ известен закон распределения температуры и заданы условия на его границе (гранях), то для нахождения функции распределения температуры в точках параллелепипеда в любой момент $t > 0$ надо решить уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \tag{3.1}$$

где $u = u(x, y, z, t)$, при начальном условии

$$u|_{t=0} = f(x, y, z) \tag{3.2}$$

и условиях на границе

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= \varphi_1(y, z, t), \quad u|_{y=0} = \psi_1(x, z, t), \quad u|_{z=0} = \chi_1(x, y, t) \\ u|_{x=m} &= \varphi_2(y, z, t), \quad u|_{y=n} = \psi_2(x, z, t), \quad u|_{z=p} = \chi_2(x, y, t) \end{aligned} \tag{3.3}$$

где m, n, p — ребра параллелепипеда, принятые за координатные оси x, y, z.

Будем искать частное решение в виде произведения двух функций

$$u(x, y, z, t) = v(x, y, t)\, w(z, t) \tag{3.4}$$

Тогда уравнение (3.1) при помощи (3.4) распадется на два уравнения:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = a^2 \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = a^2 \frac{\partial w}{\partial t} \tag{3.5}$$

при соответствующих начальных условиях

$$v|_{t=0} = \Phi(x, y), \qquad w|_{t=0} = F(z)$$

и граничных условиях

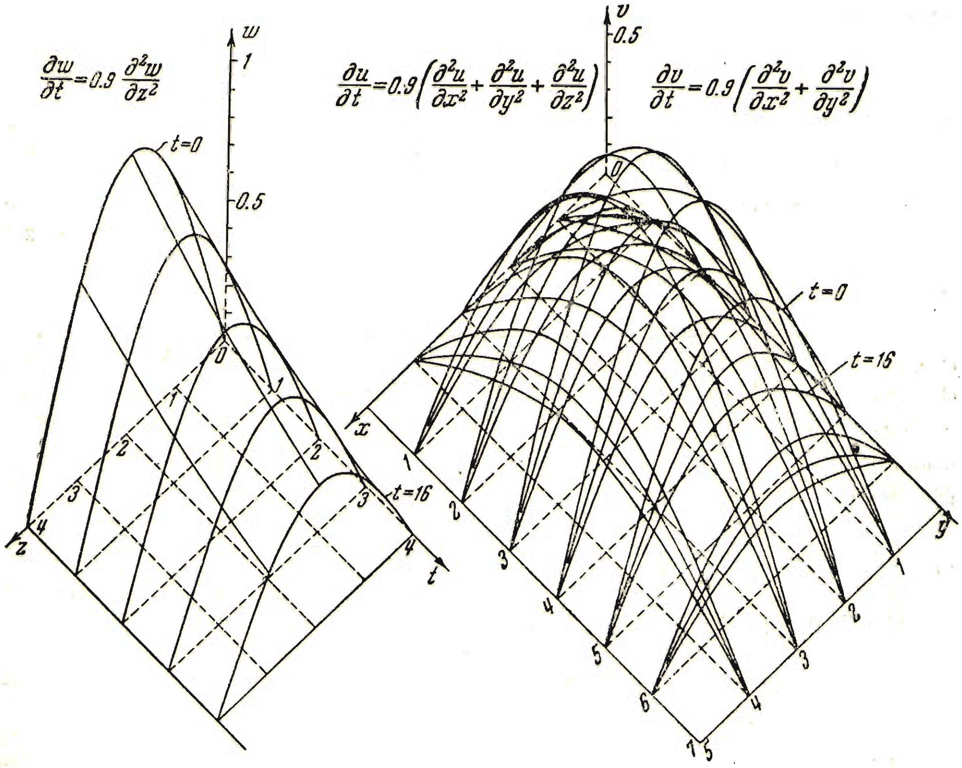
$$v|_{x=0} = \omega_1(y, t), \qquad v|_{y=0} = \pi_1(x, t), \qquad w|_{z=0} = \mu_1(t)$$

$$v|_{x=m} = \omega_2(y, t), \qquad v|_{y=n} = \pi_2(x, t), \qquad w|_{z=p} = \mu_2(t)$$

получаемых соответственно из условий (3.2) и (3.3).

Таким образом, вопрос о графическом интегрировании уравнения (3.1) приводится к двум ранее рассмотренным случаям.

Построив интегральные поверхности уравнений (3.5) (точнее, — (2.6) и (1.7)) для последовательных значений t, остается перемножить значения аппликат этих поверхностей для каждого значения t в соответствующих точках сетки.



Фиг. 5

Необходимо заметить, что при решении уравнений (3.5) — (2.6) мы будем при выбранном h определять l из формулы (2.5), тогда как при решении уравнений (3.5) — (1.7) l_1 будет определяться соотношением (1.6) при том же h. Поэтому, построив интегральные поверхности уравнения (1.7), надо при помощи интерполирования построить кривые, соответствующие $l = l_1 / 2$, что графически выполняется взятием среднего арифметического из двух аппликат, построенных в двух соседних точках сетки на прямой, параллельной оси t.

Пример 3. Дан прямоугольный алюминиевый параллелепипед с размерами: $m = 6$ см, $n = 8.4$ см и $p = 4.8$ см, изолированный от окружающего пространства. При $t = 0$ начальная температура определяется формулой

$$u|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{6}\sin\frac{5\pi y}{42}\sin\frac{5\pi z}{24} \tag{3.6}$$

Найти распределение температуры в точках параллелепипеда для моментов $t > 0$, если все шесть его граней удерживаются при постоянной температуре 0°.

Так как для алюминия $k^2 = 0.9$, то задача требует решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.9\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

при заданном начальном условии (3.6) и условиях на границе

$$u\,|_{x=0} = u\,|_{x=m} = u\,|_{y=0} = u\,|_{y=n} = u\,|_{z=0} = u\,|_{z=p} = 0$$

Для графического интегрирования будем иметь два уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0.9\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right), \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.9\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

с соответствующими начальными условиями

$$v\,|_{t=0} = \sin\frac{\pi x}{6}\sin\frac{5\pi y}{42}, \qquad w\,|_{t=0} = \sin\frac{5\pi z}{24}$$

и условиями на границе

$$v\,|_{x=0} = v\,|_{x=m} = v\,|_{y=0} = v\,|_{y=n} = 0, \qquad w\,|_{z=0} = w\,|_{z=p} = 0$$

Результаты графического интегрирования показаны на фиг. 5. Численные значения функции u для $t = 16$ сек. даны в табл. 3 в сопоставлении с аналитическим решением

Таблица 3

Коорд. точки	Графич. решен.	Аналит. решение	Коорд. точки	Графич. решение	Аналит. решение	Координ. точки	Графич. решение	Аналит. решение
(1, 1, 1)	0.042	0.046	(2, 1, 1)	0.078	0.075	(2, 1, 2)	0.111	0.105
(1, 2, 1)	0.089	0.083	(2, 2, 1)	0.142	0.134	(2, 2, 2)	0.201	0.190
1, 3, 1)	0.111	0.104	(2, 3, 1)	0.179	0.168	(2, 3, 2)	0.253	0.236

$$u = e^{-0.805t}\sin 0.524x \sin 0.374y \sin 0.654z$$

причем ввиду симметрии результаты показаны для четверти объема параллелепипеда.

Если параллелепипед не изолирован от окружающего пространства, то тогда задача приводится к интегрированию уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \rho' u \tag{3.7}$$

которое подстановкой $u = e^{-\rho' t}u^*$ преобразуется в однородное вида (3.1). На основании изложенного о случаях неизолированных стержня и пластинки, а также способа решения задачи для изолированного параллелепипеда графическое интегрирование уравнения (3.7) очевидно.

Рассмотрение табл. 1, 2, 3 показывает, что совпадение этих результатов может быть получено вполне удовлетворительное. Кроме того, надо иметь в виду, что погрешность приближенных формул (1.7) и (2.6), которыми мы пользовались для построения интегральных поверхностей, определяется величиной h^2 и потому точность графического решения может быть повышена за счет уменьшения h.

Поступила в редакцию
31 VIII 1948

ЛИТЕРАТУРА

1. Панов Д. Ю. Приближенное графическое решение краевых задач уравнения Лапласа. Тр. Центрального аэрогидродинам. института. ГТТИ. 1934. Вып. 169.
2. Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. ОГИЗ Гостехиздат. 1943.
3. Микеладзе Ш. Е. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений в частных производных (диссертация). Изд. АН СССР. 1934.