

ИЗГИБ И КРУЧЕНИЕ ТОНКОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЗА ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ

Р. А. Межлумян

(Москва)

В работе рассматриваются тонкостенные стержни и цилиндрические оболочки открытого профиля в стадии малых упруго-пластических деформаций.

В основе исследования лежат разработанные В. З. Власовым^[1] теория расчета тонкостенных конструкций и теории малых упруго-пластических деформаций А. А. Ильюшина^[3].

1. Основные предположения. Примем следующие предположения.

1. Материал оболочки *сжимаемый* и обладает произвольным законом упрочнения.

2. Пластическая зона распространяется произвольным образом по длине оболочки и по контуру ее поперечного сечения.

3. В пластических зонах интенсивность напряжений по толщине оболочки постоянна.

4. Линейные элементы, перпендикулярные к срединной поверхности оболочки до деформации, остаются прямолинейными и нормальными к срединной поверхности ее в процессе деформирования.

5. Все компоненты напряжений, направленные по нормали к срединной поверхности оболочки, весьма малы сравнительно с другими.

6. Контур поперечного сечения оболочки недеформируемый в том смысле, что проекция срединной линии на плоскость поперечного сечения $z = \text{const}$ остается неизменной.

7. В срединной поверхности деформируемой оболочки отсутствует деформация сдвига.

8. Направляющие тензоры напряжений и деформаций равны:

$$D_s = D_e \quad (1.1)$$

9. Существует однозначная зависимость между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций:

$$\sigma_i = 3G [1 - \chi(e_i)] e_i \quad (1.2)$$

10. Объемная деформация происходит упруго, т. е. материал предполагается сжимаемым:

$$\sigma = 3Ke \quad (1.3)$$

Здесь σ_i — интенсивность напряжений, e_i — интенсивность деформаций, G — модуль сдвига, σ — среднее напряжение, e — средняя деформация, K — модуль объемной деформации, χ — некоторая функция, определяемая по опытным данным [в литературе она обозначается $\omega(e_i)$].

2. Определение зависимости между компонентами тензора деформаций и вектора перемещений. Будем пользоваться неподвижной системой координат x, y, z с началом в произвольной точке в плоскости поперечного сечения оболочки и подвижной криволинейной системой координат, начало которой M лежит на срединной поверхности недеформированной оболочки, а координатные линии Ms, Mn, Mz направлены соответственно по срединной линии контура поперечного сечения, по внутренней нормали в точке M и по образующей цилиндрической поверхности (фиг. 1).

Компоненты тензора деформаций в криволинейной системе координат обозначим через

$$e_{ss}, e_{nn}, e_{zz}, e_{sn}, e_{nz}, e_{zs}$$

В силу принятых гипотез

$$e_{ss} = e_{sn} = e_{nz} = e_{zs} = 0 \quad (2.1)$$

В плоскости поперечного сечения возьмем произвольную точку A в качестве полюса. Обозначим через u и v проекции перемещения этой точки на координатные оси x и y . Поворот сечения вокруг полюса A характеризуется вектором углового перемещения θ , направленным по оси z .

В случае малых деформаций вектор перемещения любой точки $M(s, z)$ определяется формулой

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{b}_a + \theta \times \mathbf{r} \quad (2.2)$$

где \mathbf{b}_m и \mathbf{b}_a — перемещения точек $M(s, z)$ и A , а \mathbf{r} — радиус-вектор, соединяющий точку M с точкой A .

Пусть $t(s, z)$ будет проекцией вектора перемещения \mathbf{b}_m на направление касательной к контурной линии:

$$t(s, z) = -u(z) \sin \alpha + v(z) \cos \alpha + \theta(z) h(s) \quad (2.3)$$

Здесь $h(s)$ — расстояние от точки A до касательной к срединной линии контура в точке M и $\alpha = \alpha(s)$ — угол между касательной и осью y .

Проекция перемещения точки $M(s, z)$ на образующей обозначим через $w(s, z)$. Из условия отсутствия деформации сдвига в срединной поверхности $w(s, z)$ найдем по формуле В. З. Власова [1]

$$w(s, z) = \zeta(z) - u'(z)x(s) - v'(z)y(s) - \theta'(z)\omega(s) \quad (2.4)$$

Здесь $\zeta(z)$ — произвольная функция от z , характеризующая перемещение растяжения (сжатия), $\omega(s)$ — секториальная площадь, имеющая полюс в точке A .

Продольное относительное удлинение e_{zz} определяется формулой

$$e_{zz} = \zeta'(z) - u''(z)x(s) - v''(z)y(s) - \theta''(z)\omega'(s) \quad (2.5)$$

Дифференцируя (2.5) по z , найдем

$$\frac{\partial e_{zz}}{\partial z} = \zeta''(z) - u'''(z)x(s) - v'''(z)y(s) - \theta'''(z)\omega(s) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 e_{zz}}{\partial z^2} = \zeta'''(z) - u^{IV}(z)x(s) - v^{IV}(z)y(s) - \theta^{IV}(z)\omega(s) \quad (2.7)$$

В формулах (2.4) — (2.7) штрихами обозначены производные соответствующих порядков по z .

3. Связь между компонентами тензора напряжений и тензора деформаций. В криволинейной системе координат обозначим через $\sigma_s, \sigma_n, \sigma_z, \tau_{sn}, \tau_{nz}, \tau_{sz}$ компоненты тензора напряжений.

На основании принятых гипотез имеем

$$\sigma_n = \tau_{sn} = \tau_{nz} = 0 \quad (3.1)$$

Уравнение (1.1) представим в скалярной форме:

$$\begin{aligned} \sigma_s - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{ss} - e), & \tau_{sn} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{sn} \\ \sigma_n - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{nn} - e), & \tau_{nz} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{nz} \\ \sigma_z - \sigma &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{zz} - e), & \tau_{sz} &= \frac{\sigma_i}{3e_i} e_{sz} \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу (3.1) для среднего напряжения и средней деформации имеем

$$\sigma = \frac{\sigma_s + \sigma_z}{3}, \quad e = \frac{e_{nn} + e_{zz}}{3} \quad (3.3)$$

В силу (2.1), (3.1), (3.3) первые три уравнения (3.2) примут вид:

$$2\sigma_s - \sigma_z = -\frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{nn} + e_{zz}) \quad (3.4)$$

$$\sigma_s + \sigma_z = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (e_{zz} - 2e_{nn}) \quad (3.5)$$

$$2\sigma_z - \sigma_s = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} (2e_{zz} - e_{nn}) \quad (3.6)$$

Равенство $\sigma = 3Ke$ на основании (3.3) примет вид:

$$\sigma_s + \sigma_z = 3K(e_{nn} + e_{zz}) \quad (3.7)$$

Подставляя (3.7) в (3.4), получим

$$2\sigma_s - \sigma_z = \frac{2\sigma_i}{9Ke_i} (\sigma_s + \sigma_z) \quad (3.8)$$

Отсюда найдем связь между σ_s и σ_z :

$$\sigma_s = \frac{9Ke_i - 2\sigma_i}{18Ke_i + 2\sigma_i} \sigma_z \quad (3.9)$$

Из уравнений (3.5) и (3.6), исключая e_{nn} и принимая во внимание соотношение (3.9), найдем

$$\sigma_z = \frac{2}{3} \frac{18 + 2\sigma_i / Ke_i}{9 + 4\sigma_i / Ke_i} \frac{\sigma_i}{e_i} e_{zz} \quad (3.10)$$

Подставляя в (3.10) отношение σ_i / e_i из уравнения (1.2), найдем

$$\sigma_z = \frac{6 + 2[1 - \chi(e_i)]G/K}{3 + 4[1 - \chi(e_i)]G/K} 2G[1 - \chi(e_i)] e_{zz} \quad (3.11)$$

Величины E , K , G , ν связаны известными соотношениями

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.12)$$

где E — модуль (нормальной) упругости, ν — коэффициент Пуассона при упругих деформациях. Преобразуя (3.11) при помощи (3.12), получим

$$\sigma_z = E^* [1 - \chi_2(e_i)] e_{zz} \quad \left(E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \right) \quad (3.13)$$

Здесь функция $\chi_2(e_i)$ определяется равенством

$$\chi_2(e_i) = \frac{\{2\nu(1 + \nu) + (1 - 2\nu)[2 - \chi(e_i) + \nu\chi(e_i)]\} \chi(e_i)}{1 + \nu + 2(1 - 2\nu)[1 - \chi(e_i)]} \quad (3.14)$$

Из (3.5) и (3.7) найдем связь между компонентами деформаций:

$$e_{nn} = A(e_i) e_{zz} \quad \left(A(e_i) = \frac{2G[1 - \chi(e_i)] - 3K}{4G[1 - \chi(e_i)] + 3K} \right) \quad (3.15)$$

Пользуясь соотношениями (3.12) для $A(e_i)$, найдем

$$A(e_i) = \frac{(1 - 2\nu)[1 - \chi(e_i)] - (1 + \nu)}{2(1 - 2\nu)[1 - \chi(e_i)] + 1 + \nu} \quad (3.16)$$

Как известно, интенсивность деформаций (3.17)

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(e_{ss} - e_{nn})^2 + (e_{nn} - e_{zz})^2 + (e_{zz} - e_{ss})^2 + \frac{3}{2}(e_{sn}^2 + e_{nz}^2 + e_{zs}^2)}$$

На основании (2.1) это выражение можно представить в виде

$$e_i = B(e_i) e_{zz} \quad \left(B(e_i) = \frac{2}{3} \sqrt{A^2 - A + 1} \right) \quad (3.18)$$

Функция $B(e_i)$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{2\sqrt{\nu^2 - \nu + 1}}{3(1 - \nu)} \leq B(e_i) < \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (3.19)$$

Дифференцируя (3.18) по z , получим

$$\frac{\partial e_i}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial e_i} \frac{\partial e_i}{\partial z} e_{zz} + B \frac{\partial e_{zz}}{\partial z} \quad (3.20)$$

Здесь $\partial e_i / \partial z$ и $\partial z_{zz} / \partial z$ — малые величины одного порядка, а производная $\partial B / \partial e_i$ при больших деформациях стремится к нулю и потому в правой части (3.20) можно пренебречь первым слагаемым как малой величиной высшего порядка¹; тогда получим

$$\frac{\partial e_i}{\partial z} = B \frac{\partial e_{zz}}{\partial z} \quad (3.21)$$

¹ Учет малых величин второго порядка принципиально не представляет затруднений.

Таблица 1

$e_i \cdot 10^4$	$\chi(e_i) \cdot 10^3$	$\chi_2(e_i) \cdot 10^3$	$\chi_3(e_i) \cdot 10^3$	$-A(e_i) \cdot 10^3$	$B(e_i) \cdot 10^3$	$e_i \cdot 10^4 / B$
30	000	000	228	584	925	32
34	032	031	280	592	928	36
37	040	038	370	595	930	40
40	110	080	396	617	941	42
48	172	143	526	637	951	51
60	286	244	700	676	972	62
80	448	386	858	736	1006	79
100	540	495	890	774	1026	98
120	606	555	910	803	1043	115
140	658	608	920	825	1054	133
160	697	649	928	843	1064	155
180	725	680	934	856	1072	168
200	748	703	940	867	1078	186
220	767	724	943	877	1083	194
240	783	743	946	884	1087	207
260	799	759	949	892	1092	238
280	811	773	950	898	1095	256
300	821	785	951	903	1098	274
320	830	796	952	908	1100	282
340	839	806	953	912	1103	309
360	846	815	954	915	1105	326
380	853	822	955	920	1107	344
400	859	829	956	923	1109	360
500	881	855	960	933	1114	449
600	897	874	963	943	1119	534
700	910	889	965	950	1124	624
800	918	901	967	954	1127	710
1000	931	916	969	961	1131	886
1200	940	927	972	966	1133	1061
1500	950	938	980	972	1138	1320
1770	955	947	988	974	1138	1495

Умножая обе части этого равенства на e_{zz} и принимая во внимание (3.18), получим

$$\frac{\partial e_i}{\partial z} e_{zz} = \frac{\partial e_{zz}}{\partial z} e_i \quad (3.22)$$

Дифференцируя (3.13) по z и принимая во внимание (3.22), будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E^* [1 - \chi_3(e_i)] \frac{\partial e_{zz}}{\partial z} \quad (3.23)$$

где функция $\chi_3(e_i)$ определяется уравнением

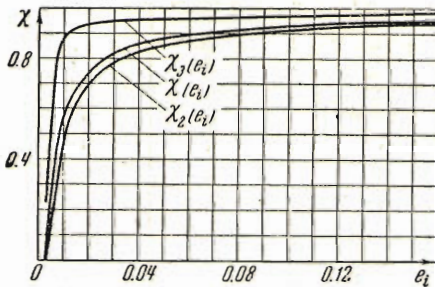
$$\chi_3(e_i) = \chi_2(e_i) + \frac{\partial \chi_2(e_i)}{\partial e_i} e_i \quad (3.24)$$

В качестве примера в табл. 1 приведены значения функции $\chi = \chi(e_i)$, подсчитанные по экспериментальным данным для обычного дурала с механическими характеристиками $G = 0.272 \times 10^6$ кг/см² и $\nu = 0.368$, и соответствующие значения функций $\chi_2 = \chi_2(e_i)$, $\chi_3 = \chi_3(e_i)$, $A = A(e_i)$

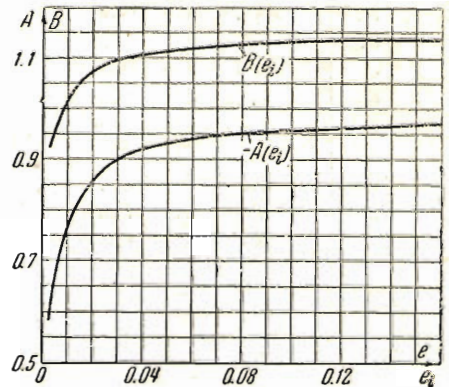
и $B = B(e_i)$. По этим данным на фиг. 2 приведены графики $\chi = \chi(e_i)$, $\chi_2 = \chi_2(e_i)$, $\chi_3 = \chi_3(e_i)$; графики $A = A(e_i)$ и $B = B(e_i)$ даны на фиг. 3.

Пренебрегая малыми величинами высшего порядка после дифференцирования (3.23) по z , получим

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = E^* [1 - \chi_3(e_i)] \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial z^2} \quad (3.25)$$



Фиг. 2



Фиг. 3

Подставляя (2.5), (2.6), (2.7) в (3.13), (3.23), (3.25), получим

$$\sigma_z = E^* [1 - \chi_2(e_i)] [\zeta'(z) - u''(z)x(s) - v''(z)y(s) - \theta''(z)\omega(s)] \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = E^* [1 - \chi_3(e_i)] [\zeta''(z) - u'''(z)x(s) - v'''(z)y(s) - \theta'''(z)\omega(s)] \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = E^* [1 - \chi_3(e_i)] [\zeta'''(z) - u^{IV}(z)x(s) - v^{IV}(z)y(s) - \theta^{IV}(z)\omega(s)] \quad (3.28)$$

4. Определение крутящего момента от касательных напряжений.

В упругих зонах крутящий момент H , возникающий от неравномерности распределения касательных напряжений по толщине оболочки, равен

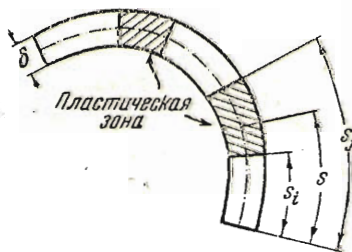
$$H = GI_d \theta'(z) \quad (4.1)$$

где I_d — момент инерции при кручении. Точный учет этого момента в пластических зонах вызывает большие затруднения. Однако очевидно, что с ростом интенсивности напряжений степень неравномерности распределения касательных напряжений по толщине, уменьшаясь, влечет уменьшение H .

Для упрощения принимаем гипотезу

$$\frac{\partial H}{\partial z} = GI_{d3} \theta''(z) \quad (4.2)$$

$$I_{d3} = \frac{\mu}{3} \sum s \delta^3 - \frac{\mu}{3} \sum_1^n \sum_{s_i}^{s_j} \chi_3(e_i) s \delta^3 \quad (4.3)$$



Фиг. 4

Здесь μ — эмпирический коэффициент, n — число пластических зон, s_i — координата начала пластической зоны по контуру (фиг. 4), s_j — координата конечной точки пластической зоны, индекс 3 указывает, что момент инерции I_d соответствует функции χ_3 .

5. Преобразование уравнений равновесия в напряжениях в систему уравнений в перемещениях. Равновесие элементарной полоски, заключенной между двумя бесконечно близкими сечениями z , $z + dz$ описывается известными из теории тонкостенных упругих стержней [1] уравнениями

$$\begin{aligned} \int_F \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dF + q_z + T_L - T_K &= 0 \\ \int_F \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} x dF + q_x + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + T_L' x_L - T_K' x_K &= 0 \\ \int_F \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} y dF + q_y + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + T_L' y_L - T_K' y_K &= 0 \\ \int_F \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} \omega dF + GI_{d3} \theta'' + m_z + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + T_L' \omega_L - T_K' \omega_K &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

где F — площадь поперечного сечения, l — длина срединной линии поперечного сечения.

Пользуясь соотношениями (3.26), (3.27), (3.28), преобразуем уравнения (5.1):

$$\begin{aligned} F_3 \zeta'' - S_{y3} u''' - S_{x3} v''' - S_{\omega 3} \theta''' &= -\frac{1}{E^*} (q_z + T_L - T_K) \\ -S_{y3} \zeta''' + I_{y3} u^{IV} + I_{xy3} v^{IV} + S_{y\omega 3} \theta^{IV} &= \\ &= \frac{1}{E^*} \left(q_x + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + T_L' x_L - T_K' x_K \right) \\ -S_{x3} \zeta''' + I_{xy3} u^{IV} + I_{x3} v^{IV} + S_{x\omega 3} \theta^{IV} &= \\ &= \frac{1}{E^*} \left(q_y + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + T_L' y_L - T_K' y_K \right) \\ -S_{\omega 3} \zeta''' + S_{y\omega 3} u^{IV} + S_{x\omega 3} v^{IV} + I_{\omega 3} \theta^{IV} - \frac{GI_{d3}}{E^*} \theta'' &= \\ &= \frac{1}{E^*} \left(m_z + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + T_L' \omega_L - T_K' \omega_K \right) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь в произвольной системе отсчета коэффициенты системы (5.2) определяются формулами

$$F_3 = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] dF = F - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) dF \quad (5.3)$$

$$S_{y3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] x dF = S_x - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) x dF \quad (5.4)$$

$$S_{x3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] y dF = S_y - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) y dF \quad (5.5)$$

$$I_{x_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] y^2 dF = I_x - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) y^2 dF \quad (5.6)$$

$$I_{y_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] x^2 dF = I_y - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) x^2 dF \quad (5.7)$$

$$I_{xy_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] xy dF = I_{xy} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) xy dF \quad (5.8)$$

$$S_{\omega_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] \omega dF = S_{\omega} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) \omega dF \quad (5.9)$$

$$S_{x\omega_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] y\omega dF = S_{x\omega} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) y\omega dF \quad (5.10)$$

$$S_{y\omega_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] x\omega dF = S_{y\omega} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) x\omega dF \quad (5.11)$$

$$I_{\omega_3} = \int_F [1 - \chi_3(e_i)] \omega^2 dF = I_{\omega} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) \omega^2 dF \quad (5.12)$$

Здесь F — площадь поперечного сечения, F_{ij} — площадь одной пластической зоны (фиг. 3), S_x , S_y — статические моменты относительно осей x , y , S_{ω} — секториальный статический момент, $S_{x\omega}$, $S_{y\omega}$ — секториально-линейные статические моменты, I_x , I_y — моменты инерции относительно осей x , y , I_{ω} — секториальный момент инерции сечения.

Легко заметить, что величины, определяемые формулами (5.3) — (5.12), зависят, кроме геометрических характеристик сечения, также от напряженного состояния и материала оболочки, т. е. от функции $\chi_3(e_i)$. Так как интегрирование распространяется по всему сечению оболочки, поэтому для данной оболочки при заданных внешних нагрузках они являются функциями только от координаты z .

Система (5.2) написана для произвольной системы отсчета и является общей для всей оболочки независимо от того, находится данное сечение в стадии упругих или упруго-пластических деформаций. Найдем такую систему отсчета, при которой система (5.2) распадается на отдельные самостоятельные уравнения. Для этого положим

$$S_{y_3} = 0, \quad S_{x_3} = 0, \quad I_{xy_3} = 0 \quad (5.13)$$

$$S_{\omega_3} = 0 \quad (5.14)$$

$$S_{x\omega_3} = 0, \quad S_{y\omega_3} = 0 \quad (5.15)$$

Систему координат, для которой выполняются условия (5.13), назовем главной *кинетической* системой координат.

Пользуясь (5.13), найдем положение начала и ориентацию этой системы:

$$x_3 = \frac{1}{F_3} \left[\int_F x dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) x dF \right] \quad (5.16)$$

$$y_3 = \frac{1}{F_3} \left[\int_F y dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) y dF \right] \quad (5.17)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_3 = \frac{2I_{xy3}}{I_{y3} - I_{x3}} \quad (5.18)$$

Пользуясь условием (5.14), найдем секториальную площадь ω , которая определит положение *кинетической* секториальной нулевой точки:

$$\omega_3 = \frac{1}{F_3} \left[\int_F \omega' dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) \omega' dF \right] \quad (5.19)$$

где ω' — секториальная площадь, отсчитываемая от произвольной точки M на контуре срединной линии при данном полюсе A .

Из условий (5.15) определим в плоскости поперечного сечения положение полюса для отсчета секториальных площадей. Эту точку, отличную от обычного центра изгиба, назовем *кинетическим центром*. Координаты его определяются формулами

$$a_{x3} - b_{x3} = \frac{1}{I_{x3}} \left[\int_F y \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) y \omega_b dF \right] \quad (5.20)$$

$$a_{y3} - b_{y3} = -\frac{1}{I_{y3}} \left[\int_F x \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_3(e_i) x \omega_b dF \right] \quad (5.21)$$

В главной кинетической системе отсчета уравнения (5.2) примут вид:

$$\begin{aligned} E^* \zeta'' &= f_1(z), & E^* u^{IV} &= f_2(z) \\ E^* v^{IV} &= f_3(z), & E^* \theta^{IV} - \varphi(z) \theta'' &= f_4(z) \end{aligned} \quad (5.22)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(z) &= -\frac{q_z + T_L - T_K}{F_3}, & \varphi(z) &= \frac{GI_{d3}}{I_{\omega 3}} \\ f_2(z) &= \frac{1}{I_{y3}} \left(q_x + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} x ds + T_L' x_L - T_K' x_K \right) \\ f_3(z) &= \frac{1}{I_{x3}} \left(q_y + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} y ds + T_L' y_L - T_K' y_K \right) \\ f_4(z) &= \frac{1}{I_{\omega 3}} \left(m_z + \int_l \frac{\partial p_z}{\partial z} \omega ds + T_L' \omega_L - T_K' \omega_K \right) \end{aligned} \quad (5.23)$$

Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, $f_4(z)$, $\varphi(z)$ определяются методом упругих решений. При этом предварительно строятся по табл. 1 функции

$$\chi_2(e_i) = \chi_2\left(\frac{e_i}{B}\right), \quad \chi_3(e_i) = \chi_3\left(\frac{e_i}{B}\right)$$

6. Определение нормальных напряжений. Продольные обобщенные силы определяются формулами ^[1]

$$N = \int_F \sigma_z dF, \quad M_y = \int_F \sigma_z x dF, \quad M_x = \int_F \sigma_z y dF, \quad B = \int_E \sigma_z x dF \quad (6.1)$$

Из этих равенств при помощи выражения (3.26) получим следующую систему дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\begin{aligned} F_2 \zeta' - S_{y_2} u'' - S_{x_2} v'' - S_{\omega_2} \theta'' &= \frac{N}{E^*} \\ S_{y_2} \zeta' - I_{y_2} u'' - I_{xy_2} v'' - S_{y\omega_2} \theta'' &= \frac{M_y}{E^*} \\ S_{x_2} \zeta' - I_{yx_2} u'' - I_{x_2} v'' - S_{x\omega_2} \theta'' &= \frac{M_x}{E^*} \\ S_{\omega_2} \zeta' - S_{y\omega_2} u'' - S_{x\omega_2} v'' - I_{\omega_2} \theta'' &= \frac{B}{E^*} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} F_2 &= F - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) dF \\ S_{x_2} &= S_x - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y dF, \quad S_{y_2} = S_y - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x dF \\ I_{x_2} &= I_x - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y^2 dF, \quad I_{y_2} = I_y - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x^2 dF \\ I_{xy_2} &= I_{xy} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) xy dF, \quad S_{\omega_2} = S_\omega - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) \omega dF \\ S_{x\omega_2} &= S_{x\omega} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y \omega dF, \quad S_{y\omega_2} = S_{y\omega} - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x \omega dF \\ I_{\omega_2} &= I_\omega - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) \omega^2 dF \end{aligned} \quad (6.3)$$

Найдем такую систему отсчета, при выборе которой все коэффициенты системы дифференциальных уравнений (6.2), кроме диагональных, обратятся в нули. Поступая аналогичным путем, как в разделе 5, найдем

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{F_2} \left[\int_F x dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x dF \right], \quad y_2 = \frac{1}{F_2} \left[\int_F y dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y dF \right] \\ \operatorname{tg} 2 \alpha_2 &= \frac{2I_{xy_2}}{I_{y_2} - I_{x_2}}, \quad \omega_2 = \frac{1}{F_2} \left[\int_F \omega' dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) \omega' dF \right] \\ a_{x_2} - b_{x_2} &= \frac{1}{I_{x_2}} \left[\int_F y \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) y \omega_b dF \right] \\ a_{y_2} - b_{y_2} &= -\frac{1}{I_{y_2}} \left[\int_F x \omega_b dF - \sum_1^n \int_{F_{ij}} \chi_2(e_i) x \omega_b dF \right] \end{aligned} \quad (6.4)$$

Индекс 2 указывает, что эти величины характеризуются функцией $\chi_2(e_i)$. В новой системе отсчета, которую назовем *главной приведенной системой*, вместо системы дифференциальных уравнений (6.2) будем иметь следующие уравнения:

$$\zeta' = \frac{N}{E^* F_2}, \quad u'' = -\frac{M_y}{E^* I_{y2}}, \quad v'' = -\frac{M_x}{E^* I_{x2}}, \quad \theta'' = -\frac{B}{E^* I_{\omega 2}} \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (3.26), найдем нормальное напряжение σ_z :

$$\sigma_z = [1 - \chi_2(e_i)] \left[\frac{N}{F_2} + \frac{M_y}{I_{y2}} x + \frac{M_x}{I_{x2}} y + \frac{B}{I_{\omega 2}} \omega \right] \quad (6.6)$$

7. Определение касательных напряжений. Из условия равновесия элемента оболочки, заключенного между четырьмя бесконечно близкими сечениями, найдем

$$\tau_{sz} = \frac{1}{\delta} \left[T_K(z) - \int_0^s \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dF - \int_0^s p_z ds \right] \quad (7.1)$$

Если края стержня-оболочки свободны от сдвигающих сил и продольная внешняя нагрузка отсутствует, то, преобразуя (7.1) при помощи (3.27), будем иметь

$$\tau_{sz}(s, z) = \frac{E^*}{\delta} [S_{y3}(s, e_i) u''' + S_{x3}(s, e_i) v''' + S_{\omega 3}(s, e_i) \theta'''] \quad (7.2)$$

Обобщенные поперечные силы определяются формулами

$$Q = \int_F \tau_{sz} \delta dx, \quad Q_y = \int_F \tau_{sz} \delta dy, \quad M_\omega = \int_F \tau_{sz} \delta d\omega \quad (7.3)$$

где Q_x , Q_y — поперечные силы, действующие соответственно по направлению осей x , y , M_ω — изгибно-крутящий момент сдвигающих усилий относительно кинетического центра.

Возьмем за систему отсчета главную кинетическую систему. Подставляя (7.2) в (7.3), после некоторых преобразований получим

$$Q_x = -E^* I_{y3} u''', \quad Q_y = -E^* I_{x3} v''', \quad M_\omega = -E^* I_{\omega 3} \theta''' \quad (7.4)$$

Исключая из уравнений (7.2) и (7.4) производные от перемещений u''' , v''' , θ''' , найдем касательное напряжение

$$\tau_{sz} = -\frac{1}{\delta} \left[\frac{Q_x}{I_{y3}} S_{y3}(s, e_i) + \frac{Q_y}{I_{x3}} S_{x3}(s, e_i) + \frac{M_\omega}{I_{\omega 3}} S_{\omega 3}(s, e_i) \right] \quad (7.5)$$

Напряжения, деформации и перемещения определяются методом упругих решений. Поэтому остаточные напряжения, деформации и перемещения согласно теореме о разгрузке [3] можно определить как разности между соответствующими величинами в первом и последнем приближениях.

8. Определение поперечных сил, изгибно-крутящего момента, изгибающих моментов и бимоента. Рассмотрим случай, когда на стержень действуют только поперечные погонные нагрузки с компонентами q_x , q_y , m_z , являющиеся в общем случае функциями только от z , и отсутствует крутящий момент от неравномерности распределения касательных напряжений по толщине тонкостенного стержня, т. е. допустим, что $q_z = H = 0$.

Тогда на основании уравнений (5.22) и (7.4) найдем

$$Q_x = -I_{y3} \left[\int_0^z \frac{q_x}{I_{y3}} dz + \left(\frac{Q_x}{I_{y3}} \right)_0 \right], \quad Q_y = -I_{x3} \left[\int_0^z \frac{q_y}{I_{x3}} dz + \left(\frac{Q_y}{I_{x3}} \right)_0 \right]$$

$$M_\omega = -I_{\omega 3} \left[\int_0^z \frac{m_z}{I_{\omega 3}} dz + \left(\frac{M_\omega}{I_{\omega 3}} \right)_0 \right]$$
(8.1)

где Q_{x0} , Q_{y0} — поперечные силы, $M_{\omega 0}$ — изгибно-крутящий момент в сечении $z = 0$.

Дифференцируя (8.1) по z , найдем

$$q_x = -\frac{dQ_x}{dz} + \frac{Q_x}{I_{y3}} \frac{dI_{y3}}{dz}, \quad q_y = -\frac{dQ_y}{dz} + \frac{Q_y}{I_{x3}} \frac{dI_{x3}}{dz}$$

$$m_z = -\frac{dM_\omega}{dz} + \frac{M_\omega}{I_{\omega 3}} \frac{dI_{\omega 3}}{dz}$$
(8.2)

Аналогичным путем из уравнений (6.5) и (7.4) получим

$$M_y = I_{y2} \left[\int_0^z \frac{Q_x}{I_{y3}} dz + \left(\frac{M_y}{I_{y2}} \right)_0 \right], \quad M_x = I_{x2} \left[\int_0^z \frac{Q_y}{I_{x3}} dz + \left(\frac{M_x}{I_{x2}} \right)_0 \right]$$

$$B = I_{\omega 2} \left[\int_0^z \frac{M_\omega}{I_{\omega 3}} dz + \left(\frac{B}{I_{\omega 2}} \right)_0 \right]$$
(8.3)

Здесь M_{x0} , M_{y0} — изгибающие моменты, B_0 — изгибно-крутящий бимомент в сечении $z = 0$.

Из (8.3) легко получить зависимости в виде

$$Q_x = \frac{dM_y}{dz} \frac{I_{y3}}{I_{y2}} - \frac{M_y}{I_{y2}^2} I_y \frac{dI_{y2}}{dz}$$

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz} \frac{I_{x3}}{I_{x2}} - \frac{M_x}{I_{x2}^2} I_{x3} \frac{dI_{x2}}{dz}$$

$$M_\omega = \frac{dB}{dz} \frac{I_{\omega 3}}{I_{\omega 2}} - \frac{B}{I_{\omega 2}^2} I_{\omega 3} \frac{dI_{\omega 2}}{dz}$$
(8.4)

Поступила в редакцию

6 III 1950

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Гостройиздат. М. — Л. 1940.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. М. — Л. 1949.
3. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. 1948.