Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950
Институт механики Академии Наук Союза ССР

СОБСТВЕННО НЕУСТОЙЧИВЫЕ РЕГУЛИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

А. М. Летов

(Москва)

1. Рассмотрим уравнения

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}\eta_\alpha + n_k\xi \quad (k=1,\ldots,n), \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha\eta_\alpha - \xi \tag{1.1}$$

где η_k — координаты, а $b_{k\alpha}$ — заданные постоянные параметры регулируемой системы, ξ — координата, а n_k — заданные постоянные параметры регулирующего органа, p_α — постоянные регулятора, $f(\sigma)$ — заданная нелинейная функция аргумента σ. Предполагается, что $f(\sigma)$ принадлежит к широкому классу непрерывных функций, обладающих свойством: $f(0)=0$; $\sigma f(\sigma) > 0$. Для сокращения будем называть их функциями класса (A). Допустим, что регулятор выключен, т. е. $p_\alpha = 0$ $(\alpha=1,\ldots,n)$; в этом случаее поведение регулируемой системы в окрестности ее положения равновесия [очевидного решения уравнений (1.1)]

$$\eta_1^* = 0, \ \ldots, \ \eta_n^* = 0, \qquad \xi^* = 0 \tag{1.2}$$

зависит от характера корней уравнения

$$\Delta(\lambda) = |\, b_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}\lambda \,| = 0 \qquad (\delta_{\alpha\beta}=0,\ \delta_{\alpha\alpha}=1;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, n) \tag{1.3}$$

Тогда будем говорить, что:

а) при $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ $(k=1,\ldots,n)$ регулируемая система собственно устойчива;

б) при $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=0$, $\operatorname{Re}\lambda_{s+\alpha}<0$ $(\alpha=1,\ldots,n-s)$ регулируемая система нейтральна по координатам $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$;

в) при $\operatorname{Re}\lambda_k < 0$ $(k=1,\ldots,s)$ система собственно неустойчива.

В работах А. И. Лурье [1, 2] рассматривались собственно устойчивые либо нейтральные регулируемые системы, для которых все λ_k суть различные числа. Теперь представляет интерес рассмотреть собственно неустойчивые регулируемые системы и формулировать теорему о достаточных условиях такого выбора постоянных регулятора p_α $(\alpha=1,\ldots,n)$, при которых гарантируется устойчивость положения равновесия (1.2), каковы бы ни были начальные возмущения.

Может оказаться, что в тех или иных частных случаях поставленная задача не может получить должного решения при любой функции $f(\sigma)$, принадлежащей классу (A); тогда во всех случаях требуется определить подкласс (A′) функций $f(\sigma)$ в классе (A), для которых решение поставленной задачи возможно.

Очевидно, подкласс (A′) функции $f(\sigma)$ должен характеризоваться дополнительными и специфическими свойствами, определяемыми в конечном счете особенностями собственно неустойчивых регулируемых систем.

2. Проведем предварительные преобразования уравнений (1.1) к нужной нам форме. Введем новое переменное σ, определяемое формулой

$$\sigma = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha \eta_\alpha - \xi \tag{2.1}$$

и, обозначая

$$b_{k\alpha}{}^\circ = b_{k\alpha} + n_k p_\alpha \qquad (\alpha,\ k = 1,\ \ldots,\ n) \tag{2.2}$$

перепишем первые n уравнений (1.1) в форме

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}{}^\circ \eta_\alpha - n_k \sigma \tag{2.3}$$

Далее, дифференцируя (2.1) и, обозначая

$$\sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha b_{\alpha\beta}{}^\circ = p_\beta{}^\circ, \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha n_\alpha = \rho \tag{2.4}$$

в совокупности с уравнениями (2.3) получим

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{k\alpha}{}^\circ \eta_\alpha - n_k \sigma, \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha{}^\circ \eta_\alpha - \rho\sigma - f(\sigma) \tag{2.5}$$

Рассмотрим линейное преобразование

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \eta_\alpha \qquad (s = 1,\ \ldots,\ n) \tag{2.6}$$

Дифференцируя (2.6) с помощью уравнений (2.5), найдем

$$\dot{x}_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \left[\sum_{\beta=1}^{n} b_{\alpha\beta}{}^\circ \eta_\beta - n_k \sigma \right] \qquad (s = 1,\ \ldots,\ n) \tag{2.7}$$

Если постоянные преобразования $C_\alpha^{(s)}$ определить соотношениями

$$\lambda_s{}^\circ C_\beta^{(s)} = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} b_{\alpha\beta}{}^\circ, \qquad -1 = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} n_\alpha \qquad (s,\ \beta = 1,\ \ldots,\ n) \tag{2.8}$$

где λ_s — корни уравнения

$$\Delta(\lambda^\circ) = |\, b_{\alpha\beta}{}^\circ - \delta_{\alpha\beta}\lambda^\circ \,| = 0 \tag{2.9}$$

то уравнениям (2.7) можно придать вид:

$$\dot{x}_s = \lambda_s{}^\circ x_s + \sigma \tag{2.10}$$

Допустим, что корни уравнения (2.9) все различные и обладают свойством $\operatorname{Re}\lambda_k{}^\circ < 0$; поскольку коэффициенты уравнения (2.9) содержат постоянные p_α регулятора, то всегда возможно их выбрать так, чтобы означенное условие выполнялось. Очевидно, в этом случае постоянные p_α регулятора должны выбираться согласно неравенствам

$$\Delta_0 > 0, \quad \Delta_1 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0 \tag{2.11}$$

где $\Delta_k\ (k = 1,\ \ldots,\ n)$ — определители Гурвитца для уравнения (2.9).

При этих допущениях преобразование (2.6) будет преобразованием неособым и тогда уравнения (2.5) могут быть приведены к окончательной канонической форме:

$$\dot{x}_k = -r_k x_k + \sigma, \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha x_\alpha - \rho\sigma - f(\sigma) \tag{2.12}$$

где $r_k = -\lambda_k^\circ$, причем $\operatorname{Re} r_k > 0$ $(k = 1, \ldots, n)$, а β_α суть постоянные коэффициенты, определяемые по ходу выполнения самого преобразования.

Допустим, что $r_1, \ldots, r_s$ — действительные, а $r_{s+1}, \ldots, r_n$ — комплексные, попарно сопряженные числа; тогда переменные $x_1, \ldots, x_s$ и постоянные $\beta_1, \ldots, \beta_s$ будут действительные, а переменные величины $x_{s+1}, \ldots, x_n$ и постоянные $\beta_{s+1}, \ldots, \beta_n$ будут комплексные, попарно сопряженные величины.

3. Рассмотрим знакоопределенную всюду положительную функцию [2

$$V = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_k a_i x_k x_i}{r_k + r_i} + \frac{R^2}{2} \sigma^2 \tag{3.1}$$

где $R^2 > 0$, $a_1, \ldots, a_s$ — действительные, а $a_{s+1}, \ldots, a_n$ — комплексные попарно сопряженные постоянные. Ее полная производная, вычисленная согласно уравнениям (2.12), такова:

$$\dot{V} = -2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k a_i x_k x_i + 2\sigma \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{a_k a_i x_k}{r_k + r_i} + R^2 \sigma \sum_{\alpha=1}^{n} \beta_\alpha x_\alpha - \rho R^2 \sigma^2 - R^2 \sigma f(\sigma)$$

Но, поскольку

$$2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_k a_i x_k x_i = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \right)^2$$

то, дописав в правую часть функции $\dot{V}$ выражение

$$\pm \sigma^2 \pm 2\sigma \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0$$

представим ее в форме

$$\dot{V} = -\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sigma \right]^2 - (R^2 \rho - 1)\sigma^2 - R^2 \sigma f(\sigma) +$$
$$+ \sigma \sum_{k=1}^{n} \left[2 \sum_{i=1}^{n} \frac{a_k a_i}{r_k + r_i} + 2a_k + R^2 \beta_k \right] x_k$$

Потребуем выполнения соотношений

$$2a_k \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r_k + r_i} \right) + R^2 \beta_k = 0 \qquad (k = 1, \ldots, s) \tag{3.2}$$

$$2a_{s+\alpha} \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{r_{s+\alpha} + r_i} \right) + R^2 \beta_{s+\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-s) \tag{3.3}$$

$$\rho R^2 - 1 > 0 \tag{3.4}$$

Тогда имеем знакопостоянную всюду отрицательную производную

$$\dot{V} = -\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sigma\right]^2 - (\rho R^2 - 1)\sigma^2 - R^2 \sigma f(\sigma) \qquad (3.5)$$

Следовательно, условия (2.11), (3.2), (3.3), (3.4) суть достаточные условия устойчивости в большом очевидного решения уравнений (2.12),

$$x_1^* = 0, \ldots, x_n^* = 0, \qquad \sigma^* = 0 \qquad (3.6)$$

или, что то же самое, очевидного решения (1.2) уравнений (1.1).

По своей форме условия (3.2), (3.3) аналогичны условиям А. Лурье[2] .

4. Может оказаться, что условия (2.11), (3.2) — (3.4) в совокупности будут несовместимыми, причем, как показывают решения частных задач, означенная несовместимость вызывается неравенством (3.4). В этом случае дело может быть поправлено за счет предъявления дополнительных требований к функции $f(\sigma)$.

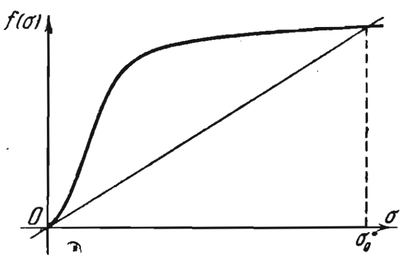
Допустим, что $[df(\sigma)/d\sigma]_{\sigma=0} = h$, тогда функция (3.5) может быть представлена так:

$$\dot{V} = -\left[\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sigma\right]^2 - [R^2(\rho + h) - 1]\sigma^2 - R^2 \sigma \varphi(\sigma) \qquad (4.1)$$

где

$$\varphi(\sigma) = f(\sigma) - h\sigma \qquad (4.2)$$

Среди функций $f(\sigma)$ класса (А) выделим подкласс (А′) таких функций, которые обладают свойствами: а) $h \neq 0$, б) $\sigma\varphi(\sigma)$ всюду положительна, т. е. кривая $f(\sigma)$ нигде не пересекается с прямой $h\sigma$, кроме точки $\sigma = 0$.



Фиг. 1

Тогда условие (3.4) заменится условием

$$R^2(\rho + h) - 1 > 0 \qquad (4.3)$$

Очевидно, при заданных параметрах объекта регулирования и выбранных согласно (2.11), (3.2), (3.3) параметрах регулятора соотношение (4.3) определяет наименьшую среднюю крутизну характеристики исполнительного органа.

В тех же случаях, когда скорость исполнительного органа ограничена так, что пересечение функции $f(\sigma)$ с прямой $h\sigma$ имеет место при $\sigma = \sigma^*$ (фиг. 1), при выполнении условий (3.2), (3.3), (4.3) суждение об устойчивости положения равновесия регулируемой системы распространяется лишь на такие начальные возмущения, которые по σ не превосходят величины $|\sigma_0^*|$. Можно сказать, что в этом случае мы имеем своеобразную условную устойчивость в большом.

Таким образом, доказана теорема: какова бы ни была собственно неустойчивая регулируемая система, выбор параметров регулятора согласно условиям (2.11), (3.2), (3.3), (3.4) или условиям (2.11), (3.3), (3.3), (4.3) гарантирует устойчивость ее равновесия (1.2) при любых возмущениях и любой функции $f(\sigma)$, класса (А) или подкласса (А′).

5. Рассмотрим задачу, которая в качестве собственно устойчивой регулируемой системы изучалась Б. В. Булгаковым [3]. Имеем

$$T^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} + U \frac{d\psi}{dt} + k\psi + \mu = 0$$
$$\frac{d\mu}{dt} = f^*(\sigma), \quad \sigma = a\psi + E \frac{d\psi}{dt} + G^2 \frac{d^2\psi}{dt^2} - \frac{1}{l} \mu \tag{5.1}$$

где величины T, U, a, E, G, l больше нуля, тогда как $k < 0$. Положим

$$\psi = \eta_1, \quad \frac{d\psi}{dt} = \sqrt{r}\,\eta_2, \quad \mu = m\xi, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{r}}, \quad p = \frac{U}{T^2}$$
$$q = \frac{k}{T^2}, \quad r = \frac{m}{T^2}, \quad m = \frac{lT^2}{T^2 + lG^2}, \quad f(\sigma) = \frac{1}{m\sqrt{r}} f^*(\sigma) \tag{5.2}$$

Тогда уравнения (5.1) можно записать в нормальной форме Коши

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 - \xi, \quad \dot{\xi} = f(\sigma), \quad \sigma = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \xi \tag{5.3}$$

где точка обозначает дифференцирование по безразмерному времени τ, а безразмерные постоянные коэффициенты будут

$$b_{21} = -\frac{q}{r}, \quad b_{22} = -\frac{p}{\sqrt{r}}, \quad p_1 = a - qG^2, \quad p_2 = \sqrt{r}\,(E - pG^2) \tag{5.4}$$

В соответствии с формулой (2.1) положим $\xi = p_1\eta_1 + p_2\eta_2 - \sigma$.

Исключая ξ из (5.3), получим исходные уравнения в форме (2.3),

$$\dot{\eta}_1 = \eta_2, \quad \dot{\eta}_2 = b_{21}{}^\circ\eta_1 + b_{22}{}^\circ\eta_2 + \sigma, \quad \dot{\sigma} = p_1{}^\circ\eta_1 + p_2{}^\circ\eta_2 - \rho\sigma - f(\sigma), \tag{5.5}$$

где новые значения коэффициентов определяются равенствами

$$b_{12}{}^\circ = 1, \qquad b_{21}{}^\circ = b_{21} - p_1, \quad b_{22}{}^\circ = b_{22} - p_2$$
$$p_1{}^\circ = p_2 b_{21}{}^\circ, \quad p_2{}^\circ = p_1 + p_2 b_{22}{}^\circ, \quad \rho = -p_2$$

Но на основании формул (5.2) (5.4) найдем

$$b_{21}{}^\circ = -\frac{k + al}{l}, \qquad b_{22}{}^\circ = -\frac{U + lE}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}}$$
$$p_1{}^\circ = -\frac{(k + al)(E - pG^2)}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}}, \qquad p_2{}^\circ = a - qG^2 - \frac{(U + lE)(E - pG^2)}{T^2 + lG^2} \tag{5.6}$$

Для преобразования k каноническим переменным положим

$$x_s = C_1{}^{(s)}\eta_1 + C_2{}^{(s)}\eta_2 \qquad (s = 1, 2) \tag{5.7}$$

В соответствии с формулами (2.8) получим следующие уравнения для определения коэффициентов преобразования:

$$\lambda^\circ C_1{}^{(s)} = b_{21}{}^\circ C_2{}^{(s)}, \qquad \lambda^\circ C_2{}^{(s)} = C_1{}^{(s)} + b_{22}{}^\circ C_2{}^{(s)}, \qquad 1 = C_2{}^{(s)} \tag{5.8}$$

где $\lambda^\circ = -r$ суть корни уравнения

$$r^2 - \frac{U + lE}{\sqrt{l(T^2 + lG^2)}}\, r + \frac{k + al}{l} = 0 \tag{5.9}$$

Очевидно, чтобы $R_e r_k > 0$, необходимо и достаточно выбрать постоянные регулятора согласно единственному условию Гурвитца

$$k + al > 0 \tag{5.10}$$

Если регулятор жесткого выключения не содержит ($l = \infty$), условие (5.10) всегда выполнено при любом $a > 0$.

Подставляя в уравнения (5.8) $\lambda_1{}^\circ = -r_1$ и $\lambda_2{}^\circ = -r_2$, найдем

$$C_2{}^{(s)} = 1, \qquad C_1{}^{(s)} = -\frac{b_{21}{}^\circ}{r_s} \qquad (s = 1, 2)$$

Таким образом, преобразование (5.7) примет вид:

$$x_1 = r_2\eta_1 + \eta_2, \qquad x_2 = r_1\eta_1 + \eta_2 \tag{5.11}$$

Если $r_1 \neq r_2$, это преобразование будет неособым, поэтому найдем

$$\eta_1 = \frac{1}{r_2 - r_1}(x_1 - x_2), \qquad \eta_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}(r_2 x_2 - r_1 x_1) \tag{5.12}$$

Итак, пользуясь формулами (5.11), (5.12), приведем уравнения (5.5) к стандартной канонической форме:

$$\dot{x}_1 = -r_1 x_1 + \sigma, \quad \dot{x}_2 = -r_2 x_2 + \sigma, \quad \dot{\sigma} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + p_2\sigma - f(\sigma) \tag{5.13}$$

где

$$\beta_1 = \frac{1}{r_2 - r_1}(p_1{}^\circ - r_1 p_2{}^\circ), \qquad \beta_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}(-p_1{}^\circ + r_2 p_2{}^\circ) \tag{5.14}$$

По доказанной теореме условия устойчивости (при $R^2 = 1$) имеют вид:

$$\frac{a_1{}^2}{r_1} + \frac{2a_1a_2}{r_1 + r_2} + 2a_1 + \beta_1 = 0, \qquad \frac{a_2{}^2}{r_2} + \frac{2a_1a_2}{r_1 + r_2} + 2a_2 + \beta_2 = 0 \tag{5.15}$$

$$-p_2 - 1 > 0 \tag{5.16}$$

Если же функция $f(\sigma)$ принадлежит подклассу (A′), то вместо условия (5.16) следует писать $h - p_2 - 1 > 0$, $[h] = 1$.

6. Рассмотрим полученные условия устойчивости для случая отсутствия жесткого выключения ($l = \infty$). Допустим, что (5.9) имеет действительные корни; в этом случае уравнения (5.15) подлежат разрешению в действительных a_1, a_2. Условия этого решения таковы [4]:

$$\Gamma^2 = 1 - \frac{\beta_1}{r_1} - \frac{\beta_2}{r_2} > 0 \tag{6.1}$$

$$D^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 - \beta_1 r_1 - \beta_2{}^2 \pm 2r_1r_2\Gamma > 0 \tag{6.2}$$

при этом во втором условии достаточно принять какой-либо один знак; в дальнейшем сохраним знак плюс. Согласно (5.9), (5.14) получим

$$r_1 + r_2 = \frac{E}{G}, \qquad r_1 r_2 = a, \qquad \frac{\beta_1}{r_1} + \frac{\beta_2}{r_2} = \frac{p_1{}^\circ}{r_1 r_2} = -\frac{E - pG^2}{G}$$

$$\beta_1 r_1 + \beta_2 r_2 = \frac{1}{r_2 - r_1}[-(r_2 - r_1)p_1{}^\circ + (r_2{}^2 - r_1{}^2)p_2{}^\circ] = -p_1{}^\circ + \frac{E}{G}p_2{}^\circ$$

Но при $l = \infty$ из (5.6) вытекает

$$p_1{}^\circ = -\frac{a(E - pG^2)}{G}, \qquad p_2{}^\circ = a - qG^2 - \frac{E(E - pG^2)}{G^2}$$

Следовательно, условия (6.1), (6.2) имеют вид:

$$\Gamma^2 = 1 + \frac{1}{G}(E - pG^2) \tag{6.3}$$

$$D^2 = \left(\frac{E}{G}\right)^3 + \left(\frac{E}{G}\right)^2 + (ap + qE)G + 2a\Gamma - 2a - 2a\frac{E}{G} - pG\left(\frac{E}{G}\right)^2 > 0 \tag{6.4}$$

Обозначив $E/G = x$, $G = y$ и усиливая неравенство (6.4) за счет отбрасывания слагаемого $2a\Gamma > 0$, построим на плоскости xy кривые

$$y = \frac{1}{p}x + \frac{1}{p} \tag{6.5}$$

$$F(xy) = x^3 + (1 - py)x^2 + (qy^2 - 2a)x + a(py - 2) = 0 \tag{6.6}$$

Первая из них есть прямая с угловым коэффициентом $k = 1/p$; вторая есть кривая третьего порядка. Из (6.6) найдем

$$y_{1,2} = \frac{p(x^2 - a) \pm \Delta(x)}{2qx} \tag{6.7}$$

где

$$\Delta^2(x) = p(x^2 - a)^2 - 4qx(x + 1)(x^2 - 2a) \tag{6.8}$$

Если x изменяется в интервале $(-\infty; +\infty)$, то (6.7) определяет точки кривой $F(xy) = 0$.

Легко установить, что:

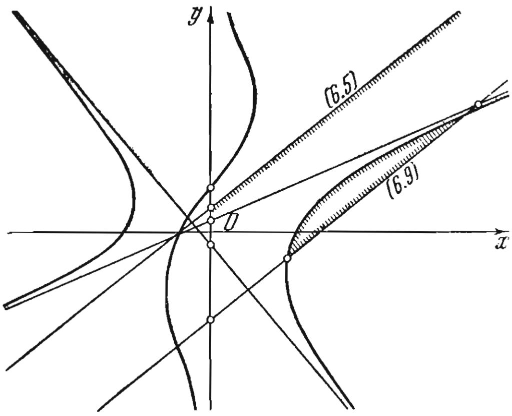
1) кривая $F(xy) = 0$ не имеет особых точек;

2) кривая $F(xy) = 0$ имеет три асимптоты, определяемые уравнениями

$$x = 0$$

$$y = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}x + \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$$

$$y = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2q}x - \frac{1}{\sqrt{p^2 - 4q}}$$



Фиг. 2

Далее, исследуя знаки многочлена $\Delta^2(x)$, легко установим, что его корни x_1, x_2, x_3, x_4 лежат соответственно в интервалах $(-\sqrt{2a}, -\sqrt{a})$, $(-\sqrt{a}, -1)$, $(0, \sqrt{a})$, $(\sqrt{a}, \sqrt{2a})$; при этом предполагается, что $a > 1$. Сказанное позволяет заключить о наличии у кривой вертикальных касательных, уравнения которых суть $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x = x_4$,

Отсюда также вытекает, что в интервалах (x_1, x_2), (x_3, x_4) кривая не определена. Наконец, непосредственное исследование выражений (6.7) позволяет установить прохождение кривой через точки:

1) $y_1 = 0, \quad y_2 = -\frac{p}{q}\sqrt{\frac{a}{2}} > 0$ при $x = -\sqrt{2a}$

2) $y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{p}{q}(a - 1) < 0$ при $x = -1$

3) $y_1 = \frac{2}{p}, \quad y_2 = \pm\infty$ при $x = 0$

4) $y_1 = 0, \quad y_2 = \frac{p}{q}\sqrt{\frac{a}{2}} < 0$ при $x = +\sqrt{2a}$

Изложенного достаточно для построения кривой $F(x, y)$ (фиг. 2).

Выполнимость условий (6.3), (6.4) относится к тем областям плоскости xy, к которым обращены штрихованные части кривых.

Теперь обратимся к условию (5.16).

Очевидно, оно противоречит условию (6.3); разумеется, из этого пока нельзя сделать заключение о том, что устойчивости в большом регулируемой системы невозможно добиться при всякой функции $f(\sigma)$, принадлежащей к классу (A).

В этом случае, обращаясь к условию (5.17), построим прямую

$$y = \frac{1}{p} x + \frac{1-h}{p} \tag{6.9}$$

Прямые (6.9) и (6.5) параллельны; они при $h = 0$ совпадают.

Очевидно, для того чтобы на плоскости xy получить область устойчивости в большом регулируемой системы (5.1), достаточно выбрать столь большое значение h, при котором имело бы место пересечение прямой (6.9) с кривой (6.6); эта область отмечена штриховкой по контуру фиг. 2.

Из рассмотрения ясно, что то предельное значение $h = h^*$, при котором прямая (6.9) касается кривой (6.6), дает значение наименьшей средней крутизны характеристики исполнительного органа, поэтому при $h < h^*$ устойчивость в большом не может быть гарантирована.

7. Теперь допустим, что уравнение (2.9) имеет m-кратный действительный и отрицательный корень — $r_1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m \neq 0$, тогда как остальные различные корни $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_s$ будут действительными отрицательными, а $\lambda_{s+1}, \ldots, \lambda_n$ — комплексными сопряженными с отрицательными действительными частями[1]. В этом случае существует неособое линейное преобразование (2.6) для группы переменных

$$x_s = \sum_{\alpha=1}^{n} C_\alpha^{(s)} \eta_\alpha \qquad (s = m+1, \ldots, n)$$

пользуясь которыми, приведем уравнения (2.5) к виду

$$\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^{m} a_{k\alpha}\eta_\alpha - n_k\sigma + \sum_{\beta=m+1}^{n} E_\beta^{(k)} x_\beta \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{7.1}$$

$$\dot{x}_s = -r_s x_r + \sigma \qquad (s = m+1, \ldots, n) \tag{7.2}$$

$$\dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{m} p_\alpha{}^\circ \eta_\alpha + \sum_{k=m+1}^{n} \beta_k x_k - \rho\sigma - f(\sigma)$$

Для другой группы переменных линейное неособое преобразование

$$\xi_k = \sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha^{(k)} \eta_\alpha \qquad (k = 1, \ldots, m) \tag{7.3}$$

---

[1] Случай двукратного корня при аналогичной постановке был рассмотрен нами ранее в работе [5]. Приведенные там рассуждения опираются на лемму, доказательство которой содержит ошибку. Однако полученная в этой работе теорема остается верной и может быть доказана без привлечения леммы. Пример такого доказательства здесь приводится при более общем предположении о кратности корней.

можно построить по правилам преобразования линейных уравнений с постоянными коэффициентами; при этом уравнения (7.1) принимают вид:

$$\dot{\xi}_k = \varepsilon_{k-1}\xi_{k-1} - r_1\xi_k - \left[\sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha^{(k)} n_\alpha\right]\sigma + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{s=m+1}^{n} D_\alpha^{(k)} E_s^{(\alpha)} x_\alpha \qquad (k=1,\ldots,m) \tag{7.4}$$

причем $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ можно выбрать как угодно малыми [6, 7]; $\varepsilon_0 = 0$.

Наконец, выполним еще одну замену переменных, положив

$$\xi_k = \zeta_k + \sum_{\alpha=m+1}^{n} f_\alpha^{(k)} x_\alpha \qquad (k=1,\ldots,m) \tag{7.5}$$

Если постоянные $f_\alpha^{(k)}$ выбрать согласно соотношениям

$$(r_1 - r_\alpha) f_\alpha^{(k)} = \varepsilon_{k-1} f_\alpha^{(k-1)} + \sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha^{(k)} E_\alpha^{(\alpha)} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, m \\ \alpha = m+1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

что очевидно, всегда возможно, то после дифференцирования тождеств (7.5) на основании уравнений (7.2), (7.5) найдем

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -r_1\zeta_1 + q_1\sigma \\ \dot{\zeta}_2 &= \varepsilon_1\zeta_1 - r_1\zeta_2 + q_2\sigma \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\zeta}_m &= \varepsilon_{m-1}\zeta_{m-1} - r_1\zeta_m + q_m\sigma \end{aligned} \tag{7.7}$$

где

$$q_k = -\sum_{r=m+1}^{n} f_r^{(k)} - \sum_{\alpha=1}^{m} D_\alpha^{(k)} n_\alpha \qquad (k=1,\ldots,m)$$

Итак, пользуясь преобразованиями (7.2), (7.3), (7.5), приведем исходные уравнения к окончательной форме:

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= -r_1\zeta_1 + q_1\sigma \\ \dot{\zeta}_2 &= \varepsilon_1\zeta_1 - r_1\zeta_2 + q_2\sigma \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\zeta}_m &= \varepsilon_{m-1}\zeta_{m-1} - r_1\zeta_m + q_m\sigma, \qquad \dot{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{m} \beta_\alpha^\circ \zeta_\alpha + \sum_{r=m+1}^{n} \beta_r x_r - \rho\sigma - f(\sigma) \\ \dot{x}_{m+1} &= -r_{m+1}x_{m+1} + \sigma \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= -r_n x_n + \sigma \end{aligned} \tag{7.8}$$

где коэффициенты β_α° определятся по ходу самого преобразования.

Рассмотрим знакоопределенную и всюду положительную функцию

$$V = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} B_\alpha \zeta_\alpha^2 + \sum_{k=m+1}^{n}\sum_{i=m+1}^{n} \frac{a_k a_i x_k x_i}{r_k + r_i} + \frac{R^2\sigma^2}{2}$$

где все B_α положительны.

Ее полная производная, вычисленная по уравнениям (7.8), такова:

$$\dot V = -\Big[\sum_{k=m+1}^{n} a_k x_k + \sigma\Big]^2 - r_1 \sum_{\alpha=1}^{m} B_\alpha \zeta_\alpha{}^2 - (\rho R^2 + h - 1)\,\sigma^2 - R^2 \sigma f(\sigma) +$$
$$+ \sigma \sum_{k=m+1}^{n}\Big[2\sum_{i=m+1}^{n} \frac{a_k a_i}{r_k + r_i} + 2a_k + R^2\beta_k\Big] x_k +$$
$$+ \sum_{\alpha=1}^{m} (q_\alpha B_\alpha + \beta_\alpha{}^\circ)\,\zeta_\alpha \sigma + \sum_{1=\alpha}^{m} \varepsilon_{\alpha-1} B_\alpha \zeta_\alpha \zeta_{\alpha-1}$$

Поскольку все ε_α могут быть сделаны сколь угодно малыми числами, то $\dot V$ будет, наверное, знакопостоянной и всюду отрицательной функцией, если выполнены следующие условия:

$$2a_k\Big(1 + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{a_i}{r_k + r_i}\Big) + R^2\beta_k = 0 \qquad (k = m+1, \ldots, s) \tag{7.9}$$

$$2a_{s+\alpha}\Big(1 + \sum_{i=m+1}^{n} \frac{a_i}{r_{s+\alpha} + r_i}\Big) + R^2\beta_{s+\alpha} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n - s) \tag{7.10}$$

$$B_\alpha = -\frac{q_\alpha}{\beta_\alpha{}^\circ} > 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{7.11}$$

$$\rho R^2 + h - 1 > 0 \tag{7.12}$$

Очевидно, что в совокупности с (2.11) это будут достаточные условия устойчивости в большом, какова бы ни была функция $f(\sigma)$, принадлежащая к классу (А) или подклассу (А′). Можно повторить рассуждения и при наличии нескольких многократных корней уравнения (2.9).

Итак, доказана теорема: какова бы ни была собственно неустойчивая регулируемая система, выбор параметров регулятора согласно условиям (2.11), (7.9) — (7.12) гарантирует устойчивость ее положения равновесия (1.2) при любых возмущениях и любой функции $f(\sigma)$, принадлежащей классу (А) или подклассу (А′).

Таким образом, эта теорема обобщает теорему А. И. Лурье [1, 2] на случай регулируемых систем любого типа с одним органом управления.

Поступила в редакцию
17 XI 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И., Постников В. Н. К теории устойчивости регулируемых систем. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 6.
2. Лурье А. И. Об устойчивости одного класса регулируемых систем. ПММ. 1945. Т. IX. Вып. 5.
3. Булгаков Б. В. Некоторые задачи теории регулирования с нелинейными характеристиками. ПММ. 1946. Т. X. Стр. 314.
4. Летов А. М. Регулирование стационарного состояния системы, подверженной действию постоянных возмущающих сил. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 2.
5. Летов А. М. Об одном особом случае исследования устойчивости систем регулирования. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 6.
6. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гл. IV. ОГИЗ. Гостехиздат. 1946.
7. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Гл. VI. ОГИЗ. Гостехиздат. 1947.