

КРУЧЕНИЕ И ИЗГИБ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С ПОЛЫМ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ СЕЧЕНИЕМ

Б. Л. Абрамян

(Ереван)

В работе приводится решение задачи о кручении и изгибе призматических стержней с полым прямоугольным поперечным сечением.

При решении данной задачи аналогично работе^[1] использован метод введения вспомогательных функций Н. Х. Арутюняна^[2]. Этот метод позволил решение уравнений задачи с частными производными свести к решению линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, а определение постоянных интегрирования свести к решению бесконечных, вполне регулярных систем линейных уравнений.

Полученные формулы определяют жесткость при кручении и напряжения в зависимости от геометрических параметров сечения.

Одновременно в работе указываются пределы применимости полуэмпирической формулы Бредта^[3] для определения жесткости при кручении полых тонкостенных стержней.

1. Кручение призматического стержня с полым прямоугольным поперечным сечением

§ 1. Постановка задачи. Определение функции напряжений $U(x, y)$ при кручении стержней с двухсвязным поперечным сечением, как известно, сводится к интегрированию уравнения Пуассона

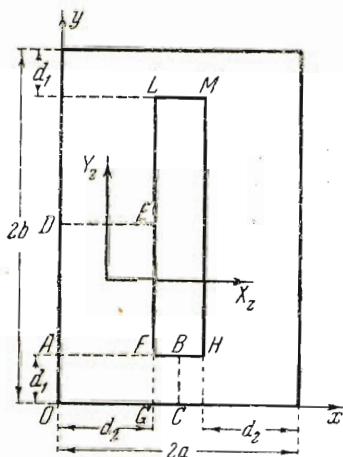
$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1.1)$$

при условии, что функция $U(x, y)$ обращается в нуль на внешнем контуре и принимает постоянное значение U_0 на внутреннем контуре сечения (фиг. 1). По симметрии достаточно найти функцию $U(x, y)$ только для части $ODEFBC$ сечения. Чтобы решение распространилось на всю область сечения, требуется, чтобы на линиях DE и BC нормальные производные функции $U(x, y)$ равнялись нулю.

Полагаем, что в области $OAFBC$ —функция $U(x, y)$ принимает значение $U_1(x, y)$, а в области $ODEG$ —значение $U_2(x, y)$.

Функции $U_i(x, y)$ ищем в виде

$$U_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y) \quad (i = 1, 2) \quad (1.2)$$



Фиг. 1

где функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) существуют только в области $OAFG$, $\Psi_1(x, y)$ существует в области $OABC$, а $\Psi_2(x, y)$ — в области $ODEG$.

Для вспомогательных функций $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ получим уравнения

$$\nabla^2 \Psi_i = -2, \quad \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (i=1,2) \quad (1.3)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\Psi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)_{x=a} = \Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0, \quad \Psi_1(x, d_1) = U_0 \quad (1.4)$$

$$\Psi_2(0, y) = \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \right)_{y=b} = \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0 \quad \Psi_2(d_2, y) = U_0 \quad (1.5)$$

Граничные условия для определения функций $\Psi_1(x, y)$ и $\Psi_2(x, y)$ неоднородны, однако, следуя Г. А. Гринбергу^[4], полагаем

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_2} \quad (1.6)$$

Тогда для $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ получим следующие условия:

$$\Phi_1(d_2, y) = \Phi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)_{x=d_2} = 0, \quad \Phi_1(x, d_1) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(d_1) \sin \frac{k\pi x}{d_2} = U_0$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \Phi_2(0, y) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=d_1} = 0, \quad \Phi_2(d_2, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(d_2) \sin \frac{k\pi y}{d_1} = U_0$$

Ищем функции $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ в виде

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_2} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.3) — (1.9) полностью определяют функцию $U(x, y)$ в области $ODEFBC$.

§ 2. Решение уравнений задачи. Используя уравнения (1.3) — (1.9) получим

$$f_k(x) = A_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + B_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} - (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} + [1 - (-1)^k] \frac{4d_1^2}{(k\pi)^3} \quad (2.1)$$

$$v_k(y) = M_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} + N_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} + [1 - (-1)^k] \frac{4d_2^2}{(k\pi)^3} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & D_k \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} + C_k \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} + (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi x}{d_1} \right) + \\ & + (-1)^k \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1)}{(pd_1/d_2)^2 + k^2} \left[\frac{d_1}{d_2} p \operatorname{sh} \frac{k\pi x}{d_1} - k \sin \frac{p\pi x}{d_2} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_k(y) = & L_k \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} + F_k \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} + (-1)^k \frac{2U_0}{k\pi} \left(1 - \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} \right) + \\ & + (-1)^k \frac{2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_2)}{(pd_2/d_1)^2 + k^2} \left[\frac{d_2}{d_1} p \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{d_2} - k \sin \frac{p\pi y}{d_1} \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

При этом $f_p(d_2)$ и $v_p(d_1)$ имеют значения: (2.5)

$$f_p(d_2) = A_p \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} + B_p \operatorname{ch} \frac{p\pi d_2}{d_1} - (-1)^p \frac{2U_0}{\pi p} + \frac{4d_1^2}{(p\pi)^3} [1 - (-1)^p]$$

$$v_p(d_1) = M_p \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} + N_p \operatorname{ch} \frac{p\pi d_1}{d_2} - (-1)^p \frac{2U_0}{p\pi} + \frac{4d_2^2}{(p\pi)^3} [1 - (-1)^p]$$

§ 3. Определение постоянных интегрирования. Для функций $f_k(x)$, $v_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $w_k(y)$ граничные условия из (1.4), (1.5), (1.7) и (1.8) имеют вид: (3.1)

$$f_k'(a) = f_k(0) + \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi_k(d_2) = \varphi_k'(d_2) = 0$$

$$v_k'(b) = v_k(0) + w_k(0) = 0, \quad w_k(d_1) = w_k'(d_1) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

С помощью этих условий из (2.1) — (2.4) получим уравнения для определения постоянных интегрирования.

Исключив из полученных уравнений A_k , M_k , D_k , C_k , L_k и F_k , получим совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений^[5].

Введем обозначения

$$B_k = S_k d_1 d_2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1}, \quad N_k = R_k d_1 d_2 \frac{(-1)^k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \quad (3.2)$$

Тогда эту совокупность двух бесконечных систем линейных уравнений приведем к виду

$$S_k = \sum_{p=1}^{\infty} R_p a_{kp} + \beta_k, \quad R_k = \sum_{p=1}^{\infty} S_p c_{kp} + \gamma_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.3)$$

где

$$a_{kp} = \frac{2k}{\pi} \frac{d_1 d_2}{d_1^2 p^2 + d_2^2 k^2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{p\pi(b-d_1)}{d_2} \quad (3.4)$$

$$\beta_k = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2U_0}{\pi^2 d_2^2} + \frac{4}{\pi^3} \frac{1 - (-1)^k}{k} \frac{d_1}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \frac{2}{\pi^2} \left(1 - \frac{2d_1}{k\pi d_2} \operatorname{th} \frac{k\pi d_2}{2d_1} \right) \right\}$$

$$c_{kp} = \frac{2k}{\pi} \frac{d_1 d_2}{d_2^2 p^2 + d_1^2 k^2} \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1} \quad (3.5)$$

$$\gamma_k = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2U_0}{\pi^2 d_1^2} + \frac{4}{\pi^3} \frac{1 - (-1)^k}{k} \frac{d_2}{d_1} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{2}{\pi^2} \left(1 - \frac{2d_2}{k\pi d_1} \operatorname{th} \frac{k\pi d_1}{2d_2} \right) \right\}$$

Системы (3.3) могут быть записаны в виде одной:

$$Z_v = \sum_{p=1}^{\infty} A_{vp} Z_p + B_v \quad (v = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

для этого нужно положить

$$Z_{2n-1} = S_k, \quad Z_{2n} = R_k, \quad A_{2n, 2m} = 0, \quad A_{2n, 2m-1} = c_{kp}$$

$$B_{2n-1} = \beta_k, \quad B_{2n} = \gamma_k, \quad A_{2n-1, 2m-1} = 0, \quad A_{2n-1, 2m} = a_{kp} \quad (3.7)$$

Рассмотрим несколько случаев.

1°. Бесконечная система (3.6) вполне регулярна при $b \geq d_2$ и $a \geq d_1$, так как из (3.4), (3.5) и (3.7) имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_{2n,p} = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} \leq \frac{k}{\pi} \frac{d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(pd_2/d_1)^2 + k^2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi d_1}{d_2} - \frac{d_2}{k\pi d_1} \right) \leq \frac{1}{2}$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_{2n-1,p} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} \leq \frac{k}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(pd_1/d_2)^2 + k^2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{k\pi d_2}{d_1} - \frac{d_1}{k\pi d_2} \right) \leq \frac{1}{2}$$

При этом использованы неравенства

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{p\pi(b-d_1)}{d_2} \approx \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \exp \left(-\frac{p\pi d_1}{d_2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1} \approx \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \exp \left(-\frac{p\pi d_2}{d_1} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (3.10)$$

$$\operatorname{cth} x - \frac{1}{x} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq \infty) \quad (3.11)$$

Следовательно, для любого ν

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu p} \leq \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

2°. Система (3.6) оказывается регулярной для частных случаев при $a > d_2$, $b = d_1$ и $a = d_2$, $b > d_1$ (когда имеем прямоугольное сечение с внутренней трещиной).

В этом случае

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_{2n,p} = \sum_{p=1}^{\infty} c_{kp} < \frac{2k}{\pi} \frac{d_2}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(pd_2/d_1)^2 + k^2} \leq 1 \quad (3.13)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_{2n-1,p} = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} < \frac{2k}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(pd_1/d_2)^2 + k^2} \leq 1 \quad (3.14)$$

При этом использованы неравенства (3.11)

$$\operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{ch} \frac{p\pi(b-d_1)}{d_2} < 1 \quad \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1} < 1 \quad (3.15)$$

Согласно (3.13) и (3.14) для любого ν

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_{\nu p} < 1 \quad (3.16)$$

3°. Когда $a = b$ и $d_2 = d_1 = d$ — полное квадратное сечение (фиг. 2), вместо систем (3.3) получаем одну бесконечную систему линейных уравнений, которая вполне регулярна при $a/d \geq \mu > 1$, где μ — конечное число. В этом случае вместо системы (3.3) имеем

$$F_h = \sum_{p=1}^{\infty} F_p b_{hp} + \alpha_h \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.17)$$

где

$$b_{kp} = \frac{2k}{\pi} \operatorname{sh} p\pi \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d)}{d} \frac{1}{p^2 + k^2} \quad (3.18)$$

$$\alpha_k = \frac{1}{k} \left\{ \frac{2U_0}{(\pi d)^2} + \frac{4}{k\pi^3} \frac{1 + (-1)^{k+1}}{\operatorname{sh} k\pi} - \frac{2}{\pi^2} \left(1 - \frac{2}{k\pi} \operatorname{th} \frac{k\pi}{2} \right) \right\} \quad (3.19)$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} < \frac{2k}{\pi} \frac{1 + e^{-2\pi(\mu-1)}}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + k^2} < \frac{1 + e^{-2\pi(\mu-1)}}{2} \quad (3.20)$$

При этом использованы неравенства (3.11) и

$$\operatorname{sh} p\pi \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d)}{d} < \frac{1 + e^{-2\pi(\mu-1)}}{2} \quad (3.21)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда $a/d \geq \mu = 3/2$. Тогда из (3.20) получим

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_{pk} < 1 - \theta = 0.5216$$

$$\theta = 0.4784 \quad (3.22)$$

Свободный член α_k системы (3.17) удовлетворяет неравенству

$$|\alpha_k| \leq 0.20264 \frac{U_0}{d^2} - 0.06198 \quad (3.23)$$

Обозначим значения неизвестных F_k с избытком через F_k^+ , а значения с недостатком через F_k^- .

Пользуясь теорией регулярных и вполне регулярных систем^[5] и применяя лимитанты, получим для F_k следующие оценки:

$$F_1^- = 0.27547 \frac{U_0^-}{d^2} - 0.09629 \leq F_1 \leq 0.27588 \frac{U_0^+}{d^2} - 0.09641 = F_1^+$$

$$F_2^- = 0.18234 \frac{U_0^-}{d^2} - 0.11107 \leq F_2 \leq 0.18300 \frac{U_0^+}{d^2} - 0.11128 = F_2^+$$

$$F_3^- = 0.14762 \frac{U_0^-}{d^2} - 0.09749 \leq F_3 \leq 0.14845 \frac{U_0^+}{d^2} - 0.09775 = F_3^+$$

$$0.13440 \frac{U_0^-}{d^2} - 0.09196 \leq F_k^- \leq F_k \leq F_k^+ \leq 0.13739 \frac{U_0^+}{d^2} - 0.09288$$

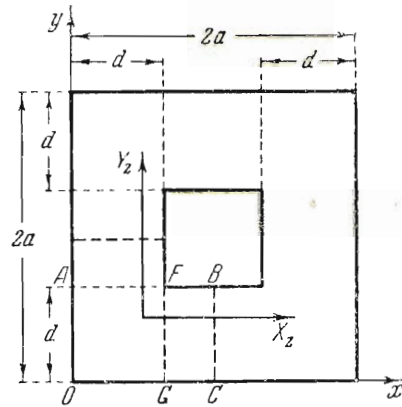
(k = 4, 5, ...)

где U_0^+ — значение U_0 с избытком, а U_0^- — значение с недостатком.

§ 4. Определение постоянного U_0 . Для определения U_0 пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при кручении^[6].

$$\int_{C_0} T_s ds = 2G\tau\Omega_0 \quad (4.1)$$

где C_0 — внутренний контур $FHMLF$ сечения (фиг. 1), Ω_0 — площадь, заключенная этим контуром, G — модуль сдвига, τ — угол закручивания



Фиг. 2

на единицу длины, T_s — проекция касательного напряжения в какой-либо точке контура C_0 на направление касательной к этому контуру.

Подставив в (4.1) значение

$$T_s = \left(\frac{\partial U}{\partial y} \frac{dx}{ds} - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dy}{ds} \right) G\tau \quad (4.2)$$

и произведя некоторое преобразование, соотношение (4.1) приведем к виду

$$\int_{d_1}^a \left(\frac{\partial U_1}{\partial y} \right)_{y=d_1} dx + \int_{d_1}^b \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)_{x=d_1} dy = 2(a-d_2)(b-d_1) \quad (4.3)$$

Пользуясь найденными значениями $f_k(x)$ и $v_k(y)$ из соотношений (1.2), (1.6) и (4.3), получим

$$U_0 = \frac{d_1 d_2}{d_2(a-d_2) + d_1(b-d_1)} \left\{ 2ab - ad_1 - bd_2 + \right. \\ \left. + \frac{d_2^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{R_k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi(b-d_1)}{d_2} + \right. \\ \left. + \frac{d_1^2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{S_k}{k^2} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-d_2)}{d_1} - d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k + \gamma_k}{k} \right\} \quad (4.4)$$

где R_k, S_k — постоянные интегрирования, определяющиеся из систем (3.3), а β_k и γ_k имеют значения (3.4) и (3.5). Подставив в (4.4) значения коэффициентов R_k и S_k с избытком и с недостатком и разрешив это уравнение относительно U_0 , получим значения U_0 с избытком и с недостатком.

§ 5. Определение функции напряжений. Согласно (1.2), (1.6), (1.9) и найденным значениям функций $f_k(x)$, $v_k(y)$, $\varphi_k(x)$ и $\omega_k(y)$ функция напряжений имеет вид:

$$U_1(x, y) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p(d_1) \sin \frac{p\pi x}{d_2} \operatorname{csch} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{d_2} + y(d_1 - y) + \quad (5.1) \\ + d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{S_k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-x)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \\ + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi(x-d_2)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} + \quad \text{при } 0 \leq x \leq d_2 \\ + \frac{2}{\pi} \frac{d_1}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-d_2)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1) p (-1)^p}{(pd_1/d_2)^2 + k^2}$$

$$U_1(x, y) = U_0 \frac{y}{d_1} + y(d_1 - y) + \quad \text{при } d_2 \leq x \leq a \quad (5.2) \\ + d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{S_k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-x)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1}$$

$$U_2(x, y) = U_0 \frac{x}{d_2} + x(d_2 - x) + \quad \text{при } d_1 \leq y \leq b \quad (5.3) \\ + d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{R_k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi(b-y)}{d_2} \sin \frac{k\pi x}{d_2}$$

$$\begin{aligned}
 U_2(x, y) = & \sum_{p=1}^{\infty} f_p(d_2) \sin \frac{p\pi y}{d_1} \operatorname{csch} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sh} \frac{p\pi x}{d_1} + x(d_2 - x) + \\
 & + d_1 d_2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{R_k}{k} \operatorname{sh} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi(b-y)}{d_2} \sin \frac{k\pi x}{d_2} + \\
 & + \frac{2U_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{ch} \frac{k\pi(y-d_1)}{d_2} \sin \frac{k\pi x}{d_2} + \quad \text{при } 0 \leq y \leq d_1 \\
 & + \frac{2}{\pi} \frac{d_2}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi(y-d_1)}{d_2} \sin \frac{k\pi x}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d_2) (-1)^p p}{(p d_2 / d_1)^2 + k^2}
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $f_p(d_2)$ и $v_p(d_1)$ имеют значения;

$$\begin{aligned}
 f_p(d_2) = & \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left\{ \frac{2U_0}{\pi} + \frac{4d_1^2}{p^2\pi^3} [1 + (-1)^{p+1}] - \right. \\
 & \left. - S_p d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{p\pi d_2}{d_1} \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d_2)}{d_1} \right\}
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}
 v_p(d_1) = & \frac{(-1)^{p+1}}{p} \left\{ \frac{2U_0}{\pi} + \frac{4d_1^2}{p^2\pi^3} [1 + (-1)^{p+1}] - \right. \\
 & \left. - R_p d_1 d_2 \operatorname{sh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sch} \frac{p\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{p\pi(b-d_1)}{d_2} \right\}
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя найденные значения функции напряжений $U(x, y)$ в обычные формулы, найдем напряжения и жесткость при кручении.

В качестве примера определим жесткость и напряжения при кручении стержня с полым квадратным поперечным сечением (фиг. 2).

§ 6. Определение жесткости при кручении. Подставив в (5.1) — (5.6) $b = a$ и $d_1 = d_2 = d$ и пользуясь формулой для жесткости профиля

$$C = 8G \left[(a-d)^2 U_0 + \int_0^d \int_0^d U(x, y) dx dy + 2 \int_0^d dy \int_d^a U(x, y) dx \right] \quad (6.1)$$

после интегрирования получим

$$\begin{aligned}
 C = & 8Gd^4 \left\{ \left(\frac{a}{d} - 1 \right) \frac{a}{d} \frac{U_0}{d^2} + \frac{1}{3} \left(\frac{a}{d} - 1 \right) + \right. \\
 & + \frac{16}{\pi^4} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^4} \left[1 - \frac{1}{k\pi} \operatorname{th} \frac{k\pi a}{d} - \frac{1}{k\pi} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-d)}{d} \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \right] + \\
 & + \frac{4}{\pi^3} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[1 + \operatorname{sh} k\pi \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-d)}{d} - \right. \\
 & \left. - \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-d)}{d} \right] \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p(-1)^{p+1}}{p^2 + k^2} \frac{f_p(d)}{d^2} - \\
 & - \frac{4U_0}{\pi^3 d^2} \sum_{k=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left[\operatorname{ch} k\pi \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-d)}{d} + \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-d)}{d} \right] + \\
 & \left. + \frac{2}{\pi^2} \sum_{p=1, 3, \dots}^{\infty} \frac{f_p(d)}{d^2} \frac{\operatorname{th} \frac{1}{2} p\pi}{p^2} \right\}
 \end{aligned} \quad (6.2)$$

где U_0 определяется из уравнения

$$\frac{U_0}{d^2} = \frac{a}{d} + \frac{1}{\pi} \frac{d}{a-d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{k^2} \operatorname{sh} k\pi \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-d)}{d} - \frac{d}{a-d} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} \quad (6.3)$$

$f_p(d)$ имеет значение

$$f_p(d) = \frac{(-1)^p d^3}{p} \left\{ F_p \operatorname{sh} p\pi \operatorname{sch} \frac{p\pi a}{d} \operatorname{ch} \frac{p\pi(a-d)}{d} - \frac{2}{\pi} \frac{U_0}{d^2} - \frac{4[1 + (-1)^{p+1}]}{p^2 \pi^3} \right\} \quad (6.4)$$

неизвестные постоянные F_k определены неравенствами (3.24), а α_k имеет значение (3.19).

Подставляя найденные значения коэффициентов F_k^+ и F_k^- в (6.2), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости. При этом коэффициентам с недостатком F_k^- будет соответствовать нижняя граница жесткости C^- , а коэффициентам с избытком F_k^+ верхняя граница жесткости C^+ .

Таблица 1

a/d	C_0^*	C_0^+	C_0^-	Δ	δ
1.5	8.0	11.052	11.051	38.4	0.009
2.0	27.0	32.952	32.949	22.0	0.008
2.5	64.0	73.780	73.775	15.3	0.008
3.0	125.0	139.518	139.509	11.6	0.007
3.5	216.0	236.164	236.150	9.3	0.007
4.0	343.0	369.716	369.697	7.8	0.005
5.0	729.0	771.542	771.509	5.8	0.004
10.0	6859.0	7035.066	7034.902	2.6	0.002
20.0	59319.0	60034.051	60033.323	1.2	0.001

В табл. 1 приведены вычисленные по формуле (6.2) относительные значения жесткостей

$$C_0^+ = C^+ / Gd^4, \quad C_0^- = C^- / Gd^4$$

и максимальной относительной погрешности

$$\delta = (C^+ - C^-) / C^-$$

в процентах для различных отношений a/d .

Для сравнения в табл. 1 приведены также значения относительной жесткости, вычисленные по полуэмпирической формуле Бредта [3].

$$C_0^* = \frac{C^*}{Gd^4} = \left(2 \frac{a}{d} - 1 \right)^3 \quad (6.5)$$

а также разность $\Delta = (C^+ - C^*) / C^+$ в процентах.

Из табл. 1 видно, что полуэмпирическая формула Бредта (6.5) дает достаточно близкие результаты только для тонкостенных стержней, у которых $a/d \geq 5$. Для толстостенных же стержней $a/d \leq 5$ формула Бредта неприменима, — при $a/d = 4$ дает ошибку в 8%, которая быстро увеличивается.

§ 7. Определение напряжений. Пользуясь выражениями (5.1)—(5.2) для функции напряжений, легко найти напряжения по обычным формулам теории упругости.

Опуская вычисления, приводим выражения для напряжений в точках $(a, 0)$ и (a, d) для стержня с полым квадратным поперечным сечением, изображенным на фиг. 2:

$$X_2(a, 0) = \left\{ \frac{U_0}{a^2} + 1 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k F_k \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{sh} k\pi \right\} G\tau d \quad (7.1)$$

$$X_2(a, d) = \left\{ \frac{U_0}{a^2} - 1 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} F_k \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d} \operatorname{sh} k\pi \right\} G\tau d \quad (7.2)$$

$$Y_2(a, 0) = Y_2(a, d) = 0 \quad (7.3)$$

Подставив сюда коэффициенты F_k^+ и F_k^- , определим верхнюю и нижнюю границы напряжений $X_2(a, 0)$ и $X_2(a, d)$, причем верхней границе напряжения X_2^+ будут соответствовать коэффициенты с избытком F_k^+ ($k = 1, 2, \dots$).

В табл. 2 приведены вычисленные значения напряжений $X_2(a, 0)$ и

Таблица 2

$\frac{a}{d}$	$\frac{X_2(a, d)}{G\tau d}$		$\frac{X_2(a, 0)}{G\tau d}$		$\frac{X_2^* \max}{G\tau d}$
1.5	0.3149	0.3143	2.0212	2.0212	2.0
2.0	0.7325	0.7322	2.6326	2.6324	2.25
2.5	1.2085	1.2082	3.1798	3.1797	2.6667
3.0	1.7050	1.7048	3.6974	3.6972	3.125
3.5	2.2068	2,2066	4.2048	4.2046	3,6
4.0	2.7092	2.7089	4.7088	4.7085	4.0833
5.0	3.7131	3.7129	5.7131	5.7129	5.0625
10.0	8.7204	8.7201	10.7204	10.7201	10.0278
20.0	18.7236	18.7234	20.7236	20.7234	20.0131

$X_2(a, d)$: в первой графе с избытком, во второй с недостатком.

В этой же таблице для сравнения приведены значения максимальных напряжений X_2^* , вычисленных по формуле Бредта

$$X_2 \max^* = \frac{(2a/d - 1)^2}{4(a/d - 1)} G\tau d \quad (7.4)$$

Из табл. 2 видно, что при определении максимальных напряжений приближенная формула Бредта может быть применима только для очень тонкостенных полых стержней.

Когда $a/d = 20$ формула Бредта (7.4) дает ошибку в 3.5%.

С уменьшением отношения a/d разница эта увеличивается, при $a/d = 10$ она становится равной 7%, при $a/d = 5$ она равна 13%, при $a/d = 3$ ошибка равна 18% и т. д.

II. Изгиб призматического стержня с полым прямоугольным поперечным сечением

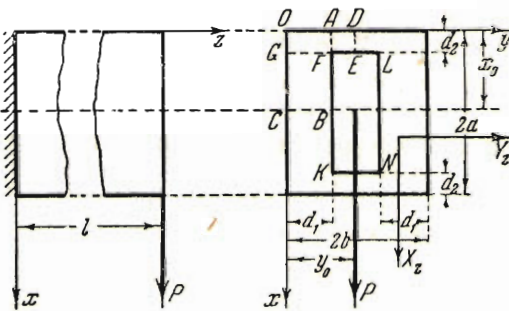
§ 8. Постановка задачи. Функция напряжений $F(x, y)$ при изгибе, как известно, удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{P\nu}{I(1+\nu)}(y - y_0) - \frac{P}{2I} f'(y) \tag{8.1}$$

внутри области сечения и условию

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{P}{2I} [x^2 - 2xx_0 - f(y)] \frac{dy}{ds} \tag{8.2}$$

на контуре сечения, где P — изгибающая сила, приложенная на свободном конце стержня в центре тяжести сечения, ν — коэффициент Пуассона, x_0, y_0 — координаты центра тяжести сечения, I — осевой момент инерции



Фиг. 3

поперечного сечения около оси y ; произвольная функция $f(y)$ подлежит определению из условий на контуре.

Ввиду симметричности области поперечного сечения (фиг. 3) достаточно найти функцию $F(x, y)$ только для части $ODEFBC$ сечения.

Для распространения решения на всю область поперечного сечения на основании

мембранной аналогии [7] требуется, чтобы на вертикальной оси симметрии функция $F(x, y)$ обратилась в нуль, а вдоль горизонтальной оси симметрии обратилась в нуль $\partial F/\partial x$.

Условием (8.2) на контуре сечения $F(x, y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого. В нашем случае, поперечное сечение — двухсвязная область, число постоянных слагаемых равно двум и для их определения пользуемся теоремой о циркуляции касательного напряжения при изгибе [6].

Полагаем, что в области $OABC$ функция $F(x, y)$ принимает значение $F_1(x, y)$, а в области $ODEG$ значение $F_2(x, y)$.

Функции $F_i(x, y)$ ($i=1,2$) ищем в виде

$$F_i(x, y) = \Psi_i(x, y) + \Phi_i(x, y) \quad (i=1,2) \tag{8.3}$$

где функции $\Phi_i(x, y)$ ($i=1,2$) существуют только в области $OAFG$, функция $\Psi_1(x, y)$ существует в области $OABC$, а $\Psi_2(x, y)$ в области $ODEG$.

Для вспомогательных функций $\Psi_i(x, y)$ и $\Phi_i(x, y)$ ($i=1, 2$), полагая $f(y) = 0$, получаем уравнения

$$\nabla^2 \Psi_i = K(y - b), \quad \nabla^2 \Phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad \left(K = \frac{P}{I} \frac{\nu}{1+\nu} \right) \tag{8.4}$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\Psi_1(x, 0) = \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}\right)_{x=a} = \Psi_1(0, y) + \Phi_1(0, y) = 0, \quad \Psi_1(x, d_1) = C_1 \quad (8.5)$$

$$\Psi_2(x, b) = \Psi_2(0, y) = \Psi_2(x, 0) + \Phi_2(x, 0) = 0$$

$$\Psi_2(d_2, y) = \frac{P}{2I} (2a - d_2) (b - y) d_2 \quad (8.6)$$

По методу, изложенному в первом параграфе работы, полагаем

$$\Psi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Psi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_2} \quad (8.7)$$

Тогда

$$\Phi_1(d_2, y) = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\right)_{x=d_2} = \Phi_1(x, 0) = 0, \quad \Phi_1(x, d_1) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(d_1) \sin \frac{k\pi x}{d_2} - C_1$$

$$\Phi_2(x, d_1) = \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}\right)_{y=d_1} = \Phi_2(0, y) = 0 \quad (8.8)$$

$$\Phi_2(d_2, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(d_2) \sin \frac{k\pi y}{d_1} - \frac{P}{2I} (2a - d_2) (b - y) d_2 \quad (8.9)$$

Ищем функции $\Phi_1(x, y)$ и $\Phi_2(x, y)$ в виде

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \sin \frac{k\pi y}{d_1}, \quad \Phi_2(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(y) \sin \frac{k\pi x}{d_2} \quad (8.10)$$

Уравнения (8.4) — (8.10) определяют $F(x, y)$ в области $ODEFBC$.

Постоянную C_1 определяем использованием теоремы о циркуляции касательного напряжения при изгибе для внутреннего контура сечения:

$$\int_{d_2}^a \left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)_{y=d_1} dx + \int_{d_1}^b \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}\right)_{x=d_1} dy = 0 \quad (8.11)$$

§ 9. Определение напряжений при изгибе. Решение уравнений этой задачи аналогично решению уравнений задачи о кручении стержня.

Опуская вычисления, приводим значения найденных напряжений: для области $OAFG$ (9.1)

$$\begin{aligned} X_2(x, y) = & \frac{P}{2I} (2a - x)x + \frac{P}{6I} \frac{\nu}{1 + \nu} (3y^2 - d_1^2) - \frac{P}{2I} \frac{\nu}{1 + \nu} (2y - d_1)b + \\ & + \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-x)}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} + \\ & + \frac{\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} k v_k(d_1) \sin \frac{k\pi x}{d_2} \operatorname{csch} \frac{k\pi d_1}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{d_2} - \\ & - \frac{2C_1}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi(x-d_2)}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} + \\ & + \frac{2}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} k (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-d_2)}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1) p (-1)^p}{(pd_1/d_2)^2 + k^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_z(x, y) = & \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} - \\
 & - \frac{\pi}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} p v_p(d_1) \cos \frac{p\pi x}{d_2} \operatorname{csh} \frac{p\pi d_1}{d_2} \operatorname{sh} \frac{p\pi y}{d_2} - \\
 & - \frac{2}{d_2} \sum_{p=1}^{\infty} k (-1)^k \operatorname{ch} \frac{k\pi(x-d_2)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{v_p(d_1) p (-1)^p}{(p d_1 / d_2)^2 + k^2} + \\
 & + \frac{2C_1}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{sh} \frac{k\pi(x-d_2)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1}
 \end{aligned}$$

для области $GFBC$

(9.2)

$$\begin{aligned}
 X_z(x, y) = & \frac{P}{2I} (2a-x)x + \frac{C_1}{d_1} + \frac{P}{6I} \frac{v}{1+v} (3y^2 - d_1^2) - \\
 & - \frac{P}{2I} \frac{v}{1+v} (2y-d_1)b + \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{ch} \frac{k\pi(a-x)}{d_1} \cos \frac{k\pi y}{d_1} \\
 Y_z(x, y) = & \frac{\pi}{d_1} \sum_{k=1}^{\infty} k B_k \operatorname{sch} \frac{k\pi a}{d_1} \operatorname{sh} \frac{k\pi(a-x)}{d_1} \sin \frac{k\pi y}{d_1}
 \end{aligned}$$

для области $AFED$

(9.3)

$$\begin{aligned}
 X_z(x, y) = & \frac{P}{2I} (2a-x)x - \frac{\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ k D_k + (-1)^k \frac{d_2 b}{\pi} \left[\frac{P}{I} (2a-d_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2P}{I} \frac{v}{1+v} \frac{d_2}{(k\pi)^2} (1 + (-1)^{k+1}) \right] \right\} \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{ch} \frac{k\pi(b-y)}{d_2} \sin \frac{k\pi x}{d_2} - \\
 & - \frac{P}{2I} (2a-d_2)x - \frac{P}{2I} \frac{v}{1+v} (d_2-x)x \\
 Y_z(x, y) = & - \frac{\pi}{d_2} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ k D_k + (-1)^k \frac{d_2 b}{\pi} \left[\frac{P}{I} (2a-d_2) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{2P}{I} \frac{v}{1+v} \frac{d_2}{(k\pi)^2} (1 + (-1)^{k+1}) \right] \right\} \operatorname{csch} \frac{k\pi b}{d_2} \operatorname{sh} \frac{k\pi(b-y)}{d_2} \cos \frac{k\pi x}{d_2} - \\
 & - \frac{P}{2I} (2a-d_2)(b-y) - \frac{P}{2I} \frac{v}{1+v} (b-y)(d_2-2x)
 \end{aligned}$$

В этих соотношениях постоянные интегрирования B_k и D_k определяются из бесконечных вполне регулярных систем линейных уравнений.

Поступила в редакцию
29 II 1950

Академия Наук Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б. Л. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 5.
2. Арутюнян Н. Х. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.
3. Динник А. Н. Кручение. ОНТИ. М.—Л. 1938.
4. Гринберг Г. А. Известия АН СССР, серия физическая. Т. X. № 2.
5. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ. М. 1941.
6. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости. Гостехиздат. М.—Л. 1947.
7. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ. М.—Л. 1934.