Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950
Институт механики Академии Наук Союза ССР

ПРИБЛИЖЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ КОЛЕБЛЮЩИХСЯ ФУНКЦИЙ

Н. П. Еругин, С. Л. Соболев

(Ленинград, Москва)

§ 1. Первоначально выведем некоторые вспомогательные формулы. Пусть $\varphi(x)$ функция периодическая с периодом k и

$$\int_0^k \varphi(x)\,dx = 0 \tag{1.1}$$

Введем еще функции

$$\Phi_m(x) = \int_0^x \Phi_{m-1}(t)\,dt + \frac{1}{k}\int_0^k t\Phi_{m-1}(t)\,dt \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

где $\Phi_0(x) = \varphi(x)$. Функции $\Phi_m(x)$ будут также периодические с периодом k и удовлетворяют равенству

$$\int_0^k \Phi_m(x)\,dx = 0 \tag{1.3}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить это для $m = 1$:

$$\Phi_1(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt + \frac{1}{k}\int_0^k t\varphi(t)\,dt$$

Периодичность $\Phi_1(x)$ очевидна в силу (1.1). Проверим равенство (1.3):

$$\int_0^k \Phi_1(x)\,dx = \int_0^k\int_0^t \varphi(x)\,dx\,dt + \int_0^k t\varphi(t)\,dt = \int_0^k \varphi(t)(k-t)\,dt + \int_0^k t\varphi(t)\,dt =$$

$$= k\int_0^k \varphi(t)\,dt = 0$$

Покажем, что

$$|\Phi_m(x)| \leqslant M\left(\frac{k}{4}\right)^m \tag{1.4}$$

где $|\varphi(x)| \leqslant M$. Пусть $|\Phi_{m-1}(x)| \leqslant M_{m-1}$. Из (1.2) в силу (1.3) получим

$$\Phi_m(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \frac{t-x}{k}\right)\Phi_{m-1}(t)\,dt + \int_x^k \left(-\frac{1}{2} + \frac{t-x}{k}\right)\Phi_{m-1}(t)\,dt$$

Отсюда

$$|\Phi_m(x)| \leqslant M_{m-1}\left[\int_0^x \left|\frac{1}{2} + \frac{t-x}{k}\right| dt + \int_x^k \left|-\frac{1}{2} + \frac{t-x}{k}\right| dt\right] =$$

$$= M_{m-1}\left[k \int\limits_{1/2-x/k}^{1/2} |z|\,dz + k \int\limits_{1/2}^{1/2-x/k} |z|\,dz_1\right] = M_{m-1} k \int\limits_{1/2}^{1/2} |z|\,dz = M_{m-1}\frac{k}{4}$$

или

$$|\Phi_m(x)| \leqslant M_{m-1}\frac{k}{4} \tag{1.5}$$

что и доказывает формулу (1.4).

Пусть производная порядка m функции $f(x)$ в промежутке $(0, nk)$, где n — целое, обладает свойством

$$|f^{(m)}(x) - f^{(m)}(x+h)| \leqslant K_m |h| \tag{1.6}$$

где K_m — постоянная. Оценим максимум модуля интеграла

$$J_m = \int\limits_0^{nk} f^{(m)}(t)\,\Phi_m(t)\,dt = \sum_{l=0}^{n-1} \int\limits_{lk}^{(l+1)k} f^{(m)}(t)\,\Phi_m(t)\,dt = \sum_{l=0}^{n-1} \int\limits_{lk}^{(l+1)k} \Big[f^{(m)}(t) -$$

$$- f^{(m)}\left(lk + \frac{k}{2}\right)\Big]\,\Phi_m(t)\,dt + \sum_{l=0}^{n-1} f^{(m)}\left(lk + \frac{k}{2}\right) \int\limits_{lk}^{(l+1)k} \Phi_m(t)\,dt$$

Здесь вторая сумма ввиду периодичности $\Phi_m(t)$ и равенства (1.3) равна нулю. Оценивая первую сумму, пользуясь (1.4) и (1.6), получим

$$|J_m| = \left|\int\limits_0^{nk} f^m(t)\,\Phi_m(t)\,dt\right| \leqslant MK_m 4n\left(\frac{k}{4}\right)^{m+2} = M_m \frac{k^2}{4} K_m n \tag{1.7}$$

Покажем еще, что $\Phi_m(x)$ можно представить в виде

$$\Phi_m(x) = -\frac{k^{m-1}}{m!}\int\limits_0^x \varphi(t)\,B_m\left(\frac{x-t}{k}\right)dt - \frac{k^{m-1}}{m!}\int\limits_x^k \varphi(t)\,B_m\left(\frac{x-t+k}{k}\right)dt \tag{1.8}$$

где $B_m(z)$ — полиномы Бернулли, определяемые символическими равенствами $B_m(z) = (B+z)^m$ и $B^m = B_m$, суть числа Бернулли. Известно, что

$$B_m(z+1) = mz^{m-1} + B_m(z) \tag{1.9}$$

$$\frac{dB_m(z)}{dz} = mB_{m-1}(z) \tag{1.10}$$

На основании (1.9) формулу (1.8) можно представить в виде

$$\Phi_m(x) = -\frac{k^{m-1}}{m!}\int\limits_0^k \varphi(t)\,B_m\left(\frac{x-t}{k}\right)dt - \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_x^k \varphi(t)\,(x-t)^{m-1}\,dt \tag{1.11}$$

Чтобы убедиться в справедливости формулы (1.8), достаточно показать

$$\frac{d\Phi_m(x)}{dx} = \Phi_{m-1}(x), \qquad \frac{d^m\Phi_m(x)}{dx^m} = \varphi(x), \qquad \Phi_m(0) = \Phi_m(k) \tag{1.12}$$

Первое равенство (1.12) следует из (1.11) и (1.10); второе также получается из (1.11) и (1.10), но пользуясь еще формулой (1.1).

Непосредственно из (1.8) имеем третье равенство (1.12):

$$\Phi_m(0) = \Phi_m(k) = -\frac{k^{m-1}}{m!}\int\limits_0^k \varphi(t)\,B_m\left(\frac{k-t}{k}\right)dt$$

Заметим еще, что из этого соотношения следует (1.3).

Дадим более точную оценку, чем (1.4). Из формулы (1.8) получим

$$|\Phi_m(x)| \leqslant \frac{k^{m-1}}{m!} M \left[\int_0^x \left| B_m\left(\frac{x-t}{k}\right)\right| dt + \int_x^k \left| B_m\left(\frac{x-t+k}{k}\right)\right| dt\right] =$$

$$= \frac{k^{m-1}}{m!} M \left[k \int_0^{x/k} |B_m(z)|\, dz + k \int_{x/k}^1 |B_m(z_1)|\, dz\right] = \frac{k^m M}{m!} \int_0^1 |B_m(z)|\, dz \qquad (1.13)$$

Так как $B_{2s-1}(z)$ имеет в промежутке $(0, 1)$ только один корень $z = 1/2$, то в силу формулы (1.10) имеем

$$\int_0^1 |B_{2s-1}(z)|\, dz = \frac{1}{2s}\left|B_{2s}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2s}(0)\right| + \frac{1}{2s}\left|B_{2s}\left(\frac{1}{2}\right) - B_{2s}(1)\right|$$

Пользуясь известными формулами [1]

$$B_{2v}(0) = B_{2v}, \qquad B_{2v}(1) = B_{2v}, \qquad B_{2v}\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{2v-1}}\right) B_{2v}$$

получим

$$\int_0^1 |B_{2s-1}(z)|\, dz = -\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^{2v}}\right) B_{2v}$$

и формула (1.13) дает

$$|\Phi_{2s-1}(x)| \leqslant \frac{4k^{2s-1}}{(2s)!}\left(1 - \frac{1}{2^{2s}}\right) |B_{2s}|\, M = M_{2s-1} \qquad (1.14)$$

Известно [1], что для больших значений s

$$\frac{B_{2s}}{(2s)!} \sim \frac{2}{(2\pi)^{2s}}$$

Поэтому при больших s имеем асимптотическую оценку

$$|\Phi_{2s-1}(x) \leqslant \frac{4}{\pi}\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2s-1} M \qquad (1.15)$$

Соединяя формулы (1.5) и (1.14), найдем

$$|\Phi_{2s}(x)| \leqslant \frac{k^{2s}}{(2s)!}\left(1 - \frac{1}{2^{2s}}\right) |B_{2s}|\, M = M_{2s} \qquad (1.16)$$

и для больших s

$$|\Phi_{2s}(x)| \leqslant 2\left(\frac{k}{2\pi}\right)^{2s} M \qquad (1.17)$$

Неравенства (1.14) и (1.16) дают более точные оценки, чем (1.7).

§ 2. Дан интеграл

$$J = \int_0^b f(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (2.1)$$

где $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом k, для которой имеет место равенство (1.1), функция $f(x)$ обладает свойством (1.6) и $b = nk$.

Интегрируя m раз по частям и пользуясь равенством

$$\Phi_l(b) = \Phi_l(0) = \frac{1}{k}\int_0^k t\, \Phi_{l-1}(t)\, dt \qquad (l = 1, 2, \ldots)$$

получим

$$J=\sum_{l=0}^{m-1}[f^l(b)-f^l(0)]\frac{(-1)^l}{k}\int_0^k t\,\Phi_l(t)\,dt+(-1)^m J_m \tag{2.2}$$

где J_m оценивается по формуле (1.7) и более точно по (1.14), (1.16).

Пусть функция $\varphi(x)$ не обладает свойством (1.1), а все остальные предположения остаются прежние. Тогда функция

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-\frac{1}{k}\int_0^k \varphi(t)\,dt$$

будет периодической и обладает свойством (1.1) Для J получим

$$J=n\int_0^b f(x)\,dx\int_0^k \varphi(t)\,dt+\int_0^b f(x)\,\varphi_1(x)\,dx \tag{2.3}$$

где ко второму слагаемому уже применима формула (2.2).

Формула (2.3) является естественным обобщением известных формул, когда $\varphi(x)$ есть $\sin\alpha x$ или $\cos\alpha x$, и при большом n позволяет легко найти J с большой точностью, в то время как обычные методы приближенного интегрирования будут весьма затруднительными, так как подинтегральная функция имеет много колебаний в промежутке интегрирования. Кроме того, формула (2.2) полезна для оценки. Пример

$$J=\int_0^1 e^x\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 x)}\,dx,\quad k=\frac{1}{10^3}$$

$$\varphi_1(x)=\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 x)}-10^3\int_0^{0.001}\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 t)}\,dt$$

$$J=10^3\int_0^1 e^x\,dx\int_0^{0.001}\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 t)}\,dt+\int_0^1 e^x\varphi_1(x)\,dx$$

Применим ко второму слагаемому формулу (2.2) при $m=1$. Имеем

$$J=10^3(l-1)\int_0^{0.001}\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 t)}\,dt+(l-1)\,10^3\int_0^{0.001}t\,\varphi_1(t)\,dt+\Delta J_1$$

Здесь $|\varphi_1(x)|\leqslant M=2,\quad K_1=3$ и по формуле (1.7) имеем

$$|\Delta J_1|\leqslant\frac{3}{8}\,\frac{1}{10^6}<\frac{1}{2\cdot 10^6}$$

Подставляя $\varphi_1(x)$, получим

$$J=999\frac{1}{2}(l-1)\int_0^{0.001}\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 t)}\,dt+$$

$$+(l-1)\,10^3\int_0^{0.001}t\sqrt[3]{1+\sin(2\pi\,10^3 t)}\,dt+\Delta J_1$$

Поступила в редакцию
17 I 1950