Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

А. Д. Майзель

(Свердловск)

§ 1. Постановка задачи. А. М. Ляпуновым [1] впервые была поставлена задача об установлении критериев устойчивости тривиального решения $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ системы нелинейных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\, x_1 + \cdots + p_{sn}(t)\, x_n + L_s(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где p_{sk} — вещественные, непрерывные и ограниченные функции t по линейной части этих уравнений, т. е. по системе

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\, x_1 + \cdots + p_{sn}(t)\, x_n \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.2}$$

которую Ляпунов назвал системой уравнений первого приближения.

При предположении, что $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ являются голоморфными относительно $x_1, \ldots, x_n$ функциями с вещественными, непрерывными и ограниченными коэффициентами, Ляпунов дал исчерпывающее решение задачи для случая, когда величины p_{sk} постоянны или являются периодическими функциями времени. Для общего случая, когда $p_{sk} = p_{sk}(t)$, Ляпуновым [1] были получены лишь некоторые достаточные критерии устойчивости по первому приближению[1]. Так как этими критериями не были исчерпаны все возможные случаи, когда вопрос об устойчивости может быть решен лишь по системе (1.2), то возникла задача о получении других критериев устойчивости по первому приближению. Новые критерии, освещающие вопрос с различных точек зрения, были предложены И. Г. Малкиным [5], К. П. Персидским [6] и О. Перроном [7]. Сравнение этих критериев с критерием Ляпунова показало, что эти критерии не эквивалентны. Поэтому возникла задача отыскания более общего критерия, который бы охватывал как частные случаи все остальные. Для случая абсолютной устойчивости эта задача была решена Я. А. Арестом[2]. Установленный в настоящей работе критерий получен для более общего случая условной устойчивости и охватывает все ранее полученные критерии. Этот критерий формулируется следующим образом.

---

[1] Для общего случая $p_{sk} = p_{sk}(t)$ Ляпунов дал критерий устойчивости. Критерий неустойчивости по первому приближению для рассмотренных Ляпуновым систем дан Н. Г. Четаевым [2,3,4].

[2] Работа Я. А. Ареста (1939) не опубликована.

Теорема 1. Допустим, что система (1.2) уравнений первого приближения допускает m независимых частных решений с положительными характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и существует такое положительное число k, лежащее в интервале

$$0 < k < \lambda = \min \{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\} \tag{1.3}$$

что система

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + (p_{ss} + k)\, y_s + \cdots + p_{sn}y_n + \omega_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

при любом выборе функций $\omega_s(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$|\, \omega_s(t) \,| < Be^{-kt} \qquad (B > 0) \tag{1.5}$$

имеет хотя бы одно ограниченное частное решение $y_s^*(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$, для которого выполняется неравенство $|\, y_s^*(t) \,| < N(B)$, где N — положительное число, зависящее только от B и не зависящее от того или иного частного выбора функций $\omega_s(t)$.

Тогда система (1.1) имеет устойчивое решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, содержащее по крайней мере m произвольных постоянных и удовлетворяющее, кроме того, условию $\lim x_s(t) = 0$ $(s = 1, \ldots, n)$ при $t \to \infty$.

Здесь $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ — аналитические функции переменных $x_1, \ldots, x_n$, разложения которых по степеням этих переменных сходятся в области

$$t \geqslant t_0, \qquad |\, x_s \,| \leqslant H, \qquad t_0 \geqslant 0, \qquad H > 0 \qquad (H = \mathrm{const}) \tag{1.6}$$

и начинаются членами не ниже второго порядка; коэффициенты этих разложений являются непрерывными и ограниченными функциями t. Величины $p_{sk}(t)$ — вещественные, непрерывные и ограниченные функции t.

§ 2. Некоторые вспомогательные предложения. Прежде чем приступить к доказательству теоремы, рассмотрим некоторые свойства ограниченного решения системы линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}(t)\, x_1 + \cdots + p_{sn}(t)\, x_n + \omega_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

при условиях (1.5).

Рассмотрим систему уравнений первого приближения (1.2) и пусть $x_{s\nu}(t)$ $(s, \nu = 1, \ldots, n)$ есть фундаментальная система ее решений. Предположим, что система уравнений (1.2) имеет m ограниченных независимых частных решений, и будем считать их m первыми решениями этой фундаментальной системы. Следовательно, при всех значениях индекса s $(s = 1, \ldots, n)$ функции $x_{s1}(t), \ldots, x_{sm}(t)$ ограничены. Любая же линейная комбинация последних $(n - m)$ решений должна быть неограниченной.

Решим систему (2.1) по методу Лагранжа. Имеем

$$x_s(t) = C_1 x_{s1}(t) + \cdots + C_n x_{sn}(t) + \sum_{j=1}^{n} x_{sj}(t) \int_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta_{\nu j}(\tau)}{\Delta}\, \omega_\nu(\tau)\, d\tau \tag{2.2}$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

где $\Delta = \| x_{\nu j} \|$, а $\Delta_{\nu j}$ — алгебраическое дополнение для элемента $x_{\nu j}$.

Допустим, что при заданных $\omega_s(t)$ система (2.1) имеет ограниченное частное решение, которое обозначим через X_s. Тогда

$$X_s = C_1^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]\, x_{s1} t + \cdots + C_n^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]\, x_{sn}(t) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} x_{sj}(t) \int_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta_{\nu j}(\tau)}{\Delta}\, \omega_\nu(\tau)\, d\tau \quad (s = 1, \ldots, n)$$

где $C_i^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$ $(i = 1, \ldots, n)$ — некоторые функционалы от $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$.

Отбрасывая в выражении для X_s ограниченную величину

$$C_1^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]\, x_{s1}(t) + \cdots + C_m^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]\, x_{sm}(t)$$

получим снова ограниченное решение:

$$M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)] = C_{m+1}^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]\, x_{s,\, m+1}(t) + \ldots + \tag{2.3}$$
$$+ C_n^*[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]\, x_{sn}(t) + \sum_{j=1}^{n} x_{sj}(t) \int_{t_0}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta_{\nu j}(\tau)}{\Delta}\, \omega_\nu(\tau)\, d\tau \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Здесь ограниченное решение системы (2.1) представлено в виде операторов $M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$, зависящих от функций $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$. Выясним некоторые свойства этих операторов.

Лемма I. Существует только одна система операторов вида (2.3), дающих ограниченное решение системы (2.1), т. е. коэффициенты $C_{m+1}^*, \ldots, C_n^*$ являются вполне определенными операторами.

Доказательство. Предположим, что существуют две системы операторов $M_s^{(1)}$ и $M_s^{(2)}$, являющихся ограниченными решениями системы (2.1). На основании (2.3), вычитая, получим

$$M_s^{(1)}[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)] - M_s^{(2)}[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)] = \sum_{j=m+1}^{n} [C_j^{*\,(1)} - C_j^{*\,(2)}]\, x_{sj}(t)$$

Так как полученное выражение должно быть ограниченным, а любая линейная комбинация последних $(n - m)$ решений может быть только неограниченной, то все величины $C_j^{*\,(1)} - C_j^{*\,(2)}$ должны равняться нулю, и, следовательно, система операторов $M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$ является единственной.

Применяя тот же метод, легко получаем и следующие леммы.

Лемма II. Операторы $M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$ $(s = 1, \ldots, n)$ обладают свойством

$$M_s[\omega_1^{(1)} + \omega_1^{(2)}, \ldots, \omega_n^{(1)} + \omega_n^{(2)}] = M_s[\omega_1^{(1)}, \ldots, \omega_n^{(1)}] + M_s[\omega_1^{(2)}, \ldots, \omega_n^{(2)}]$$

т. е. операторы от суммы функций равны сумме операторов этих функций.

Лемма III. Операторы $M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$ $(s = 1, \ldots, n)$ обладают свойством

$$M_s[\alpha\omega_1(t), \ldots, \alpha\omega_n(t)] = \alpha M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$$

где α — постоянная.

§ 3. Доказательство теоремы I. Возьмем фундаментальную систему решений

$$x_{s\nu}(t) \qquad (s,\ \nu = 1,\ \ldots,\ n) \tag{3.1}$$

уравнений (1.2). Будем считать, что m первыми решениями $x_{1j}(t), \ldots, x_{nj}(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$ этой фундаментальной системы являются вышеуказанные решения, обладающие положительными характеристическими числами, большими, чем k. Преобразуем систему (1.1) с помощью подстановки

$$x_s = y_s e^{-kt} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

Тогда уравнения (1.1) примут вид: (3.3)

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + (p_{ss} + k)\, y_s + \cdots + p_{sn}y_n + e^{kt}L_s(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n)$$

Заметим, что согласно сделанным относительно функций $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ предположениям в области $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant H$

$$|L_s(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqslant D(x_1^2 + \cdots + x_n^2)$$

где D — некоторая постоянная; поэтому для $t \geqslant 0$, $|y_s| \leqslant He^{kt}$ получим

$$|L_s(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n)| \leqslant De^{-2kt}(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \tag{3.4}$$

Рассмотрим фундаментальную систему решений уравнений

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + (p_{ss} + k)\, y_s + \cdots + p_{sn}y_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.5}$$

соответствующую фундаментальной системе (3.1) уравнений (1.2), т. е. решения $y_{s\nu}(t) = x_{s\nu}(t)\, e^{kt}$ $(s, \nu = 1, \ldots, n)$.

Так как по условию теоремы $k < \lambda = \min\{\lambda_1, \ldots, \lambda_m\}$, то первые m решений системы (3.5) также имеют положительные характеристические числа $(\lambda_1 - k), \ldots, (\lambda_m - k)$ и, следовательно, являются ограниченными.

Система (1.4) по условию теоремы имеет хотя бы одно ограниченное решение, поэтому существует также ограниченное решение этой системы в виде оператора $y_s(t) = M_s[\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)]$, зависящего от функций $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$. Рассмотрим систему функциональных уравнений

$$y_s = M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n)] +$$
$$+ C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

где $C_1, \ldots, C_m$ — произвольные постоянные. Очевидно, что всякое решение уравнений (3.6) является также решением уравнений (3.3).

Для получения решений уравнений (3.6) положим

$$y_s^{(0)} = 0 \tag{3.7}$$
$$y_s^{(1)} = M_s[e^{kt}L_1(t, 0, \ldots, 0), \ldots, e^{kt}L_n(t, 0, \ldots, 0)] + C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t)$$
$$y_s^{(2)} = M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1^{(1)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(1)}), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1^{(1)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(1)})] +$$
$$+ C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t)$$

. . . .

$$y_s^{(l+1)} = M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)}), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)})] +$$
$$+ C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. Покажем, что можно подобрать такое малое число η, что если $|C_j| < \eta\ (j = 1, \ldots, m)$, то для всех последовательных приближений получим величины, меньшие по модулю, чем ε. Это утверждение, очевидно, справедливо для $y_s^{(0)}$.

Для доказательства справедливости его для любого приближения применим метод индукции. Пусть все приближения до порядка μ включительно меньше ε. Докажем, что в этом случае и $|y_s^{(\mu+1)}| < \varepsilon$:

$$|y_s^{(\mu+1)}| \leqslant \left| M_s \left[e^{kt} L_1 \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right), \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots, e^{kt} L_n \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right)\right] \right| + |C_1| \, |y_{s1}(t)| + \cdots + |C_m| \, |y_{sm}(t)|$$

На основании (3.4) и сделанного относительно $y_s^{(\mu)}$ предположения

$$\left| e^{kt} L_s \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right) \right| \leqslant D n \varepsilon^2 e^{-kt}$$

и по условию теоремы

$$\left| M_s \left[\frac{e^{kt}}{n\varepsilon^2 D} L_1 \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right), \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots, \frac{e^{kt}}{n\varepsilon^2 D} L_n \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right)\right] \right| \leqslant N(1)$$

Отсюда на основании свойств операторов (лемма III)

$$M_s \left[e^{kt} L_1 \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right), \ldots, e^{kt} L_n \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right)\right] | \leqslant$$
$$\leqslant N(1)\, n\varepsilon^2 D \tag{3.8}$$

Вследствие ограниченности функций $y_{s1}(t), \ldots, y_{sm}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ при всех $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеем

$$|y_{sj}(t)| < E \qquad (s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m) \tag{3.9}$$

где E — некоторая постоянная.

Принимая во внимание неравенства (3.8) и (3.9), получаем

$$|y_s^{(\mu+1)}| \leqslant N(1)\, n\varepsilon^2 D + mE\eta$$

Считая ε и η настолько малыми, чтобы выполнялись условия $N(1)\, n\varepsilon D < 1/2$, $mE\eta < \varepsilon/2$, окончательно получим $|y_s^{(\mu+1)}| < \varepsilon$. Таким образом, доказано, что для всех значений l имеет место $|y_s^{(l)}| < \varepsilon$.

Покажем теперь, что последовательность полученных приближений равномерно сходится. Для этого докажем неравенство

$$|y_s^{(l)} - y_s^{(l-1)}| < A^l \varepsilon^l \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

где A — некоторая положительная постоянная, большая единицы.

Замечая, что неравенство (3.10) выполняется при $l = 1$, и предполагая его справедливым для любого l от 1 до μ включительно, покажем, что оно выполняется и при $l = \mu + 1$. Из (3.7) в силу леммы II имеем

$$y_s^{(\mu+1)} - y_s^{(\mu)} = M_s \left\{ e^{kt} \left[L_1 \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right) - \right.\right.$$
$$\left. - L_1 \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu-1)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu-1)}\right)\right], \ldots \tag{3.11}$$
$$\left. \ldots, e^{kt} \left[L_n \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu)}\right) - L_n \left(t, e^{-kt} y_1^{(\mu-1)}, \ldots, e^{-kt} y_n^{(\mu-1)}\right)\right] \right\}$$

Введем для краткости обозначения

$$\alpha_s = e^{-kt} y_s^{(\mu-1)}, \qquad h_s = e^{-kt}\left(y_s^{(\mu)} - y_s^{(\mu-1)}\right)$$

Применяя теорему о среднем к функциям, стоящим в (3.11), получим

$$e^{kt}\left[L_s\left(t, e^{-kt}y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(\mu)}\right) - L_s\left(t, e^{-kt}y_1^{(\mu-1)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(\mu-1)}\right)\right] =$$
$$= e^{kt}\left[L_s(t, \alpha_1 + h_1, \ldots, \alpha_n + h_n) - L_s(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\right] =$$
$$= e^{kt}\left\{h_1\left(\frac{\partial L_s}{\partial \alpha_1}\right) + \cdots + h_n\left(\frac{\partial L_s}{\partial \alpha_n}\right)\right\} \tag{3.12}$$

где круглые скобки, в которые заключены производные, обозначают, что эти производные вычисляются для значений аргументов, равных $\alpha_s^* = \alpha_s + \theta h_s$, где $0 < \theta < 1$.

Так как разложения функций $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ в ряд по степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$ начинаются членами не ниже второго порядка, то для частных производных получим следующие выражения:

$$\left(\frac{\partial L_s}{\partial \alpha_\nu}\right) = \alpha_1^* L_{s\nu}^{(1)} + \cdots + \alpha_n^* L_{s\nu}^{(n)} \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \tag{3.13}$$

где $L_{s\nu}^{(j)}$ — аналитические функции α_s^*. Для модулей этих функций существует, очевидно, некоторый верхний предел L. Подставляя (3.13) в (3.12) и принимая во внимание неравенства

$$|h_s| = \left|e^{-kt}\left(y_s^{(\mu)} - y_s^{(\mu-1)}\right)\right| < e^{-kt} A^\mu \varepsilon^\mu$$

$$|\alpha_s^*| = |\alpha_s + \theta h_s| < e^{-kt}\left(\varepsilon + \theta A^\mu \varepsilon^\mu\right)$$

получим

$$\left| e^{kt}\left[L_s\left(t, e^{-kt}y_1^{(\mu)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(\mu)}\right) - L_s\left(t, e^{-kt}y_1^{(\mu-1)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(\mu-1)}\right)\right]\right| <$$
$$< e^{-kt} n^2 L A^\mu \varepsilon^{\mu+1}\left(1 + \theta A^\mu \varepsilon^{\mu-1}\right)$$

Из (3.11) на основании леммы III и по условию теоремы получим

$$\left|y_s^{(\mu+1)} - y_s^{(\mu)}\right| < n^2 L\left(1 + \theta A^\mu \varepsilon^{\mu-1}\right)\varepsilon^{\mu+1} A^\mu N(1)$$

Выбирая величину $A > 1$ настолько большой, чтобы выполнялось условие $n^2 L N(1) < A/2$, и считая ε настолько малым, чтобы выполнялось также условие $n^2 L N(1)\, \theta (A\varepsilon)^{\mu-1} < {}^1/_2$, окончательно получаем

$$\left|y_s^{(\mu+1)} - y_s^{(\mu)}\right| < A^{\mu+1}\varepsilon^{\mu+1}$$

что и показывает, что неравенства (3.10) справедливы при всяком значении l. Будем считать, что ε настолько мало, что $A\varepsilon < 1$. Тогда из (3.10) вытекает, что ряд

$$y_s^{(0)} + \left(y_s^{(1)} - y_s^{(0)}\right) + \left(y_s^{(2)} - y_s^{(1)}\right) + \cdots + \left(y_s^{(l)} - y_s^{(l-1)}\right) + \cdots$$

абсолютно и равномерно сходится и, следовательно, последовательность функций $y_s^{(l)}$ равномерно сходится к некоторой предельной функции, которую мы обозначим через $y_s(t)$. Таким образом,

$$y_s(t) = \lim_{l \to \infty} y_s^{(l)}(t) \tag{3.14}$$

Так как $|y_s^{(l)}(t)| < \varepsilon$ при любом l, то для предельной функции $y_s(t)$ также получим $|y_s(t)| < \varepsilon$ $(s = 1, \ldots, n)$. Покажем теперь, что полученные предельные функции удовлетворяют функциональным уравнениям (3.6). Рассмотрим для этого разность

$$\begin{aligned}
&\{M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n)] + \\
&\qquad + C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t)\} - \\
&-\{M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)}), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)})] + \\
&\qquad + C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t)\} = M_s\{e^{kt}[L_1(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n) - \\
&\qquad - L_1(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)})], \ldots, e^{kt}[L_n(t, e^{-kt}y_1, \ldots, e^{-kt}y_n) - \\
&\qquad - L_n(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)})]\}
\end{aligned} \tag{3.15}$$

При $l \to \infty$ правая часть (3.15) стремится к нулю, откуда непосредственно следует, что

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to\infty} M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)}), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1^{(l)}, \ldots, e^{-kt}y_n^{(l)})] + \\
&\qquad + C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t) = \\
&= M_s[e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1(t), \ldots, e^{-kt}y_n(t)), \ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1(t), \ldots, e^{-kt}y_n(t))] + \\
&\qquad + C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

На основании (3.7) и (3.14) последнее равенство принимает вид:

$$\begin{aligned}
y_s(t) = M_s[&e^{kt}L_1(t, e^{-kt}y_1(t), \ldots, e^{-kt}y_n(t)), \ldots \\
&\ldots, e^{kt}L_n(t, e^{-kt}y_1(t), \ldots, e^{-kt}y_n(t))] + \\
&+ C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t) \qquad (s = 1, \ldots, n)
\end{aligned}$$

т. е. полученные предельные функции удовлетворяют функциональным уравнениям (3.6) и, следовательно, также уравнениям (3.3).

Мы доказали, таким образом, что система (3.3) допускает частное решение, содержащее m произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_m$ и удовлетворяющее условию $|y_s(t)| < \varepsilon$. Подставляя это решение в (3.2), мы получим частное решение $x_s(t)$ системы (1.1), содержащее m произвольных постоянных, которое будет не только устойчивым, но для которого будет выполняться условие $\lim x_s(t) = 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, теорема полностью доказана.

Примечание. Новый критерий устойчивости получен в предположении, что $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ — аналитические функции. Однако при доказательстве критерия мы нигде не пользовались представлением $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$ в виде ряда и аналитичность нужна была только для удобства, когда составлялась оценка для L_s. Можно было бы взять иную оценку (как у Перрона [7], Коттона [9], или Персидского [6]), что совершенно не сказалось бы на методе доказательства критерия.

§ 4. Сравнение с критерием устойчивости Ляпунова. Пусть система (1. 2) является неправильной. Как было показано Ляпуновым, в этом случае имеет место условие

$$S+\mu=-\sigma \qquad (\sigma>0) \tag{4.1}$$

где S — сумма характеристических чисел решений нормальной системы, μ — характеристическое число функции

$$\exp\left\{-\int_{t_0}^{t}\sum_{s=1}^{n}p_{ss}(t)\,dt\right\}$$

Ляпуновым [1] дан следующий критерий условной устойчивости: «Если система (1.2) неправильна, но m решений этой системы имеют положительные характеристические числа, бо̀льшие величины σ, то система (1.1) имеет устойчивое решение, содержащее m произвольных постоянных».

Обозначим через $x_{s\nu}(t)$ $(s, \nu=1,\ldots,n)$ нормальную систему решений уравнений (1.2). Будем для удобства считать, что m первыми решениями являются вышеуказанные решения, обладающие положительными характеристическми числами, которые обозначим через $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Согласно условиям Ляпунова тогда имеет место неравенство

$$\lambda=\min\{\lambda_1,\ldots,\lambda_m\}>\sigma \tag{4.2}$$

Покажем, что при выполнении критерия Ляпунова имеет место критерий условной устойчивости, установленный в этой работе. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что имеет место следующая теорема.

Теорема II. При выполнении условий Ляпунова существует число k, заключенное в интервале $(0, \lambda)$, для которого система уравнений (1.4) при любых $\omega_s(t)$, удовлетворяющих неравенству

$$|\omega_s(t)|<Be^{-kt} \qquad (B>0) \tag{4.3}$$

имеет ограниченное решение $y_s=y_s^*(t)$, содержащее по меньшей мере m произвольных постоянных. При этом имеет место неравенство $|y_s^*(t)|<N(B)$, где $N(B)$ — положительное число, зависящее только от B и не зависящее от выбора функций $\omega_s(t)$.

Доказательство. Выберем число k согласно условию

$$\sigma<k<\lambda \tag{4.4}$$

Возьмем фундаментальную систему решений $y_{s\nu}(t)$ $(s, \nu=1,\ldots,n)$ уравнений (3.5), соответствующую нормальной системе решений $x_{s\nu}(t)$ уравнений (1.2), т. е.

$$y_{s\nu}(t)=x_{s\nu}(t)\,e^{kt} \qquad (s, \nu=1,\ldots,n)$$

Обозначим характеристические числа решений $y_{s\nu}(t)$ через $\lambda_1^*, \lambda_2^*,\ldots,\lambda_n^*$. Очевидно, имеет место равенство

$$\lambda_j^*=\lambda_j-k \qquad (j=1,\ldots,n) \tag{4.5}$$

В силу (4.2) отсюда следует, что m первых решений $y_{s\nu}(t)$ также обладают положительными характеристическими числами $(\lambda_1 - k), \ldots, (\lambda_m - k)$. Рассмотрим частное решение уравнений (1.4):

$$y_s(t) = C_1 y_{s1}(t) + \cdots + C_m y_{sm}(t) + \sum_{j=1}^{n} y_{sj}(t) \int_{t_0,\,\infty}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Delta_{\nu j}(\tau)}{\Delta} \omega_\nu(\tau)\, d\tau \qquad (4.6)$$

$$(s = 1, \ldots, n)$$

Нижняя граница интегрирования в интегралах, входящих в (4.6), принимается равной t_0, если характеристическое число подинтегральной функции меньше или равно нулю, и равной бесконечности, если характеристическое число подинтегральной функции положительно. Как показал Ляпунов, в этом случае характеристическое число интеграла не меньше характеристического числа подинтегральной функции. На основании (4.3), имеем

$$|y_s(t)| \leqslant |C_1|\,|y_{s1}(t)| + \cdots + |C_m|\,|y_{sm}(t)| + BY_s \qquad (4.7)$$

где

$$Y_s = \sum_{j=1}^{n} |y_{sj}(t)| \left\{ \pm \int_{t_0,\,\infty}^{t} \sum_{\nu=1}^{n} \left| \frac{\Delta_{\nu j}(\tau)}{\Delta} \right| e^{-k\tau} d\tau \right\}.$$

Здесь знак плюс берется в том случае, если нижний предел интегрирования равен t_0, и минус, если он равен бесконечности. Обозначая через $\lambda[f(t)]$ характеристическое число $f(t)$, на основании теорем о характеристических числах будем иметь

$$\lambda[Y_s] \geqslant \lambda_j^* + \lambda[\Delta_{\nu j}(\tau)] + \lambda\left[\frac{1}{\Delta}\right] + k$$

$$\lambda[\Delta_{\nu j}(\tau)] \geqslant \lambda_1^* + \lambda_2^* + \cdots + \lambda_{j-1}^* + \lambda_{j+1}^* + \cdots + \lambda_n^*$$

Далее, принимая во внимание равенства (4.1) и (4.5), находим

$$\lambda\left[\frac{1}{\Delta}\right] = \lambda\left\{C \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \sum_{s=1}^{n} (p_{ss} + k)\, dt\right]\right\} = \mu + nk =$$

$$= -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) - \sigma + nk = -(\lambda_1^* + \cdots + \lambda_n^*) - \sigma$$

Следовательно,

$$\lambda[Y_s] \geqslant k - \sigma$$

Так как $(k - \sigma)$ согласно (4.4) положительно, то отсюда вытекает, что все функции Y_s ограничены. Кроме того, ограничены функции $y_{s1}(t), \ldots, y_{sm}(t)$, также имеющие положительные характеристические числа. Следовательно, на основании (4.7) заключаем, что частное решение (4.6), содержащее m произвольных постоянных, ограничено и что при этом имеет место неравенство $|y_s(t)| \leqslant N(B)$, где N зависит только от B (при фиксированных значениях произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_m$) и не зависит от того или иного частного выбора функций $\omega_s(t)$. Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 5. Сравнение с обобщенным критерием И. Г. Малкина. Пусть дана система уравнений (1.1) при условиях

$$|L_s(t, x_1, \ldots, x_n)| < A(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^m \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.1}$$

где A и $m > 1/2$ — положительные постоянные.

Пусть $x_{sj}(t, t_0)$ $(s, j = 1, \ldots, n)$ фундаментальная система решений уравнений (1.2) первого приближения при начальных условиях

$$x_{sj}(t_0, t_0) = 1 \quad \text{при } s = j, \qquad x_{sj}(t_0, t_0) = 0 \quad \text{при } s \neq j \quad (s, j = 1, \ldots, n)$$

где t_0 — начальный момент времени. Предположим, что все эти решения обладают положительными характеристическими числами.

И. Г. Малкин дал [8] критерий абсолютной устойчивости по первому приближению. Покажем, что его критерий может быть обобщен на случай условной устойчивости.

Теорема III. Допустим, что существует такая система величин $a_{sj}(t_0)$, являющихся ограниченными функциями t_0 и удовлетворяющих неравенству

$$|D| > A \tag{5.2}$$

где $D = \| a_{\alpha\beta}(t_0) \|$, а A — положительная постоянная, что фундаментальная система решений

$$x_{1j}(t, t_0), \quad x_{2j}(t, t_0), \ldots, x_{nj}(t, t_0) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{5.3}$$

уравнений (1.2), определяемая начальными условиями $x_{sj}(t_0, t_0) = a_{sj}(t_0)$ $(s, j = 1, \ldots, n)$, удовлетворяет следующему условию: для одних решений при всех $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Me^{-\alpha_j(t-t_0)}e^{\beta t_0} \tag{5.4}$$

а для остальных решений при всех $t \leqslant t_0$ выполняется неравенство

$$|x_{sj}(t, t_0)| < Me^{\alpha_j(t-t_0)}e^{\beta t_0} \tag{5.5}$$

где M, α_j и β — положительные постоянные, причем β меньше каждой из постоянных α_j, фигурирующих в условиях (5.4).

Тогда найдется такое положительное число k, удовлетворяющее условию $\beta < k < \alpha$, где α — наименьшая из величин α_j, фигурирующих в условиях (5.4), что система (1.4) при любом выборе функций $\omega_s(t)$, удовлетворяющих неравенству (4.3), имеет ограниченное решение $y_s(t) = y_s^*(t)$, содержащее по меньшей мере столько произвольных постоянных, сколько имеется решений, для которых выполняются условия (5.4). При этом функции $y_s^*(t)$ удовлетворяют неравенству $|y_s^*(t)| < N(B)$, где N зависит только от B и не зависит от того или иного частного выбора функций $\omega_s(t)$.

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений (3.5), в которую преобразуется система уравнений (1.2) с помощью подстановки $x_s = y_s e^{-kt}$.

Составим фундаментальную систему решений уравнений (3.5) из фундаментальной системы (5.3) уравнений (1.2) с помощью соотношения

$$y_{sj}(t, t_0) = x_{sj}(t, t_0)\, e^{k(t-t_0)} \qquad (s, j = 1, \ldots, n) \tag{5.6}$$

Начальные значения функций $x_{sj}(t, t_0)$ и $y_{sj}(t, t_0)$ совпадают.

Обозначим через

$$y_{1j}^*(t, t_0), \ldots, y_{nj}^*(t, t_0) \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{5.7}$$

фундаментальную систему решений уравнений (3.5), определяемую начальными условиями $y_{sj}^*(t_0, t_0) = \delta_{sj}$, где δ_{sj} равно 1 при $s = j$ и равно нулю при $s \neq j$. Так как решения (5.7) являются линейными комбинациями решений (5.6), то для j-го решения получим

$$y_{sj}^*(t, t_0) = C_{1j}\, y_{s1}(t, t_0) + \cdots + C_{nj}\, y_{sn}(t, t_0) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{5.8}$$

Полагая $t = t_0$, получим $C_{1j}\, a_{s1} + \cdots + C_{nj}\, a_{sn} = \delta_{sj}$. На основании (5.2) и ограниченности $a_{sj}(t_0)$ отсюда следует, что все C_{sj} $(s, j = 1, \ldots, n)$ вполне определяются и являются ограниченными функциями t_0.

Рассмотрим функции

$$Y_s(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{t} C_{\nu j}(\tau)\, y_{s\nu}(t, \tau)\, \omega_j(\tau)\, d\tau \tag{5.9}$$

где a_ν — постоянные; эти функции являются частным решением уравнений (1.4). При этом a_ν могут быть положены равными бесконечности при условии, конечно, что соответствующие интегралы существуют.

Из равенства (5.6) вытекает, что для решений $y_{s\nu}(t, t_0)$ $(s, \nu = 1, \ldots, n)$ условия (5.4) и (5.5) примут вид:

$$|\, y_{s\nu}(t, t_0)\,| < M e^{(k-\alpha_\nu)(t-t_0)} e^{\beta t_0} \qquad \text{для } t \geqslant t_0 \tag{5.10}$$

$$|\, y_{s\nu}(t, t_0)\,| < M e^{(k+\alpha_\nu)(t-t_0)} e^{\beta t_0} \qquad \text{для } t \leqslant t_0 \tag{5.11}$$

Покажем теперь, что все слагаемые, входящие в (5.9), являются ограниченными. В самом деле, так как

$$|\, C_{\nu j}(\tau)\,| < C \quad (C = \text{const}), \qquad |\, \omega_j(\tau)\,| < B e^{-k\tau}$$

то для каждого из решений, для которых имеют место условия (5.10), полагая при этом $a_\nu = t_0$ при всех $t \geqslant t_0$, получим

$$\left| \int_{t_0}^{t} C_{\nu j}(\tau)\, y_{s\nu}(t, \tau)\, \omega_j(\tau)\, d\tau \right| < CMB \int_{t_0}^{t} e^{(k-\alpha_\nu)(t-\tau)} e^{\beta\tau} e^{-k\tau}\, d\tau =$$

$$= \frac{CMB}{(\alpha_\nu + \beta - 2k)} \left[e^{(\beta-k)t} - e^{-(\alpha_\nu - k)t} e^{(\alpha_\nu + \beta - 2k)t_0} \right]$$

Так как k больше β и меньше каждой из величин α_ν, фигурирующих в условиях (5.4), то любое из рассматриваемых слагаемых является ограниченным и модуль каждого из них не превосходит некоторого числа, зависящего не от выбора функций $\omega_s(t)$, а только от величины B.

Для каждого из остальных решений, для которых имеют место условия (5.11), полагая при этом $a_\nu = \infty$ и беря те же значения t, с помощью аналогичных вычислений получим

$$\left| \int_{\infty}^{t} C_{\nu j}(\tau)\, y_{s\nu}(t, \tau),\, \omega_j(\tau)\, d\tau \right| < \frac{CMB}{(\alpha_\nu + 2k - \beta)} e^{-(k-\beta)t}$$

Так как k больше β, то любое из рассматриваемых слагаемых является ограниченным и модуль каждого из них не превосходит некоторого числа, зависящего не от выбора функций $\omega_s(t)$, а только от B.

Таким образом, нами получено ограниченное частное решение $Y_s(t)$ системы (1.4). Добавляя к этому частному решению любое решение однородной системы (3.5), мы снова получим решение уравнений (1.4). Допустим, что однородная система имеет m независимых ограниченных частных решений $y_{s\alpha}^*(t)$. Число m здесь, как это видно из условий (5.10), не меньше числа решений (5.3), удовлетворяющих (5.4). Тогда, полагая

$$y_s^*(t) = \sum_{\alpha=1}^{m} C_\alpha y_{s\alpha}^*(t) + Y_s(t)$$

получим ограниченное решение, удовлетворяющее всем условиям теоремы. Теорема полностью доказана.

Так как характеристическое число каждого решения, удовлетворяющего условию (5.4), не меньше α_j, то из доказанной теоремы и теоремы I непосредственно вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема IV. Если для системы уравнений (1.2) выполняются все условия теоремы III, то система (1.1) при любом выборе функций $L_s(t, x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям теоремы I, имеет устойчивое решение, содержащее по крайней мере m произвольных постоянных.

Эта теорема и является непосредственным обобщением вышеуказанного критерия устойчивости И. Г. Малкина [8]. Из этого критерия И. Г. Малкина как частный случай, когда $\beta = 0$, получается критерий К. П. Персидского [6], который совпадает с критерием О. Перрона [7] и другим критерием И. Г. Малкина [5]. Из теоремы III вытекает, что сформулированный в теореме IV обобщенный критерий условной устойчивости является частным случаем критерия, сформулированного в теореме I.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить благодарность И. Г. Малкину, который поставил мне задачу и сделал ряд ценных указаний.

Поступила в редакцию
15 XII 1949

Уральский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. 2-е изд. ОНТИ. 1935.
2. Четаев Н. Г. Теорема о неустойчивости для правильных систем. ПММ. 1944. Т. VIII. Вып. 4.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат. 1946.
4. Четаев Н. Г. О некоторых вопросах об устойчивости и неустойчивости для неправильных систем. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
5. Малкин И. Г. Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Сборник КАИ. 1937.
6. Персидский К. П. К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. Изв. КГУ. 1936—1937. Т. VIII. Сер. 3.
7. Perron O. Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen. Mathematische Zeitschrift. 1930. Bd. 32. H. 5.
8. Малкин И. Г. Об устойчивости движения по первому приближению. ДАН. 1938. Т. XVIII. № 3.
9. Cotton. Sur les solutions asymptotiques des équations différentielles. Annales de l'Ecole Normale. 1911. T. 28.