Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950
Институт механики Академии Наук Союза ССР

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

М. З. Народецкий, Д. И. Шерман
(Москва)

Предположим, что в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ задана двусвязная область S, ограниченная извне эллипсом L_1 с полуосями a и b $(a > b)$, а изнутри — окружностью L_2 радиуса R, симметрично расположенной относительно эллипса. Обход кривых L_1 и L_2 условимся считать происходящим в положительном направлении относительно области S. Далее, обозначим через S_1 бесконечную односвязную область, внешнюю к L_1. За начало координат возьмем центр фигуры S и направим координатные оси соответственно по большой и малой полуосям эллипса.

В настоящей статье мы дадим приближенное, но вместе с тем достаточно эффективное решение задачи о конформном отображении указанной области на круговое кольцо. Обозначим через $w = \varphi(z)$ регулярную в области S функцию, совершающую искомое отображение, и введем затем функцию $\psi(z)$, также регулярную в S и связанную с $\varphi(z)$ соотношением

$$\psi(z) = \ln \frac{\varphi(z)}{z} \tag{1}$$

Тогда для определения $\psi(z)$ будем иметь следующие предельные условия:

$$\psi(t) + \overline{\psi(t)} = 2\ln\rho_1 - \ln t\bar{t} \qquad \text{на } L_1 \tag{2}$$

$$\psi(t) + \overline{\psi(t)} = 2\ln\rho_2 - 2\ln R \qquad \text{на } L_2 \tag{3}$$

где t — аффикс точки кривой L_1 или L_2, и ρ_1, ρ_2 — радиусы отображающего кольца в области w, причем $\rho_1 > \rho_2$.

Пусть $g(t)$ вещественная на L_1 и $\eta(z)$ регулярная в S_1 и обращающаяся в нуль на бесконечности вспомогательные функции, определяемые через $\psi(z)$ из условий [1]

$$\eta(t) + \overline{\eta(t)} = \psi(t) + \overline{\psi(t)} + 2g(t) \tag{4}$$

$$\eta(t) - \overline{\eta(t)} = \psi(t) - \overline{\psi(t)} + 2iC \tag{5}$$

на L_1, где C — некоторая вещественная постоянная.

Сложив почленно формулы (4) и (5), запишем полученное равенство на основании теоремы о предельных значениях интеграла типа Коши в виде

$$\eta(t_0) + \lim_{z\to t_0} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{g(t)}{t-z}\,dt = \psi(t_0) + \lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g(t)}{t-z}\,dt + iC \quad \text{на } L_1. \tag{6}$$

Здесь в левой части точка z стремится к t_0 извне L_1, а в правой части, наоборот, z стремится к t_0 изнутри L_1.

Введем в S новую функцию, регулярную в силу формулы (6) вне L_2 и равную

$$\delta(z) = \psi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{g(t)}{t-z}\,dt + iC \tag{7}$$

---

[1] Здесь используется прием, предложенный Д. И. Шерманом в статье [1].

С помощью этой функции преобразуем равенство (3) на L_2 к виду

$$\delta(t)+\overline{\delta(t)}=2\ln\rho_2-2\ln R+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t_1)}{t_1-t}\,dt_1-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t_1)}{\overline{t}_1-R^2/t}\,d\overline{t}_1 \tag{8}$$

Помножим обе части последнего равенства на ядро Коши $[2\pi i(t-z)]^{-1}$, где z — любая точка вне L_2, и проинтегрируем его по контуру L_2. После некоторых вычислений получим

$$\delta(z)=\frac{R^2}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t)}{\overline{t}\,(R^2-\overline{t}z)}\,d\overline{t} \tag{9}$$

Отсюда, используя формулу (7), найдем

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t)}{t-z}\,dt+\frac{R^2}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t)}{\overline{t}\,(R^2-\overline{t}\,z)}\,d\overline{t}+iC \tag{10}$$

При этом для того, чтобы выполнялось равенство (3), необходимо положить

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}g(t)\left(\frac{d\overline{t}}{\overline{t}}-\frac{dt}{t}\right)=2\ln\rho_2-2\ln R \tag{11}$$

Возвращаясь теперь к равенству (2) и учитывая (10), получим на L_1 для определения $g(t)$ интегральное уравнение Фредгольма

$$g(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}g(t_1)\,d\ln\frac{\overline{t}_1-\overline{t}}{t_1-t}+ \tag{12}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t_1)}{\overline{t}_1}\left(\frac{R^2}{\overline{t}_1 t}\right)^{k+1}d\overline{t}_1-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{g(t_1)}{t_1}\left(\frac{R^2}{t_1\overline{t}}\right)^{k+1}dt_1\right\}=-2\ln\rho_1+\ln t\overline{t}$$

Введем функцию

$$z=A\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{13}$$

где A — некоторая вещественная постоянная, отображающую область S_1 на внешность окружности γ некоторого радиуса ρ в плоскости ζ.

Положим, далее, $g(t)=\omega(\tau)$ и обозначим через $\tau=\rho e^{i\vartheta}$ (где ϑ — полярный угол) аффикс точки окружности γ, соответствующий по формуле (13) аффиксу t точки L_1. Введя затем параметр $\lambda=R^2/A^2$, преобразуем уравнение (12) к форме

$$\omega(\tau)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1}d\tau_1+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\omega(\tau_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\tau_1^{\,k}\tau^k}+\frac{\tau_1^{\,k}\tau^k}{\rho^{4k}}\right)\frac{d\tau_1}{\tau_1}-$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^k\left\{\frac{\tau^{-k}}{\rho^{2k}}\left(1+\frac{1}{\tau^2}\right)^{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\omega(\tau_1)\left(1+\frac{\tau_1^{\,2}}{\rho^4}\right)^{-(k+1)}\left(1-\frac{\tau_1^{\,2}}{\rho^4}\right)\tau_1^{\,k-1}d\tau_1+\right.$$

$$\left.+\frac{\tau^k}{\rho^{2k}}\left(1+\frac{\tau^2}{\rho^4}\right)^{-k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\omega(\tau_1)\left(1+\frac{1}{\tau_1^{\,2}}\right)^{-(k+1)}\left(1-\frac{1}{\tau_1^{\,2}}\right)\tau_1^{\,-(k+1)}d\tau_1\right\}=$$

$$=2\ln\frac{A\rho}{\rho_1}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{\tau^{2k}}+\frac{\tau^{2k}}{\rho^{4k}}\right)\quad\text{на } \gamma \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (12) разрешимо при $\lambda=0$. Действительно, в этом случае оно дает решение некоторой задачи Дирихле для внутренности эллипса, построенное с помощью потенциала двойного слоя. Отсюда следует, что уравнение (12) разрешимо также для достаточно малых по модулю значений λ, причем для них искомая функция $\omega(\tau)$ представима в форме ряда

$$\omega(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \omega_k(\tau) \tag{15}$$

где так называемые приближения $\omega_k(\tau)$ подлежат определению.

Подставив в равенство (14) вместо $\omega(\tau)$ ее выражение из равенства (15) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим цепь рекуррентных уравнений для последовательного определения всех $\omega_k(\tau)$. Вычислив несколько первых приближений $\omega_k(\tau)$, можно заметить, что за исключением

$$\omega_0(\tau) = \ln\frac{A\rho}{\rho_1} + \sum_{k=k}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\left(\frac{1}{\tau^{2k}} + \frac{\tau^{2k}}{\rho^{4k}}\right)$$

каждое из них, равно как и все остальные, имеет вид:

$$\omega_k(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)}\left(\tau^{2n} + \frac{\rho^{4n}}{\tau^{2n}}\right) \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty) \tag{16}$$

где $a_n^{(k)}$ — некоторые постоянные. Таким образом (для достаточно малых λ)

$$\omega(\tau) = \ln\frac{A\rho}{\rho_1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\tau^{2n} + \frac{\rho^{4n}}{\tau^{2n}}\right), \qquad a_n = \sum_{j=0}^{\infty} a_n^{(j)}\lambda^j \tag{17}$$

С другой стороны, зная теперь форму представления (17) для неизвестной функции $\omega(\tau)$, можно непосредственно искать ее в этом виде. Нетрудно, имея в виду (17), проверить справедливость равенств

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\omega(\tau_1)}{\tau_1}\,d\tau_1 = \ln\frac{A\rho}{\rho_1}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \omega(\tau_1) \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{{\tau_1}^k\tau^k} + \frac{{\tau_1}^k\tau^k}{\rho^{4k}}\right)\frac{d\tau_1}{\tau_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\rho^{4n}}\left(\tau^{2n} + \frac{\rho^{4n}}{\tau^{2n}}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \omega(\tau_1)\left(1 + \frac{{\tau_1}^2}{\rho^4}\right)^{-(k+1)}\left(1 - \frac{{\tau_1}^2}{\rho^4}\right)\tau_1^{k-1}\,d\tau_1 =$$

$$= 2\rho^{4m} \sum_{n_1=m}^{\infty} a_{n_1}(-1)^{n_1-m}\, n_1 \frac{(n_1+m-1)\,!}{(2m)\,!\,(n_1-m)\,!}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \omega(\tau_1)\left(1 + \frac{1}{{\tau_1}^2}\right)^{-(k+1)}\left(1 - \frac{1}{{\tau_1}^2}\right){\tau_1}^{-(k+1)}\,d\tau_1 =$$

$$= 2 \sum_{n_1=m}^{\infty} a_{n_1}(-1)^{n_1-m} n_1 \frac{(n_1+m-1)\,!}{(2m)\,!\,(n_1-m)\,!}$$

Учитывая эти отношения наряду с очевидными равенствами

$$\frac{\tau^{-2m}}{\rho^{4m}}\left(1 + \frac{1}{\tau^2}\right)^{-2m} = \frac{1}{\rho 4m} \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \frac{(n+m-1)\,!}{(2m-1)!\,(n+m)!}\,\tau^{-2n}$$

$$\frac{\tau^{2m}}{\rho^{4m}}\left(1 + \frac{\tau^2}{\rho^4}\right)^{-2m} = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^{n-m} \frac{(n+m-1)\,!}{(2m-1)!\,(n-m)!}\,\frac{\tau^{2n}}{\tau^{4n}}$$

преобразуем уравнение (14) после подстановки в него $\omega(\tau)$ из (17) к следующей форме

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(1+\frac{1}{\rho^{4n}}\right)\left(\tau^{2n}+\frac{\rho^{4n}}{\tau^{2n}}\right)=$$

$$=2\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{2m}\sum_{n=m}^{\infty}(-1)^{n-m}\frac{(n+m-1)!}{(2m-1)!\,(n-m)!}\frac{1}{\rho^{4n}}\left(\tau^{2n}+\frac{\rho^{4n}}{\tau^{2n}}\right)\times$$

$$\times\sum_{n_1=m}^{\infty}a_{n_1}(-1)^{n_1-m}n_1\frac{(n_1+m-1)!}{(2m)!\,(n_1-m)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\frac{1}{\rho^{4n}}\left(\tau^{2n}+\frac{\rho^{4n}}{\tau^{2n}}\right)$$

Приравнивая в последнем равенстве выражения при одинаковых степенях τ^2 и ρ^4/τ^2, получим для определения крэффициентов a_n бесконечную систему

$$a_n=\frac{2}{\rho^{4n}+1}\left(\sum_{m=1}^{n}\lambda^{2m}(-1)^{n-m}\frac{(n+m-1)!}{(2m-1)!\,(n-m)!}\times\right. \tag{18}$$

$$\left.\times\sum_{n_1=m}^{\infty}a_{n_1}(-1)^{n_1-m}n_1\frac{(n_1+m-1)!}{(2m)!\,(n_1-m)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}\right)$$

Отсюда, имея в виду вторую из формул (17), найдем

$$a_n^{(0)}=\frac{2}{\rho^{4n}+1}\,\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$a_n^{(j)}=\frac{2}{\rho^{4n}+1}\sum_{m=1}^{j/2}(-1)^{n-m}\frac{(n+m-1)!}{(2m-1)!\,(n-m)!}\times \tag{19}$$

$$\times\sum_{n_1=m}^{\infty}a_{n_1}^{(j-2m)}(-1)^{n_1-m}n_1\frac{(n_1+m-1)!}{(2m)!\,(n_1-m)!} \qquad (j=2,\ 4,\ \ldots)$$

Из этих формул очевидно, что все коэффициенты $a_n^{(j)}$ могут быть последовательно определены, причем все $a_n{}^{(j)}$ с нечетным j обращаются в нуль.

Выразив в равенствах (10) и (11) переменную t через τ и заменив $g(t)$ на $\omega(\tau)$, после элементарных вычислений получим

$$\psi(z)=-\ln\frac{A\rho}{\rho_1}+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left\{\left[\left(\frac{R^2+\sqrt{R^4-4A^2z^2}}{2Az}\right)^{2n}+\right.\right. \tag{20}$$

$$\left.\left.+\left(\frac{R^2-\sqrt{R^4-4A^2z^2}}{2Az}\right)^{2n}\right]-\left[\left(\frac{z+\sqrt{z^2-4A^2}}{2A}\right)^{2n}+\left(\frac{z-\sqrt{z^2-4A^2}}{2A}\right)^{2n}\right]\right\}-iC$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\frac{R}{A\rho}\exp\left\{2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\right\} \tag{21}$$

Вещественная постоянная C остается произвольной (в частности, она может быть взята равной нулю), так как функция, совершающая конформное отображение, определяется с точностью до чистого вращения.

Формула (21) позволяет определить толщину отображающего кольца, если известен радиус ρ_1. Последний мы фиксируем произвольно.

Удержав в (20) лишь первые s членов и отбросив все остальные, получим для $\psi(z)$ приближенное выражение

$$\psi(z) = \ln \frac{\rho_1}{A\rho} + 2\sum_{n=1}^{s}(-1)^{n-1} a_n - \sum_{n=1}^{s} \frac{b_n}{A^{2n}}\left(z^{2n} - \frac{R^{4n}}{z^{2n}}\right) \tag{22}$$

причем коэффициенты b_n связаны с a_n соотношениями

$$b_n = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=n}^{s} \sum_{m=0}^{n} (-1)^{k-n} a_k \frac{(2k)!}{(2k-2m)!\,(2m)!} \frac{(k-m)!}{(k-n)!\,(n-m)!} \tag{23}$$

Соответственно этому будем теперь иметь вместо (21) следующую формулу:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{R}{A\rho} \exp\left\{2 \sum_{n=1}^{s}(-1)^{n-1} a_n\right\} \tag{24}$$

Не представляет труда с помощью непосредственных вычислений убедиться, что к практически удовлетворительным результатам можно часто притти, отыскивая $\omega(\tau)$ в виде (17) также для значений параметра, вообще говоря, не лежащих в окрестности $\lambda = 0$. При этом в особых случаях, для того чтобы обеспечить достаточную точность решения, оказывается необходимым наряду с несколькими первыми слагаемыми в (17) учесть еще главные члены в некоторых из остальных слагаемых.

Нетрудно усмотреть, учитывая вид формулы (22) и принимая во внимание (21), что функция $\psi(z)$ точно удовлетворяет граничному условию (3) на L_2. Введем на контуре L_1 величину

$$\Delta = \left(\frac{\varphi(t)\,\overline{\varphi(t)}}{\rho_1^2} - 1\right) 100\% \tag{25}$$

определяющую отклонение от условия (2). Она характеризует точность решения (22).

Проделанные подробные вычисления показали, что отклонение Δ с увеличением s быстро стремится к нулю для всех значений $k = a/b$ и ϑ, когда $c = R/b$ мало. Однако и для близких к единице значений c практически оказывается возможным всегда установить такое число s, как правило, небольшое и не осложняющее пользование формулой (22), при котором Δ будет малой величиной. Для значений k и c, близких к единице [1], коэффициенты a_n (при надлежащим образом выбранном s) должны быть вычислены с возможно большей точностью. Практически это всегда достигается путем вычисления ряда первых приближений $a_n^{(j)}$ и выделения нескольких главных членов из возможно большего числа остальных приближений, содержащихся в a_n. Для сравнительно же больших k (например, $k \gg 3$) можно при вычислении a_n ограничиться лишь несколькими первыми приближениями $a_n^{(j)}$.

Отображающая функция была определена для двух характерных случаев, именно

$$k = 1.25, \quad c = \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 0.93; \qquad k = 3, \quad c = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.71$$

В первом из них, взяв $s = 5$, мы в формуле (17) в каждом из a_n $(n = 1, \ldots, 5)$ сохранили пять первых слагаемых и выделили два главных члена из всех остальных слагаемых. Во втором же случае достаточно точное выражение для отображающей функции удалось получить, удержав при $s = 7$ лишь три первых слагаемых в выражении каждого из a_n $(n=1, 2, \ldots, 7)$.

---

[1] Если c близко к единице, то область S даже при слабо вытянутом эллипсе ($k = 1.25$) резко отличается от кругового кольца.

Примечание. Вычисляя по формуле (19) последовательно постоянные $a_n^{(j)}$, будем иметь для них при $j \geqslant 2$

$$a_n^{(j)} = \frac{(-1)^{n-1}}{\rho^{4n}+1}\left\{\left(D_1 D_3^{\frac{j-2}{2}} + \frac{2}{3!\,4!}E_{11}E_{31}D_3^{\frac{j-6}{2}} + \frac{2}{3!\,4!}D_1 E_{31}{}^2 D_3^{\frac{j-8}{2}}\right)n + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{3!\,4!}D_1 E_{31} D_3^{\frac{j-6}{2}}\, n\,(n^2-1) + \ldots\right\}$$

где

$$D_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\rho^{4n}+1}, \quad D_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{\rho^{4n}+1}, \quad E_{11} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\,(n^2-1)}{\rho^{4n}+1}, \quad E_{31} = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{n^3\,(n^2-1)}{\rho^{4n}+1}$$

Отсюда ясно, что учет выписанных главных членов во всех приближениях $a_n^{(j)}$ не представляет затруднений.

Ниже в таблице приведены значения коэффициентов a_n и b_n, а также отклонения Δ (в процентах) в девяти точках эллипса в первом квадранте для двух указанных случаев.

	n	a_n	b_n	ϑ	Δ
Для	1	24241×10^{-6}	26216×10^{-6}	0° 11°15	−0.44 −0.52
	2	-4672×10^{-7}	-5414×10^{-7}	22°30 33°45	−0.01 −0.18
$k = 1.25$	3	1136×10^{-8}	1391×10^{-8}	45° 56°15	−0.05 0.14
$c = 0.93$	4	-2876×10^{-10}	-2947×10^{-10}	67°30 78°45	−0.07 0.22
	5	7158×10^{-12}	7158×10^{-12}	90°	−0.10
Для	1	0.205362	0.428409	0°	−0.10
$k = 3$	2	−0.032596	−0.129174	11°15	−0.18
$c = 0.71$	3	0.006397	0.045369	22°30	0.11
	4	−0.001410	−0.013949	33°45 45°	0.27 0.30
	5	0.000336	0.003042	56°15	0.48
	6	−0.000084	−0.000392	67°30	0.35
	7	0.000022	0.000022	78°45 90°	−0.57 −1.21

В заключение отметим, что аналогичным образом могут быть рассмотрены некоторые другие задачи теории конформного отображения, например, для области, ограниченной извне квадратом (с закругленным вершинами), а изнутри окружностью, или ограниченной извне окружностью, а изнутри эллипсом, и ряда других областей.

Поступила в редакцию
31 XII 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. Об одной задаче кручения. ДАН. 1948. Т. 68. № 5.