Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950
Институт механики Академии Наук Союза ССР

ЗАМКНУТОЕ РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ГРАНИЧНОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Н. П. Еругин

(Ленинград)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1}$$

при условиях

$$u = P = \text{const} \qquad \text{при} \quad y=0,\ t>0 \tag{2}$$

$$u = 0 \qquad \text{при} \quad y=l,\ t>0 \tag{3}$$

$$u = 0 \qquad \text{при} \quad t=0,\ 0<y<l \tag{4}$$

Как известно, решение такой задачи можно получить в виде

$$u=\frac{P\,(l-y)}{l}-\frac{2P}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,e^{-n^2\pi t/l^2}\sin\frac{n\,\pi\,y}{l} \tag{5}$$

В некоторых исследованиях такое решение принципиально невозможно использовать.

Укажем другой вид этого решения, в некоторых случаях более пригодный.

Легко убедиться непосредственной проверкой, что решением уравнения (1) является функция

$$u=\frac{P}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin\,(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}\,e^{-t\tau i}-\frac{\sin\,(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\,e^{t\tau i}\right]d\tau \tag{6}$$

Это решение удовлетворяет условию (3).

При $y=0$ имеем

$$u=\frac{2P}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin t\tau}{\tau}\,d\tau=P \tag{7}$$

т. е. условие (2) также выполняется.

При $t=0$ имеем

$$u=\frac{P}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin\,(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}-\frac{\sin\,(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\right]d\tau=\psi\,(y) \tag{8}$$

Ряд

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\,e^{-n^2\pi^2 t\,/\,l^2}\sin\frac{n\pi y}{l}=\varphi\,(t,y) \tag{9}$$

с произвольными постоянными C_n будет формально удовлетворять уравнению (1)

Определим постоянные C_n так, чтобы имело место равенство

$$\varphi(t, y)\,|_{t=0} = \psi(y) \tag{10}$$

Очевидно, для C_n найдем формулу

$$C_n = \frac{1}{l}\int\limits_0^{2l} \psi(y) \sin\frac{n\pi y}{l}\, dy \tag{11}$$

С помощью элементарных вычислений получим

$$C_n = -\frac{2P}{n\pi} \tag{12}$$

Подставив значение C_n в (9), имеем

$$u = -\frac{2P}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{l}\, e^{-n^2\pi^2 t\,/\,l^2} \tag{13}$$

Таким образом, мы получили решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (10), а также условиям

$$u(t, y)\,|_{y=0} = 0, \qquad u(t, y)\,|_{y=l} = 0 \tag{14}$$

Разность решений (6) и (13) дает решение уравнения (1), удовлетворяющее, очевидно, условиям (2), (3) и (4):

$$u = \frac{P}{\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}\, e^{-t\tau i} - \frac{\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\, e^{t\tau i}\right] d\tau +$$

$$+\frac{2P}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{l}\, e^{-n^2\pi^2 t\,/\,l^2} \tag{15}$$

Так как по известной формуле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{l} = \frac{\pi}{2}\,\frac{l-y}{l} \tag{16}$$

то в силу (4) из (15) получаем

$$\frac{P}{\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}} - \frac{\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\right] d\tau = -\frac{P}{l}(l-y) \tag{17}$$

Заметим еще, что функция

$$t(y) = \frac{P(l-y)}{l} \tag{18}$$

также есть решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (3).

Сумма решений (18) и (13) дает приведенное выше решение (5), удовлетворяющее условиям (2), (3) и (4) в силу (16). Здесь это решение (5) получено иным способом, чем ранее.

Полусумма решений (18) и (6) дает решение

$$u = \frac{P}{2l}(l-y) + \frac{P}{2\pi i}\int\limits_0^{\infty}\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}\, e^{-t\tau i} - \frac{\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}\, e^{t\tau i}\right] d\tau \tag{19}$$

Это решение также удовлетворяет условиям (2) в силу (7) и условиям (3) и (4) в силу (17).

Выделяя в решении (19) вещественную часть, найдем

$$u=\frac{P}{2l}(l-y)-\frac{4P}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin\frac{y-l}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}\,\mathrm{ch}\frac{y-l}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}\sin\frac{l\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\mathrm{ch}\frac{l\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}}{e^{\sqrt{2\tau}l}+e^{-\sqrt{2\tau}\,l}-2\cos\sqrt{2\tau}\,l}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos\frac{y-l}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}\,\mathrm{ch}\frac{y-l}{\sqrt{2}}\sqrt{\tau}\cos\frac{l\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}\mathrm{sh}\frac{l\sqrt{\tau}}{\sqrt{2}}}{e^{\sqrt{2\tau}\,l}+e^{-\sqrt{2\tau}\,l}-2\cos\sqrt{2\tau}\,l}\right]\sin t\tau\,d\tau \tag{20}$$

Заменяя $\sqrt{\tau/2}$ через τ под знаком интеграла, перепишем это так:

$$u=\frac{P}{2l}(l-y)-\frac{8P}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\,\tau\sin l\tau\,\mathrm{ch}\,(y-l)\,\tau\,\mathrm{ch}\,l\tau}{e^{2\tau l}+e^{-2\tau l}-2\cos 2\tau l}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(y-l)\,\tau\cos l\tau\,\mathrm{sh}\,(y-l)\,\tau\,\mathrm{sh}\,l\tau}{e^{2\tau l}+e^{-2\tau l}-2\cos 2\tau l}\right]\sin 2\tau^2 t\,d\tau \tag{21}$$

Сравнивая решения (5) и (19), получим интересное равенство:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2\pi^2 t/l^2}\sin\frac{n\pi y}{l}=$$

$$=\frac{\pi}{4l}(l-y)-\frac{1}{4i}\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}-\frac{\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i}\right]d\tau \tag{22}$$

Выделяя вещественную часть справа, как и выше, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n^2\pi^2 t/l^2}\sin\frac{n\pi y}{l}=\frac{\pi}{4l}(l-y)+ \tag{23}$$

$$+4\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\,\tau\sin l\,\tau\,\mathrm{ch}\,(y-l)\,\tau\,\mathrm{ch}\,l\,\tau}{e^{2\tau l}+e^{-2\tau l}-2\cos 2\tau l}+\right.$$

$$\left.+\frac{\cos(y-l)\,\tau\cos l\tau\,\mathrm{sh}\,(y-l)\,\tau\,\mathrm{sh}\,l\tau}{e^{2\tau l}+e^{-2\tau l}-2\cos 2\tau l}\right]\sin 2\tau^2 t\,d\tau$$

Легко видеть, как запишется решение уравнения (1) в случае, если условие (3) заменяется условием

$$u=Q=\mathrm{const}\qquad\text{при }y=l,\ t>0 \tag{24}$$

Например, вместо (19) получим

$$u=\frac{P}{2l}(l-y)+\frac{Q}{2l}y+$$

$$+\frac{P}{2\pi i}\int_0^\infty\frac{1}{i\tau}\left[\frac{\sin(y-l)\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}-\frac{\sin(y-l)\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i}\right]d\tau+ \tag{25}$$

$$+\frac{Q}{2\,.i}\int_0^\infty\frac{1}{\tau}\left[\frac{\sin y\sqrt{-i\tau}}{\sin l\sqrt{-i\tau}}e^{t\tau i}-\frac{\sin y\sqrt{i\tau}}{\sin l\sqrt{i\tau}}e^{-t\tau i}\right]d\tau$$

Поступила в редакцию
17 I 1950