Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

Институт механики Академии Наук Союза ССР

ОДНА ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК В ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

В заметке указывается функционал, в котором функциональными аргументами являются неизвестные в основных уравнениях нелинейной теории упругих оболочек и пластинок, а именно, нормальная компонента вектора перемещения срединной поверхности оболочки v и функция напряжения φ. Функционал этот имеет стационарное значение, если v и φ удовлетворяют основным дифференциальным уравнениям и краевым условиям краевой задачи о равновесии тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии.

При этом краевые условия относительно тангенциальных компонент вектора перемещения играют в функционале роль естественных краевых условий краевой задачи, а не роль существенных краевых условий, как в вариационной формуле Лагранжа. При приближенном определении состояний равновесия в послекритической стадии это обстоятельство часто может оправдать применение указанного в заметке вариационного метода вместо метода Галеркина, рекомендуемого В. З. Власовым в монографии[1].

В качестве примера к нижеизложенной вариационной формуле рассматривается поведение кругоцилиндрической панели под действием касательных напряжений в начальной части послекритической стадии.

1. Основные соотношения. Пусть будет $T^{ij}_{(c)}$ — критическое значение тензора тангенциальных сил безмоментного начального напряженного состояния, $T^{ij}_{(c)} + t^{ij}$ — тензор тангенциальных сил начального напряженного состояния, при котором существует еще по крайней мере одно состояние равновесия, характеризуемое тангенциальными усилиями $T^{ij}_{(c)} + t^{ij} + S^{ij}$ и моментами M^{ij}. Деформацию срединной поверхности при переходе от состояния $T^{ij}_{(c)} + t^{ij}$ в состояние $T^{ij}_{(c)} + t^{ij} + S^{ij}$, M^{ij} опишем вектором перемещения v_i, v и тензорами деформации ε_{ij}, μ_{ij}.

Предположим, что поле перемещений v_i, v принадлежит к типу «местной потери устойчивости»; кроме того, примем, что всюду на контуре срединной поверхности $v = 0$. Далее, предположим, что начальное напряженное состояние создается путем заданных на контуре смещений и поверхностной нагрузки, которая будет гидростатического вида. При этих предположениях применимы для исследования послекритической стадии следующие упрощенные соотношения:

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i - 2b_{ij} v + \nabla_i v \nabla_j v, \qquad \mu_{ij} = -\nabla_{ij} v \tag{1.1}$$

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.2}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + (T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \nabla_{\alpha\beta} v + \nabla_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.3}$$

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} (2b_{\alpha\beta} \nabla_{\gamma\rho} v + \nabla_{\alpha\beta} v \nabla_{\gamma\rho} v + 2\nabla_{\gamma\rho} \varepsilon_{\alpha\beta}) = 0 \tag{1.4}$$

причем

$$S^{ij} = BE^{ij\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad M^{ij} = DE^{ij\alpha\beta} \mu_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

$$B = \frac{Et}{1 - \nu^2}, \qquad D = B\frac{t^2}{12}, \qquad E^{ijmn} = a^{im} a^{jn} + \nu c^{im} c^{jn} \tag{1.6}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — толщина оболочки. Через a_{ij}, b_{ij} обозначены коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности, через c_{ij} — компоненты дискриминантного тензора первой квадратичной формы.

Уравнения (1.2) тождественно удовлетворяются, если

$$S^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} \nabla_{\alpha\beta} \varphi \tag{1.7}$$

где φ — функция напряжения. Теперь уравнения (1.3), (1.4) получают вид:

$$B' \nabla_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot} \varphi + c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} \left(b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha\beta} v\right) \nabla_{\gamma\rho} v = 0 \tag{1.8}$$

$$- c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} (b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} v) \nabla_{\gamma\rho} \varphi - (T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta}) \nabla_{\alpha\beta} v + D \nabla_{\beta\alpha}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot} v = 0 \tag{1.9}$$

где $B' = 1 / Et$.

Для представления краевых условий, принадлежащих к дифференциальным уравнениям (1.8), (1.9), мы прибегаем к принципу возможных перемещений.

2. Вариационная формула Лагранжа. Состояние равновесия $T^{ij}_{(c)} + t^{ij} + S^{ij}$, M^{ij} отличается от всех ему близких геометрически возможных состояний тем, что функционал

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_G \{(T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha v \nabla_\beta v + S^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \mu_{\beta\alpha}\} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \tag{2.1}$$

имеет стационарное значение

$$\delta\Pi = \iint_G \{(T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha v \nabla_\beta \delta v + S^{\alpha\beta} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \delta\mu_{\beta\alpha}\} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 = 0 \tag{2.2}$$

Здесь G — область интегрирования — распространяется на всю среднюю поверхность оболочки.

Учитывая, что $\delta v = 0$ всюду на контуре срединной поверхности и условия (1.2), (1.3) в состоянии равновесия соблюдены, приходим к выводу, что в состоянии равновесия

$$\oint_g (S^{\alpha\beta} \delta v_\alpha - M^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \delta v) c_{\beta\sigma} dx^\sigma = 0 \tag{2.3}$$

где g — контур, ограничивающий срединную поверхность. Отсюда в каждом частном случае нетрудно получить краевые условия в развернутом виде. Отметим, что согласно предположениям раздела 1 краевые условия будут однородными.

Выражая S^{ij}, ε_{ij} в (2.1) через функцию напряжения φ, а M^{ij} через v, найдем

$$\Pi = \frac{1}{2} \iint_G \{(T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha v \nabla_\beta v + B' P^{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta} \varphi \nabla_{\gamma\rho} \varphi + \\ + D E^{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta} v \nabla_{\gamma\rho} v\} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \tag{2.4}$$

где

$$P^{ijmn} = a^{im} a^{jn} - \nu c^{im} c^{jn} \tag{2.5}$$

причем в сравнение в функционале Π допускаются такие функции φ, которые удовлетворяют уравнению (1.8) и геометрическим краевым условиям относительно тангенциальных перемещений v_i.

Здесь необходимо отметить, что выполнение последнего условия в некоторых случаях затруднительно потому, что не v_i, а ковариантные производные v_i выражаются через функцию напряжения φ. Наоборот, выполнение естественных краевых условий относительно S^{ij} сравнительно проще.

В следующем разделе будет указан функционал, в условиях стационарности которого роли существенных и естественных краевых условий относительно S^{ij}, v_i меняются по сравнению с вариационной формулой Лагранжа.

3. Вариационная формула, соответствующая основным нелинейным уравнениям. Образуем функционал

$$P = \frac{1}{2} \iint_G \{(T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha v \nabla_\beta v + DE^{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta} v \nabla_{\gamma\rho} v - \tag{3.1}$$

$$- B' P^{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta} \varphi \nabla_{\gamma\rho} \varphi - c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} (2b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} v) v \nabla_{\gamma\rho} \varphi\} \sqrt{a}\, dx^1\, dx^2$$

и допускаем в функционале (3.1) в сравнение функции v, удовлетворяющие геометрическим краевым условиям относительно v, и функции φ, удовлетворяющие статическим краевым условиям относительно тангенциальных усилий S^{ij}. Тогда среди всех значений функционала (3.1), которые он может принимать при допустимых функциях v, φ, стационарное значение отличается тем, что соответствующие ему функции v, φ представляют решение краевой задачи о равновесии тонкостенной упругой оболочки в послекритической стадии.

В самом деле, после несложных выкладок можем представить первую вариацию функционала (3.1) в виде

$$\delta P = \oint_g (- v_\alpha c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} \nabla_{\gamma\rho}\, \delta\varphi - M^{\alpha\beta} \nabla_\alpha\, \delta v)\, c_{\beta\sigma}\, dx^\sigma + \iint_G \{- (T^{\alpha\beta}_{(c)} + t^{\alpha\beta}) \nabla_{\alpha\beta} v +$$

$$+ D \nabla_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}\, v - c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho}\, (b_{\alpha\beta} + \nabla_{\alpha\beta} v)\, \nabla_{\gamma\rho} \varphi\}\, \delta v \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 - \tag{3.2}$$

$$- \iint_G \{B' \nabla_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot\alpha\beta}_{\cdot\cdot}\, \varphi + c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho}\, (b_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \nabla_{\alpha\beta} v)\, \nabla_{\gamma\rho} v\}\, \delta\varphi \sqrt{a}\, dx'\, dx^2$$

На основании фундаментальной леммы вариационного исчисления первая вариация функционала (3.1) обращается в нуль, если функции φ и v удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (1.8), (1.9) и контурный интеграл

$$\oint_g (-v_\alpha c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} \nabla_{\gamma\rho}\, \delta\varphi - M^{\alpha\beta} \nabla_\alpha\, \delta v)\, c_{\beta\sigma}\, dx^\sigma \tag{3.3}$$

исчезает. Но ввиду однородности краевых условий контурный интеграл (3.3) по существу повторяет краевые условия (2.3), полученные из принципа возможных перемещений, только роли естественных и существенных краевых условий относительно S^{ij}, v_i меняются местами.

Следовательно, в случае состояния равновесия контурный интеграл (3.3) также обращается в нуль.

Таким образом, условие стационарности функционала (3.1) относительно вариации допустимых функций φ, v является условием состояния равновесия тонкостенной упругой оболочки в послекритической стадии.

Впрочем, из изложенного здесь также следует, что применение метода Галеркина для интегрирования уравнений (1.8), (1.9) можно обосновывать с помощью функционала P по (3.1).

Следуя рассуждениям Я. И. Перельмана[2], убеждаемся, что алгорифм Галеркина вытекает прямо из (3.2), т. е. из условия стационарности функционала P:

$$\delta P = 0 \tag{3.4}$$

Следует еще коснуться физической стороны вариационной формулы (3.4). Как известно, по принципу возможных перемещений в функционале (2.1) допускаются в сравнение геометрически возможные состояния, а по обобщенному вариационному принципу Кастильяно[3] в соответствующем функционале — статически возможные состояния. В то же время сравниваемые в функционале (3.1) состояния, повидимому, таких физически очевидных признаков не имеют.

4. Определение критической нагрузки. Пусть тензор t^{ij} имеет бесконечно малое значение. По определению критической нагрузки тогда и функции v и φ имеют бесконечно малые значения. Отбрасывая в функционале (3.1) члены высшего порядка малости, приходим к условию стационарности функционала

$$P_{(c)} = \frac{1}{2}\iint\limits_G \{T^{\alpha\beta}_{(c)} \nabla_\alpha v \nabla_\beta v + DE^{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta} v \nabla_{\gamma\rho} v - B' P^{\alpha\beta\gamma\rho} \nabla_{\alpha\beta} \varphi \nabla_{\gamma\rho} \varphi -$$
$$- 2c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} b_{\alpha\beta} v \nabla_{\gamma\rho} \varphi\} \sqrt{a}\, dx^1\, dx^2 \tag{4.1}$$

определяющему критическое значение тензора тангенциальных сил начального напряженного состояния $T^{\alpha\beta}_{(c)}$, если в функционале (4.1) допустить в сравнение функции v, удовлетворяющие геометрическим краевым условиям относительно v, и функции φ, удовлетворяющие статическим краевым условиям относительно S^{ij}.

Пусть начальное напряженное состояние определяется параметром T. Определяемое из условия (4.1) методом Ритца приближенное критическое значение $T^*_{(c)}$ может быть по своему абсолютному значению больше или меньше, чем точное значение $T_{(c)}$. Такая неопределенность оценки критической нагрузки объясняется тем, что, как следует из физических соображений, при фиксированном v вместе с расширением класса сравниваемых функций для φ значение $|T^*_{(c)}|$ увеличивается, а при фиксированном φ значение $|T^*_{(c)}|$ уменьшается с расширением класса сравниваемых функций для v.

5. Примеры. *Выпучивание квадратной плоской пластинки под действием касательных напряжений.* Предположим, что пластинка свободно оперта на ребра, которые имеют большую продольную жесткость, но малую жесткость на изгиб в плоскости пластинки. Тогда состояние равновесия с выпученной стенкой v, φ, определяемое из условия стационарности функционала (3.1), должно удовлетворять следующим существенным относительно функционала (3.1) краевым условиям:

$$\begin{aligned} v &= 0, \quad \varphi_{,yy} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a \\ v &= 0, \quad \varphi_{,xx} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = a \end{aligned} \tag{5.1}$$

Ищем решение в виде

$$v = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta} \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \sin\frac{\beta\pi y}{a}, \qquad \varphi = \sum_{\alpha,\beta} F_{\alpha\beta} \sin\frac{\alpha\pi x}{a} \sin\frac{\beta\pi y}{a} - \tau xy \tag{5.2}$$

В послекритической стадии нас интересует прежде всего зависимость τ от величины заданных на краях пластинки смещений или, что равносильно этому, от величины также возможного (хотя бы и неустойчивого) начального напряженного состояния $S = S_{(c)} + s$, где $S_{(c)}$ — критическое значение начального напряженного состояния $T^{12} = S$, $T^{11} = 0$, $T^{22} = 0$.

Определяем относительную жесткость пластинки $j = (s - \tau)/s$ в послекритической стадии при малых перемещениях. Воспользуемся разложениями

$$v = sv^{(1)} + s^3 v^{(3)} + \cdots \qquad \varphi = s^2 \varphi^{(2)} + s^4 \varphi^{(4)} + \cdots \tag{5.3}$$

Отметим, что $v^{(1)}$ определяется с точностью до амплитуды при разыскании критической нагрузки $S_{(c)}$, а $\varphi^{(2)}$ выражается через $v^{(1)}$ по условиям стационарности функционала (3.1) относительно F_{ij}, τ. Зависимость пока неопределенной амплитуды коэффициентов A_{ij} в $v^{(1)}$ получим из соотношения

$$\int_0^a\int_0^a \{2v^{(1)}_{,xy} + v^{(1)}_{,xy}\varphi^{(2)}_{,yy} + v^{(1)}_{,yy}\varphi^{(2)}_{,xx} - 2v^{(1)}_{,xy}\varphi^{(2)}_{,xy}\} v^{(1)}\, dx\, dy = 0 \tag{5.4}$$

Удерживая в вычислениях только члены A_{11}, A_{22}, A_{31}, A_{13}, A_{33}, F_{11}, F_{22}, F_{13}, F_{31}, F_{33}, τ, найдем, что $j = 0.844$. Таким образом, жесткость пластинки после выпучивания стенки уменьшается весьма мало.

Выпучивание квадратной весьма пологой цилиндрической панели под действием касательных напряжений.

Предположим, что из квадратной пластинки образована цилиндрическая панель с радиусом R, которая имеет те же условия закрепления, что и плоская пластинка в предыдущем примере. Тогда можно искать решение попрежнему в виде (5.2).

Так как поле перемещений существенным образом зависит от параметра $a/\pi\sqrt{\lambda R}$, где $\lambda^2 = t^2/12(1-\nu^2)$, то при изложенном методе решения задачи необходимо ограничиться только некоторыми дискретными значениями $a/\pi\sqrt{\lambda R} = \varkappa$. Пусть размеры панели удовлетворяют отношению $\varkappa = 1$. При обычных значениях λ такую оболочку можно назвать весьма пологой. Вместе с тем этот пример показывает различие в работе в послекритической стадии плоской пластинки и слегка искривленной панели при том же основном напряженном состоянии $T^{11}=0$, $T^{22}=0$, $T^{12}=S$. Удерживая в вычислениях опять члены A_{11}, A_{22}, A_{31}, A_{33}, A_{13}, F_{11}, F_{22}, F_{13}, F_{31}, F_{33}, найдем, что

$$S_{(c)} = \pm 9.65\, Et\,\frac{\lambda}{R} \tag{5.5}$$

Если бы эта панель была плоская, то числовой коэффициент в этой формуле оказался бы равным ± 9.42. Таким образом, легкое искривление пластинки увеличивало критическую нагрузку примерно на 2%.

Однако практически указанное увеличение не может быть использовано, так как механическая диаграмма послекритической стадии касается в критической точке диаграммы докритической стадии, т. е. диаграммы начального состояния равновесия, подобно диаграмме центрально сжатой кругоцилиндрической трубы[4]. Поэтому состояния равновесия с выпученной стенкой существуют уже в докритической стадии, и это обусловливает внезапную потерю устойчивости начального состояния равновесия перед достижением критической нагрузки.

В самом деле, полученные при разыскании критической нагрузки $S_{(c)}$ функции $v = v^{(1)}$, $\varphi = \varphi^{(1)}$ удовлетворяют условию

$$\int_0^a\!\!\int_0^a \left(v^{(1)}_{,xx}\varphi^{(1)}_{,yy} + v^{(1)}_{,yy}\varphi^{(1)}_{,xx} - 2v^{(1)}_{,xy}\varphi^{(1)}_{,xy}\right) v^{(1)}\,dx\,dy \neq 0 \tag{5.6}$$

и поэтому v, φ надо разложить по степеням s так:

$$v = sv^{(1)} + s^2 v^{(2)} + \cdots, \qquad \varphi = s\varphi^{(1)} + s^2\varphi^{(2)} + \cdots \tag{5.7}$$

Неопределенная амплитуда функций $v^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ определяется из соотношения

$$\int_0^a\!\!\int_0^a \left(\frac{4}{3}\, v^{(1)}_{,xy} + v^{(1)}_{,xx}\varphi^{(1)}_{,yy} + v^{(1)}_{,yy}\varphi^{(1)}_{,xx} - 2v^{(1)}_{,xy}\varphi^{(1)}_{,xy}\right) v^{(1)}\,dx\,dy = 0 \tag{5.8}$$

Так как s может принимать и положительные и отрицательные значения, то в одном из них мы обязательно получим состояния равновесия с выпученной стенкой при докритическом значении параметра нагрузки, близкие к начальному состоянию равновесия.

Состояние равновесия $v^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ определяет еще относительную кривизну r механической диаграммы послекритической стадии в критической точке. Пусть

$$\tau = s^2\tau^{(2)} + s^3\tau^{(3)} + \cdots$$

Тогда r определяем произведением

$$r = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\tau^{(2)} S_{(c)}.$$

В нашем примере $r = 1.362$.

Выясним, как изменяется поведение панели в начальной части послекритической стадии, если кривизна панели увеличивается.

Выпучивание квадратной пологой цилиндрической панели под действием касательных напряжений. Предположим, что условия закрепления пластинки будут такими же, как в предыдущих примерах, так что решения можно искать в виде (5.2), а параметр $\varkappa = a / \pi \sqrt{\lambda R} = 5$.

Если в предыдущих примерах поле перемещений при потере устойчивости не носило характера, свойственного «местной» потере устойчивости пологих оболочек, то в данном примере, как показывают вычисления, этот вид деформации уже появляется. Действительно, в случае плоской пластинки, а также в случае весьма пологой панели в выражении $v^{(1)}$ наибольшими будут коэффициенты A_{11}, но при $\varkappa = 5$ — уже A_{12} (при предположении, что линии $x = \text{const}$ окружности), самая форма потери устойчивости будет кососимметричная: $v(x, y) = -v(a-x, a-y)$.

Удерживая при вычислении $S_{(c)}$ в (5.2) члены с коэффициентами A_{12}, A_{23}, A_{31}, A_{11}, A_{32}, F_{12}, F_{23}, F_{34}, F_{14}, F_{32}, находим

$$S_{(c)} = \pm 0.106\, Et \frac{\lambda}{R} \tag{5.9}$$

Так как при кососимметричной деформации интеграл в левой части (5.6) равняется нулю, то применяем следующие разложения:

$$A_{ij} = \varepsilon A_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 A_{ij}^{(2)} + \cdots, \qquad F_{ij} = \varepsilon F_{ij}^{(1)} + \varepsilon^2 F_{ij}^{(2)} + \cdots$$

$$\tau = \varepsilon^2 \tau^{(2)} + \varepsilon^4 \tau^{(4)} + \cdots \tag{5.10}$$

где

$$\pm \varepsilon^2 = s \tag{5.11}$$

Знак в последнем равенстве определяется из условия

$$\int_0^a \int_0^a \{\pm 2v_{,xy}^{(1)} + v_{,xx}^{(1)} \varphi_{,yy}^{(2)} + v_{,yy}^{(1)} \varphi_{,xx}^{(2)} - 2v_{,xy}^{(1)} \varphi_{,xy}^{(2)} + \tag{5.12}$$

$$+ 2 (v_{,xy}^{(2)} \varphi_{,yy}^{(1)} + v_{,yy}^{(2)} \varphi_{,xx}^{(1)} - 2v_{,xy}^{(2)} \varphi_{,xy}^{(1)})\} v^{(1)}\, dx\, dy = 0$$

Отметим, что коэффициенты $A_{ij}^{(1)}$, $F_{ij}^{(1)}$ в $v^{(1)}$, $\varphi^{(1)}$ определяются, как известно, до некоторого множителя при разыскании критической нагрузки $S_{(c)}$. Этот неизвестный множитель будет также определен из (5.12).

Функции $v^{(2)}$, $\varphi^{(2)}$ — симметричные, т. е. в коэффициентах $A_{ij}^{(2)}$, $F_{ij}^{(2)}$ сумма $i + j$ есть четное число. Для определения интересующих нас величин были найдены коэффициенты $A_{ij}^{(2)}$, $F_{ij}^{(2)}$ в области $1 \leqslant i \leqslant 4$, $1 \leqslant j \leqslant 6$.

Вычисление показало, что при положительном $S_{(c)}$ (это ограничение, очевидно, не существенное) возможно выпучивание оболочки только при отрицательных значениях s; при этом в начальной части послекритической стадии $\tau = 0.460\, s$.

Таким образом, и в случае этого примера существуют уже при докритических значениях параметры нагрузка состояния равновесия с выпученной стенкой.

Поступила в редакцию
16 II 1950

Институт механики АН СССР
Институт строительства и архитектуры
АН Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Общая теория оболочек. Гостехиздат. М. — Л. 1949.
2. Перельман Я. И. Метод Б. Г. Галеркина в вариационном исчислении и в теории упругости. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 3.
3. Алумяэ Н. А. Применение обобщенного вариационного принципа Кастильяно к исследованию послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек. ПММ. 1950. Т. XIV. Вып. 1.
4. Tsien H., Kármán Th. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journ. Aeronaut. Sci. 1941. Vol. 8. No. 8.