

УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ  
ПО КРИВОЛИНЕЙНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ  
ФИЛЬТРАЦИИ

О. В. Голубева

(Москва)

Настоящая работа представляет обобщение уравнений двумерных плоских движений идеальной жидкости на движение жидкости в пленке, покрывающей криволинейные поверхности. Полученные уравнения могут быть применимы в задачах фильтрации жидкости в искривленных слоях, некоторые из которых разобраны в настоящей работе, в вопросах геофизики и в вопросах электропроводности однородных искривленных поверхностей.

§ 1. Общие уравнения движения. Рассмотрим движение идеальной баротропной жидкости, покрывающей заданную криволинейную поверхность  $Z$  слоем переменной малой толщины. При этом вектор скорости движения будет лежать в касательной плоскости к поверхности и не меняться в направлении нормали к поверхности. Воспользуемся уравнениями трехмерных движений жидкости в форме Ламба [1], которые запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \frac{v^2}{2} = \mathbf{F} - \Omega \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad (1.1)$$

$$\text{div} (\rho \mathbf{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — вектор скорости,  $t$  — время,  $P$  — давление в жидкости,  $\rho$  — плотность,  $\mathbf{F}$  — вектор массовых сил, действующих в жидкости,  $\Omega$  — вектор завихренности движения, связанной со скоростью  $\mathbf{v}$  соотношением

$$\Omega = \text{curl} \mathbf{v} \quad (1.2)$$

Положим, что слой жидкости покрывает поверхность, заданную уравнением

$$\mathbf{r} = x(p, q) \mathbf{i} + y(p, q) \mathbf{j} + z(p, q) \mathbf{k} \quad (1.3)$$

Координатная сеть поверхности  $p = \text{const}$ ,  $q = \text{const}$  в общем случае будет неортогональна и элемент дуги на поверхности  $ds$  будет вида

$$ds^2 = E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2 \quad (1.4)$$

где  $E$ ,  $F$ ,  $G$  определяются по известным формулам из уравнения (1.3).

С каждой точкой поверхности свяжем систему осей координат, единичные векторы которой  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{r}_0$  направлены соответственно по касательным к координатным линиям  $p = \text{const}$ ,  $q = \text{const}$  и по нормали к поверхности.

Учитывая, что движение происходит в слое, покрывающем поверхность, найдем проекции общих уравнений (1.1) на выбранную систему осей координат. Обозначая через  $v_p$ ,  $v_q$  компоненты скорости в направлении координатных линий, найдем проекции вектора скорости  $\mathbf{v}$  на выбранную систему осей координат  $\mathbf{p}_0$ ,  $\mathbf{q}_0$ ,  $\mathbf{r}_0$  в виде

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_0 = v_p + v_q \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}_0 = v_q + v_p \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 = 0 \quad (1.5)$$

Квадрат модуля скорости запишем в виде

$$v^2 = v_p^2 + v_q^2 + 2v_p v_q \frac{F}{V EG} \quad (1.6)$$

В последних формулах величина  $F/\sqrt{FG}$  представляет собой косинус угла между координатными линиями поверхности. Подобным же образом, обозначая через  $F_p, F_q, F_r$  компоненты вектора массовых сил, запишем

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{p}_0 = F_p + F_q \frac{F}{V EG}, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{q}_0 = F_q + F_p \frac{F}{V EG}, \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{r}_0 = F_r \quad (1.7)$$

Проекция вектора  $\text{grad } P$ , входящего в равенство (1.1), запишем в виде

$$\text{grad } P \cdot \mathbf{p}_0 = \frac{\partial P}{V E \partial p}, \quad \text{grad } P \cdot \mathbf{q}_0 = \frac{\partial P}{V G \partial q}, \quad \text{grad } P \cdot \mathbf{r}_0 = 0 \quad (1.8)$$

Подобным же образом найдем проекции вектора  $\text{grad } v^2/2$ . Проекция вектора завихренности  $\Omega$  данной частицы жидкости в каком-либо направлении  $S$  равняется пределу отношения циркуляции скорости против часовой стрелки, глядя с положительного направления  $S$  по бесконечно малому контуру, содержащему рассматриваемую точку и лежащему в плоскости, перпендикулярной  $S$  к площади, ограниченной контуром, когда эта площадь стягивается к точке; отсюда следует, что проекции вектора на направления  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{q}_0$  равны нулю и модуль  $\Omega$  будет

$$\Omega = \frac{1}{V EG - F^2} \left[ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \left( v_q + v_p \frac{F}{V EG} \right) V G \right] - \frac{\partial}{\partial q} \left[ \left( v_p + v_q \frac{F}{V EG} \right) V E \right] \right] \quad (1.9)$$

Проекция произведения  $\Omega \times \mathbf{v}$  на выбранную систему осей координат будут

$$\begin{aligned} \Omega \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}_0 &= -v_q \Omega \frac{V EG - F^2}{V EG} \\ \Omega \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}_0 &= v_p \Omega \frac{V EG - F^2}{V EG} \\ \Omega \times \mathbf{v} \cdot \mathbf{r}_0 &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Подсчитывая  $\text{div } \mathbf{v}$  точки как предел отношения количества жидкости, вытекающей из элементарного объема, содержащего рассматриваемую точку, к элементарному объему, когда объем стягивается к точке, получим

$$\text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{V H V EG - F^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left( v_p V EG - F^2 \frac{V H}{V E} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left( v_q V EG - F^2 \frac{V H}{V G} \right) \right\} \quad (1.11)$$

где  $V H$  есть закон изменения толщины бесконечно тонкого слоя.

Пользуясь полученными формулами, запишем уравнения движения жидкости в пленке, покрывающей заданную поверхность, в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( v_p + v_q \frac{F}{V EG} \right) + \frac{1}{V E} \frac{\partial}{\partial p} \frac{v^2}{2} &= F_p + F_q \frac{F}{V EG} + v_q \frac{V EG - F^2}{V EG} \Omega - \frac{1}{\rho V E} \frac{\partial P}{\partial p} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( v_q + v_p \frac{F}{V EG} \right) + \frac{1}{V G} \frac{\partial}{\partial q} \frac{v^2}{2} &= F_q + F_p \frac{F}{V EG} - v_p \frac{V EG - F^2}{V EG} \Omega - \frac{1}{\rho V G} \frac{\partial P}{\partial q} \\ F_r &= 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{V H V EG - F^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \rho v_p \frac{V EG - F^2 V H}{V E} \right] + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \rho v_q \frac{V EG - F^2 V H}{V G} \right] \right\} = 0$$

где  $v$  определяется по формуле (1.6) и  $\Omega$  определяется по формуле (1.9).

Третье уравнение (1.12) указывает, что компоненты массовых сил в направлении нормали к поверхности должны быть уравновешены. Остальные уравнения (1.12) представляют собой обобщение уравнений плоского движения жидкости, которые могут быть получены из уравнений (1.12) как частный случай.

Два первые уравнения (1.12) написаны в форме Ламба; переписывая их в форме Эйлера, получим

$$\begin{aligned} \frac{dv_p}{dt} - \frac{v_q^2}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial p} - \frac{v_p v_q}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial q} + \frac{F}{E} v_p \frac{\partial}{\partial p} \frac{v_q}{\sqrt{G}} + \\ + \frac{v_q}{\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial q} \left( v_q \frac{F}{\sqrt{G}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{F}{\sqrt{EG}} v_q = F_p + F_q \frac{F}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{\rho \sqrt{E}} \frac{\partial P}{\partial p} \\ \frac{dv_q}{dt} - \frac{v_p^2}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial q} + \frac{v_p v_q}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial p} + \frac{F}{G} v_q \frac{\partial}{\partial q} \frac{v_p}{\sqrt{E}} + \\ + \frac{v_p}{\sqrt{EG}} \frac{\partial}{\partial p} \left( v_p \frac{E}{\sqrt{E}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{F}{\sqrt{EG}} v_p = F_q + F_p \frac{F}{\sqrt{EG}} - \frac{1}{\rho \sqrt{G}} \frac{\partial P}{\partial q} \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$\frac{dv_p}{dt} = \frac{\partial v_p}{\partial t} + \frac{v_p}{\sqrt{E}} \frac{\partial v_p}{\partial p} + \frac{v_q}{\sqrt{G}} \frac{\partial v_p}{\partial q}, \quad \frac{dv_q}{dt} = \frac{\partial v_q}{\partial t} + \frac{v_p}{\sqrt{E}} \frac{\partial v_q}{\partial p} + \frac{v_q}{\sqrt{G}} \frac{\partial v_q}{\partial q}$$

Уравнения (1.12) и (1.13) значительно упрощаются, если за координатную сеть на поверхности выбраны геодезические линии и их ортогональные траектории.

**§ 2. Уравнения движения жидкости в пористых грунтах, имеющих форму искривленного пласта.** Рассмотрим фильтрацию жидкости в однородном равной толщины недеформируемом, искривленном пласте грунта, ограниченного по поверхностям пласта непроницаемыми стенками. Предположим, что толщина пласта мала по сравнению с линейными размерами пласта и что фильтрация жидкости в пласте происходит в направлении, параллельном поверхности расположения пласта. Сделанные предположения сводят задачу о фильтрации жидкости в искривленном пласте к двухмерной задаче.

Приближенные уравнения ламинарной фильтрации жидкости будут<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{v} = \frac{k\rho}{\mu} \left( \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } P \right), \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) + m \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости фильтрации,  $\mu$  — динамическая вязкость жидкости,  $k$  — проницаемость пористой среды,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mathbf{F}$  — вектор массовых сил, действующих на частицу жидкости,  $P$  — гидродинамическое давление в жидкости,  $m$  — отношение суммы объемов пор ко всему объему грунта,  $t$  — время.

Уравнение криволинейной поверхности, по которой расположен слой, будем полагать в виде (1.3). Тогда, пользуясь уравнением (1.12), второе уравнение (2.1) можно представить в виде

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \rho v_p \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} \right] + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \rho v_q \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{G}} \right] \right\} = 0 \quad (2.2)$$

Обозначая через  $F_p, F_q$  компоненты вектора массовых сил, направленные по координатным линиям поверхности, и, рассчитав компоненты градиентного вектора на те же направления, запишем компоненты скорости  $v_p, v_q$ , пользуясь первым равенством (2.1), в виде

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{k\rho}{\mu} \left[ F_p - \frac{\sqrt{E}}{\rho(EG - F^2)} \left( G \frac{\partial P}{\partial p} - F \frac{\partial P}{\partial q} \right) \right] \\ v_q &= \frac{k\rho}{\mu} \left[ F_q + \frac{\sqrt{G}}{\rho(EG - F^2)} \left( F \frac{\partial P}{\partial p} - E \frac{\partial P}{\partial q} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя значения  $v_p, v_q$  из равенства (2.3) в равенство (2.2), получим общее уравнение ламинарной фильтрации жидкости в неизменяемой пористой среде, представляющей собой слой, расположенный на криволинейной поверхности, которое запишем в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V \sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left[ \frac{k_p}{\mu V \sqrt{EG - F^2}} \left( G \frac{\partial P}{\partial p} - F \frac{\partial P}{\partial q} \right) \right] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial}{\partial q} \left[ \frac{k_p}{\mu V \sqrt{EG - F^2}} \left( E \frac{\partial P}{\partial q} - F \frac{\partial P}{\partial p} \right) \right] \right\} = \\ = m \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{V \sqrt{EG - F^2}} & \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{k_p^2}{\mu} F_p \frac{V \sqrt{EG - F^2}}{V E} \right) + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{k_p^2}{\mu} F_q \frac{V \sqrt{EG - F^2}}{V G} \right) \right\} \quad (2.4) \end{aligned}$$

Уравнение ламинарной фильтрации для случая плоско-параллельного движения может быть получено из уравнения (2.4), если рассматриваемый слой расположить на плоскости и выбрать ортогональную систему осей координат ( $E = G = 1; F = 0$ ).

Для ламинарной фильтрации несжимаемой жидкости под действием силы тяжести уравнение (2.4) обратится в уравнение Лапласа вида

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{G \partial \varphi / \partial p - F \partial \varphi / \partial q}{V \sqrt{EG - F^2}} + \frac{\partial}{\partial q} \frac{E \partial \varphi / \partial q - F \partial \varphi / \partial p}{V \sqrt{EG - F^2}} = 0 \quad (2.5)$$

Здесь потенциал

$$\varphi = - \frac{k_p g}{\mu} \left( \frac{P}{\rho g} + h \right)$$

причем  $g$  — ускорение силы тяжести,  $h$  — высота движущейся частицы жидкости над некоторой произвольно выбранной горизонтальной плоскостью.

Компоненты скорости для этого случая определяются из уравнений

$$v_p = \frac{V \sqrt{E}}{EG - F^2} \left[ G \frac{\partial \varphi}{\partial p} - F \frac{\partial \varphi}{\partial q} \right], \quad v_q = \frac{V \sqrt{G}}{EG - F^2} \left[ E \frac{\partial \varphi}{\partial q} - F \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right] \quad (2.6)$$

Кроме того, вводя функцию тока  $\psi$  из уравнения (2.2), получим

$$v_p = \frac{V \sqrt{E}}{V \sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \psi}{\partial q}, \quad v_q = - \frac{V \sqrt{G}}{V \sqrt{EG - F^2}} \frac{\partial \psi}{\partial p} \quad (2.7)$$

Приравнявая соотношения (2.6) и (2.7), получим условия конформного преобразования криволинейной поверхности, определяемой координатами  $p$  и  $q$ , на плоскость, определяемую ортогональной системой осей координат  $\varphi$  и  $\psi$ , вида [4]

$$\frac{\partial \psi}{\partial p} = \frac{F \partial \varphi / \partial p - E \partial \varphi / \partial q}{V \sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{G \partial \varphi / \partial p - F \partial \varphi / \partial q}{V \sqrt{EG - F^2}}$$

Последние условия представляют собой обобщение условия Коши-Римана для криволинейной поверхности.

Заметим, что при конформном преобразовании поверхности на плоскость линии тока и линии равного потенциала переходят соответственно в линии тока и равного потенциала. Таким образом, зная конформное преобразование поверхности на плоскость, рассматриваемую задачу о потенциальных течениях на поверхности сведем к задаче о потенциальных течениях на плоскости.

Известно, что для скважины, расположенной в плоском водоносном слое, количество жидкости, протекающее через контур скважины в единицу времени (дебит скважины  $q_{II}$  на единицу мощности пласта), определяется по формуле Дюпюи [5]

$$q_{II} = \frac{2\pi (\varphi_1 - \varphi_0)}{\ln r_0 - \ln r_1} \quad (2.9)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_0$  — значение потенциалов и  $r_1, r_0$  — значение радиусов соответственно

на границе скважины и на границе области питания, которые являются концентрическими окружностями.

Задача о работе скважины в искривленном слое также решается при помощи формулы (2.9), если будет известно такое конформное преобразование поверхности на плоскость, при котором граница скважины и граница области питания переходят в концентрические окружности, радиусы которых обозначим соответственно через  $r_1, r_0$ .

Пользуясь полученными результатами, рассмотрим некоторые конкретные задачи о фильтрации жидкости в криволинейных слоях.

**§ 3. Влияние куполообразности слоя на дебит изолированной скважины.**

Исследуем, каково будет изменение дебита круглой скважины с круглой концентрической к скважине границей области питания, если плоский слой заменен куполообразным слоем. Обозначим через  $r_0$  и  $r_1$  соответственно радиусы границ области питания и скважины плоского и куполообразного слоев (фиг. 1). Через  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$  соответственно обозначим значение потенциалов на границах обоих слоев.

Пусть куполообразная поверхность представляет собой поверхность вращения, уравнение которой в общем виде будет

$$\mathbf{r} = f(\theta) \cos \lambda \mathbf{i} + f(\theta) \sin \lambda \mathbf{j} + f_1(\theta) \mathbf{k} \quad (3.1)$$

где  $\theta, \lambda$  — произвольные параметры.

Обозначим соответственно через  $\theta = \theta_0$  и  $\theta = \theta_1$  окружности на поверхности, радиусы которых будут  $r_0$  и  $r_1$ .

Элемент дуги поверхности вращения запишем по формуле (1.4) в виде

$$ds^2 = f^2(\theta) d\lambda^2 + [f^2(\theta) + f_1^2(\theta)] d\theta^2 \quad (3.2)$$

где точки означают производные по  $\theta$ .

Запишем равенство (3.3) в виде

$$ds^2 = \frac{f^2(\theta)}{|z|^2} dz d\bar{z} \quad (3.3)$$

где

$$z = \exp \left\{ \pm \int \frac{\sqrt{f^2 + f_1^2}}{f} d\theta \right\} e^{\mp i\lambda} \quad (3.4)$$

и  $\bar{z}$  есть величина, сопряженная к  $z$ .

Из равенства (3.2) следует, что  $z$  определяет плоскость, на которую конформно отображается поверхность (3.1).

Пользуясь на плоскости  $Z$  полярной системой осей координат  $R$  и  $\alpha$ , из формул (3.5) получим равенства

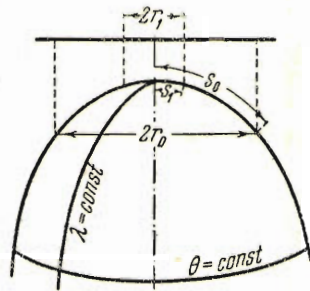
$$R = \exp \left\{ \pm \int \frac{\sqrt{f^2 + f_1^2}}{f} d\theta \right\} d\theta = R(\theta), \quad \alpha = \mp \lambda \quad (3.5)$$

Знак и константу интегрирования формулы (3.4) подбираем так, чтобы вершине куполообразной поверхности соответствовала на плоскости  $z$  точка  $R = 0$ .

Равенства (3.5) показывают, что система параллелей поверхности переходит на плоскости  $z$  в систему концентрических окружностей и система меридиональных кривых на плоскости  $z$  переходит в семейство прямых, выходящих из начала координат. Радиусам границ области питания и скважины на плоскости  $z$  соответствуют концентрические окружности радиусов  $R_0 = R(\theta_0), R_1 = R(\theta_1)$ .

Введем обозначения

$$\pm \int \frac{\sqrt{f^2 + f_1^2}}{f} d\theta = Q \quad (3.6)$$



Фиг. 1

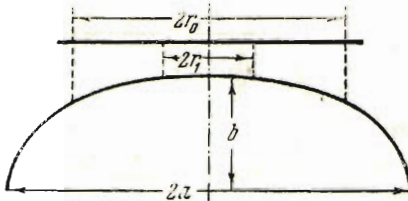
Чтобы подсчитать дебит скважины куполообразного слоя, надо воспользоваться, как указывалось, формулой (2.9). Принимая во внимание (3.6) и (3.7), имеем

$$q_K = \frac{2\pi(\varphi_1 - \varphi_0)}{Q_0 - Q_1} \tag{3.7}$$

Найдем отношение дебитов рассматриваемых скважин куполообразного  $q_K$  и плоского слоя  $q_{\Pi}$  (фиг. 1). Пользуясь формулами (2.9) и (3.7), найдем

$$\frac{q_K}{q_{\Pi}} = \left[ \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r} \right] : \int_{r_1}^{r_0} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2} \frac{dr}{r} \right] \tag{3.8}$$

Из формулы (3.8) следует, что дебит рассматриваемой скважины куполообразного слоя  $q_K$  меньше дебита  $q$  соответствующей скважины плоского слоя (фиг. 1)



Фиг. 2

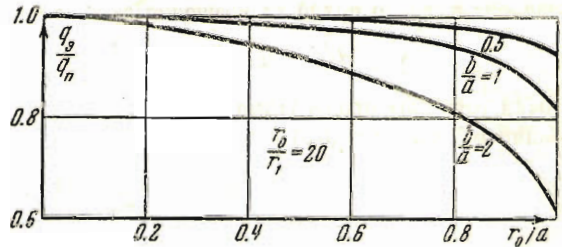
Вся трудность определения численного значения  $q_K / q_{\Pi}$  сводится к вычислению интеграла вида (3.5).

В качестве примера рассмотрим работу скважины, расположенной в вершине эллипсоида вращения (фиг. 2). На графике (фиг. 3) дано отношение  $q_K / q_{\Pi}$  при  $r_0 / r_1 = 20$  в зависимости от отношения радиуса области питания  $r_0$  к горизонтальной полуоси эллипсоида вращения  $a$  (фиг. 2).

диуса области питания  $r_0$  к горизонтальной полуоси эллипсоида вращения  $a$  (фиг. 2). Три кривые графика (фиг. 3) соответствуют различным отношениям  $b/a$  полуосей эллипсоида.

По графику (фиг. 3) можно оценить, каковы будут ошибки вычислений, если заменить эллипсоидальный куполообразный слой соответствующим плоским слоем.

Использование приближенных, но более простых методов расчета дебитов скважин куполообразных слоев, представляет интерес,



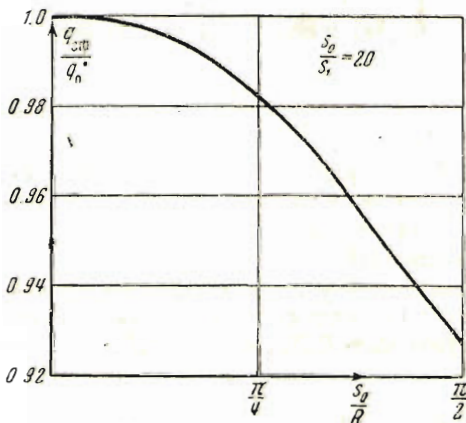
Фиг. 3

так как формулы для вычисления дебитов скважины (например, для эллипсоидальных слоев) достаточно сложны.

Если подсчитать отношение дебитов скважины куполообразного слоя  $q_K$  и плоского слоя  $q_{\Pi}^*$ , предполагая границы области питания и скважины плоского слоя равными соответственно длинам дуг ( $s_1, s_0$ ), отсчитываемым по меридиональному сечению куполообразного слоя, получим формулу

$$\frac{q_K}{q_{\Pi}^*} = \left[ \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{s} \right] : \left[ \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{r} \right] \tag{3.9}$$

где  $r$  — радиус, параллельного сечения на поверхности вращения (фиг. 1). Так как  $r < s$ , то  $q_K / q_{\Pi}^* < 1$ .



Фиг. 4

В качестве примера применения формулы (3.9) рассчитано отношение  $q_{сф} / q_{пл}^*$  для сфероидаляного слоя при отношении длин дуг  $s_0 / s_1 = 20$  (фиг. 4) в зависимости от  $s_0 / R$ , где  $R$  — радиус сферы.

Из сравнения графиков (фиг. 3) и (фиг. 4) следует, что замена куполообразного слоя плоским при расчете дебита скважины дает более точные результаты, если радиус области питания и скважины плоского слоя равны соответственным длинам дуг куполообразного слоя, чем если соответствующие радиусы плоского и куполообразного слоев просто равны.

**§ 4. Определение дебитов нескольких скважин, расположенных в куполообразном слое.** При изучении работы нескольких скважин, расположенных в плоских слоях обычно предполагается, что область, ограниченная контуром скважины, ничтожно мала по сравнению с областью питания скважины [6]. Поэтому можно считать, что радиус скважины  $r$  плоского слоя при конформном преобразовании плоскости, определяемой комплексным переменным  $z_0$ , в плоскость, определяемую  $z$ , переходит в радиус  $r_1^{(z)}$ , определяемый по формуле

$$r_1^{(z)} = r_1 \left| \frac{dz}{dz_0} \right| \quad (4.1)$$

Положим, что и для искривленных пластов область питания скважины велика по сравнению с областью, ограниченной контуром скважины. Тогда равенство (4.1) определяет связь между радиусом скважины  $r_1$  искривленного слоя и радиусом скважины плоского слоя  $r_1^{(z)}$ . Величина  $|dz/dz_0|$ , входящая в формулу (4.1), представляет модуль производной комплексного переменного  $z$  по любому направлению искривленной поверхности, проходящему через центр скважины этой поверхности.

На основании (3.3) для поверхности вращения получим

$$dz_0 = f d\lambda + i \sqrt{j^2 + j_1^2} d\theta, \quad \frac{dz}{dz_0} = \pm \frac{z_i}{f(\theta)} \quad (4.2)$$

Рассмотрим  $n$  скважин, расположенных в куполообразном слое, представляющем собой поверхность вращения (3.1).

Пусть центры скважин, расположенных на куполообразной поверхности и соответственно имеющих радиусы  $r_1, r_2, \dots, r_n$  определяются координатами  $(\lambda_1, \theta_1), (\lambda_2, \theta_2), \dots, (\lambda_n, \theta_n)$ . Положим, что область питания скважин ограничена окружностью, уравнение которой будет  $\theta = \theta_0$ . Пусть на границе области питания задано значение потенциала  $\varphi_0$  и на границе скважин соответственно значения потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ .

Пользуясь формулами (3.6), получим, что граница области питания куполообразного слоя на плоскости  $z$  перейдет в окружность с центром в начале координат и радиусом  $R_0 = F(\theta_0)$ . Центры скважин перейдут на плоскости  $z$  в точки, соответственно определяемые координатами:

$$R_1 = F(\theta_1), \alpha_1 = \mp \lambda_1; R_2 = F(\theta_2), \alpha_2 = \mp \lambda_2; \dots; R_n = F(\theta_n), \alpha_n = \mp \lambda_n \quad (4.3)$$

Напомним, что знак формул (4.3) определяется так же, как знак формул (3.6)

Примененное конформное преобразование поверхности вращения на плоскость сводит задачу об определении дебита  $n$  скважин, расположенных в куполообразном слое, к работе  $n$  скважин, расположенных в круговом пласте плоскости  $z$ , при заданных значениях потенциала  $\varphi_0$  на окружности, определяемой радиусом  $R_0 = F(\theta_0)$  согласно (3.6), и значениях потенциалов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  на окружностях, имеющих центры в точках, определенных равенствами (4.3), и имеющих радиусы, которые определяются на основании формулы (4.1) в виде

$$r_k^{(z)} = r_k \left| \frac{z}{f(\theta)} \right|_{\theta=\theta_k, \lambda=\lambda_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.4)$$

Последняя задача решается в работе Чарного [6]. Для определения дебита скважин имеем следующую систему уравнений:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi} \ln R_0 \sum_{j=1}^n q_j + C \quad (4.5)$$

$$\varphi_k = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^n q_j \ln R_0^2 \frac{R_k^2 + R_j^2 - 2R_k R_j \cos(\alpha_k - \alpha_j)}{R_0^2 + R_k^2 R_j^2 / R_0^2 - 2R_k R_j \cos(\alpha_k - \alpha_j)} + \frac{q_k}{2\pi} \ln \frac{r_k^{(2)}}{1 - R_k^2 / R_0^2} + C$$

Здесь штрих при знаке суммы означает, что при суммировании член  $j = k$  опускается.

Из  $n + 1$  уравнения (4.5) определяются произвольная постоянная  $C$  и  $n$  дебитов скважин  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . В частном случае, когда куполообразный слой содержит одну произвольно расположенную скважину, из формул (4.5) получаем значение дебита скважины в виде

$$q_1^* = \frac{2\pi(\varphi_0 - \varphi_1)}{\ln R_0 / r_1^{(2)} (1 + R_1^2 / R_0^2)} \quad (4.6)$$

где  $R_0, R_1$  и  $r_1^{(2)}$  определяются по формулам (3.6), (4.3) и (4.4).

Работу скважин в изогнутых слоях можно изучить, не прибегая к конформному преобразованию поверхности на плоскость, а непосредственно отыскивая потенциал скорости течения, как это сделано в работе Полубариновой-Кочиной [7] для круглого цилиндрического и сфероидального слоев.

*Замечание.* Укажем на связь уравнений движения электричества по проводящим поверхностям с уравнениями фильтрации жидкости. Плотность тока  $j$  в проводнике связана с удельным сопротивлением материала  $\sigma$  и потенциалом  $V$  уравнением

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\sigma} \text{grad } V \quad (4.7)$$

Далее по закону неразрывности электрического тока имеем

$$\text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (4.8)$$

Сравнивая равенства (4.7), (4.8) с равенствами (2.6) и уравнением неразрывности для несжимаемой жидкости, видим, что эти уравнения идентичны. Следовательно, потенциал  $V$  при движении электричества по криволинейной поверхности удовлетворяет уравнению вида (2.5).

Связь между уравнениями движения электричества и уравнениями фильтрации жидкости в криволинейных слоях позволяет решить ряд задач теории фильтрации в криволинейных слоях экспериментально, методом электродинамической аналогии

Поступила в редакцию

13 II 1950

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. I. ОГИЗ. Л.—М. 1948.
2. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. ГОНТИ НКТП СССР. 1938.
3. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. ОГИЗ. Гостехиздат. 1947.
4. Бляшке К. Дифференциальная геометрия. ОНТИ НКТП СССР. 1935.
5. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. Ч. II. Гостехиздат. 1934.
6. Чарный И. А. Подземная гидромеханика. ОГИЗ. Гостехиздат. 1948.
7. Казарновская Б. Э., Полубаринова-Кочина П. Я. О движении подошвенных вод в нефтяных пластах. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 6.