

РАСЧЕТ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕШЕТОК

Г. С. Самойлович

(Москва)

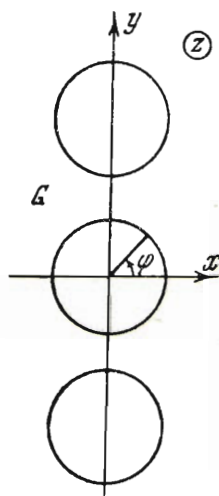
Задаче о построении потенциального потока, обтекающего плоскую гидродинамическую решетку, посвящено большое число работ.

В работе С. А. Чаплыгина^[1] рассматривается обтекание решетки, составленной из теоретических профилей, напоминающих крылья аэроплана. В работах Н. Е. Кочина^[2,3] дается метод расчета гидродинамических решеток большого шага. Л. А. Симоновым^[4] решается вопрос построения решетки при заданном годографе скоростей. В работе Э. Л. Блох^[5] предлагается метод построения решетки, составленной из профилей, близких по конфигурации к наперед заданным (исследуются решетки, применяемые в компрессорах). В. Траупель^[6] предлагает решать задачу об обтекании решетки из произвольных профилей путем последовательного применения серии конформных преобразований. Обзор современного состояния теории гидродинамических решеток имеется в работе Г. Ю. Степанова^[7].

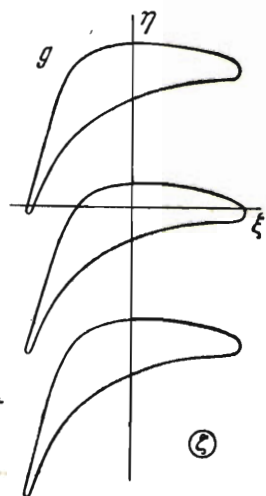
В данной работе для решения задачи об обтекании гидродинамической решетки разрабатывается общий метод. Задача ставится следующим образом: при известном законе обтекания отдельного профиля L найти закон обтекания решетки, составленной из профилей L . В качестве примеров применения метода рассмотрены задачи, представляющие теоретический и практический интерес: расчет густой решетки кругов и расчет направляющих лопаток паровой турбины.

§ 1. Вывод основных формул.

Рассмотрим бесконечно связанные области G и g комплексных переменных $z = x + iy$ и $\zeta = \xi + i\eta$ (фиг. 1 и 2). Область G образована из плоскости исключением бесконечного ряда кругов единичного радиуса. Расстояние между центрами кругов есть шаг решетки кругов t .



Фиг. 1



Фиг. 2

Область g представляет собой внешность решетки, составленной из профилей L . Шаг решетки t_1 и форма профилей предполагаются произвольными.

Займемся построением функции, доставляющей конформное преобразование области G на область g .

Пусть бесконечно удаленные точки областей соответствуют одна другой.

Искомая функция может быть записана в таком виде:

$$\zeta = az + P(z) \quad (1.1)$$

Функция $P(z)$ должна обладать следующими свойствами.

1. Функция $P(z)$ должна быть периодической функцией от z с периодом it , т. е. $P(z) = P(z \pm ikt)$.
2. Функция $P(z)$ должна оставаться ограниченной при $z \rightarrow \infty$
3. В окрестности начала координат, а в силу периодичности и в окрестности любого круга должно иметь место разложение

$$P(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$$

В области G функцию $P(z)$ можно представить интегралом

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_c P(w) \operatorname{cth} \frac{\pi(z-w)}{t} dw \quad (1.2)$$

Здесь w является переменной интегрирования. Выберем за путь интегрирования основную окружность решетки кругов и разложим котангенс в ряд Тейлора в окрестности начала координат:

$$\frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-w)}{t} = \frac{\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} w^n \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{t} \quad (1.3)$$

Левая и правая части этого выражения умножены на π/t ради удобства в последующих выкладках. Покажем, что этот ряд сходится абсолютно и равномерно на основной окружности. Так как

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - ikt} + \frac{1}{z + ikt} \right)$$

то можно записать выражение (1.3) следующим образом:

$$\frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-w)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(z - ikt)^{n+1}} + \frac{1}{(z + ikt)^{n+1}} \right] \right\} w^n \quad (1.4)$$

Очевидно, что $|z \pm ikt| > 1$, так как точка z находится вне решетки, а $|w| = 1$, так как w , являясь переменной интегрирования, пробегает окружность $|w| = 1$. Ввиду абсолютной сходимости рядов можем переменить порядок суммирования в предыдущем выражении:

$$\frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-w)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{w^n}{(z - ikt)^{n+1}} + \frac{w^n}{(z + ikt)^{n+1}} \right]$$

Суммируя по n , по формуле геометрической прогрессии

$$\frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-w)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - ikt - w} + \frac{1}{z + ikt - w} \right]$$

или

$$\frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi(z-w)}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{z^{n+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(z-w)}{(z-w)^2 + k^2 t^2}$$

Первый ряд является геометрической прогрессией и сходится равномерно на окружности $|w|=1$. Второй ряд сходится также равномерно, если $z \neq w \pm ikt$, т. е. если z находится вне решетки. Следовательно, ряд (1.3) сходится равномерно, поскольку он является суммой двух равномерно сходящихся рядов. Учитывая сказанное, имеем

$$P(z) = \frac{\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{2\pi i} \int_c P(w) w^n dw \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{t}$$

Или окончательно имеем формулу,

$$\zeta = az + \frac{\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{t} \quad (1.5)$$

Приходим к выводу: аналитическая периодическая функция вне решетки кругов единичного радиуса может быть разложена в ряд по производным гиперболического котангенса.

Коэффициенты разложения в ряд (1.5) могут быть выражены через $P(z)$ при помощи вычетов

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_c P(w) w^{n-1} dw \quad (1.6)$$

Интегрирование можно проводить по контуру окружности. Для дальнейших исследований нам понадобится разложение отображающей функции (1.1) в ряд Лорана в окрестности начала координат. Получим это разложение, воспользовавшись уравнением (1.5) и известным представлением гиперболического котангенса в виде ряда

$$\frac{\pi}{t} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{t} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k}{(2k)!} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{2k} z^{2k-1} \quad (1.7)$$

Здесь B_k — числа Бернулли. Ряд сходится при $|z| < t$. Продифференцировав левую и правую части выражения (1.7) n раз по z и подставив полученный ряд в (1.5), после некоторых упрощений получим

$$\zeta = az + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-(n+1)}}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{(-1)^n 2^{2k} B_k a_{-(n+1)}}{2k(2k-n-1)! n!} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{2k} z^{2k-n-1} \quad (1.8)$$

Причем суммирование по k производится от $k = (n+1)/2$ при n нечетном и от $k = (n+2)/2$ при n четном.

Займемся преобразованием двойной суммы в выражении (1.8). Обозначим временно $2k - n - 1 = m$, тогда $n = 2k - m - 1$. Производя замену индексов в двойной сумме, напомним

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_k \frac{2^{2k} B_k (-1)^{2k-m-1}}{2k m! (2k-m-1)!} a_{-(2k-m)} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{2k} z^m \quad (1.9)$$

Заменяя в (1.9) индекс m на n и принимая во внимание, что показатель степени у (-1) может быть заменен на $n+1$, получаем

$$\zeta = az + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k \frac{(-1)^{n+1} 2^{2k} B_k}{2k(2k-n-1)! n!} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{2k} a_{-(2k-n)} z^n \quad (1.10)$$

Или окончательно

$$\zeta = az + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (1.11)$$

Здесь принято обозначение

$$a_n = \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2k} B_k}{2k(2k-n-1)! n!} \left(\frac{\pi}{t}\right)^{2k} a_{-(2k-n)} \quad (1.12)$$

Таким образом, при разложении функции (1.4) в ряд Лорана (1.11) коэффициенты главной части ряда определяются (1.6), а коэффициенты правильной части зависят от коэффициентов главной по (1.12).

Заканчивая этот параграф, отметим, что ряд (1.5) будет при исследовании гидродинамических решеток играть ту же роль, которую играет ряд Лорана при исследовании изолированного профиля. В частном случае, когда шаг решетки $t \rightarrow \infty$, ряд (1.5) перейдет в ряд Лорана

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\pi}{t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \frac{\pi z}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{-(n+1)}}{z^{(n+1)}}$$

Эти важные свойства ряда (1.5) позволят в дальнейшем связать закон обтекания изолированного профиля с законом обтекания гидродинамической решетки, составленной из профилей, подобных изолированному.

§ 2. Обтекание решетки из кругов. Для решения воспользуемся общими формулами. Не уменьшая общности задачи, можем расположить центры кругов по оси y , а центр основного круга в начале координат (фиг. 1). Радиусы кругов примем равными единице.

Очевидно, что скорость вне решетки обладает теми же свойствами, что и рассмотренная в § 1 функция $P(z)$. Следовательно, комплексный потенциал потока, обтекающего решетку кругов, должен на основании выражения (1.5) раскладываться в ряд

$$F(z) = \bar{w}_0 z + A \ln \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda z + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} A_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \lambda z \quad (2.1)$$

Здесь и в дальнейшем вводится обозначение

$$\lambda = \frac{\pi}{t}, \quad w_0 = \operatorname{const} = u_0 + i v_0$$

Будем рассматривать случаи поперечного, продольного и чисто циркуляционного обтеканий решетки из кругов.

1°. *Поперечное обтекание решетки из кругов.* В этом случае $A = 0$, так как течение бесциркуляционное; в виду симметрии задачи коэффициенты $A_{-2} = A_{-4} = \dots = A_{-2k} = 0$, коэффициенты A_{-1}, A_{-3}, \dots будут действительными числами; скорость в бесконечности перед решеткой есть действительное число по условию задачи $w_0 = u_0$. Учитывая сказанное, а также (1.10), для данного случая вместо (2.1) можно написать

$$F(z) = u_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=(n+1)/2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2k} B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-n-1)! n!} A_{-(2k-n)} z^n \quad (2.2)$$

Мнимую часть комплексного потенциала $F(z)$ на окружности можно приравнять нулю, так как последняя является линией тока

$$\operatorname{Im} F(z) = 0 \quad (z = e^{i\varphi}) \quad (2.3)$$

Подставляя в (2.2) $z = e^{i\varphi}$ и приравнивая мнимую часть нулю, приходим к бесконечной системе уравнений:

$$A_{-1} = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-2)!} A_{-(2k-1)} \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \quad (2.4)$$

$$A_{-n} = \sum_{k=(n+1)/2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2k} B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-n-1)! n!} A_{-(2k-n)}$$

Можно показать, что система (2.4) принадлежит к классу вполне регулярных систем, т. е.

$$\sum_{k=(n+1)/2}^{\infty} \frac{2^{2k} |B_k| \lambda^{2k}}{2k(2k-n-1)! n!} < 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

Следовательно, система (2.4) имеет единственное ограниченное решение, которое может быть получено методом последовательных приближений.

Развернем систему (2.4):

$$A_{-1} = u_0 + \frac{1}{3} \lambda^2 A_{-1} - \frac{1}{15} \lambda^4 A_{-3} + \frac{2}{189} \lambda^6 A_{-5} - \frac{1}{675} \lambda^8 A_{-7} + \dots$$

$$A_{-3} = -\frac{1}{45} \lambda^4 A_{-1} + \frac{4}{189} \lambda^6 A_{-3} - \frac{1}{135} \lambda^8 A_{-5} + \frac{8}{5455} \lambda^{10} A_{-7} - \dots$$

$$A_{-5} = \frac{2}{945} \lambda^6 A_{-1} - \frac{1}{225} \lambda^8 A_{-3} + \frac{4}{1485} \lambda^{10} A_{-5} - \frac{2764}{2754125} \lambda^{12} A_{-7} + \dots$$

$$A_{-7} = -\frac{1}{4725} \lambda^8 A_{-1} + \frac{8}{10395} \lambda^{10} A_{-3} - \frac{2764}{3869775} \lambda^{12} A_{-5} + \frac{16}{42525} \lambda^{14} A_{-7} - \dots$$

.....

Выразим закон распределения скоростей по окружности в решетке тригонометрическим рядом. Сопоставив (2.2) и (2.4), можно записать комплексный потенциал потока в таком виде:

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{-n}}{z^n}$$

На окружности $z = e^{i\varphi}$, тогда

$$F(e^{i\varphi}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} e^{in\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} A_{-n} e^{-in\varphi}$$

Дифференцируя это выражение по φ и заменяя $e^{in\varphi}$ по формуле Эйлера через $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, получим выражение модуля скорости на окружности в решетке

$$|w| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n A_{-n} \sin n\varphi \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.6)$$

2°. *Продольное обтекание решетки из кругов.* В этом случае $A = 0$, так как течение бесциркуляционное; в виду симметрии коэффициенты $A_{-2} = A_{-4} = \dots = A_{-2k} = 0$; коэффициенты A_{-1}, A_{-3}, \dots будут чисто мнимыми числами: скорость в бесконечности по условию задачи чисто мнимая величина $w_0 = i v_0$. Обозначим $A_{-1} = i C_{-1}, A_{-3} = i C_{-3}, \dots$

Используя, как и в предыдущем пункте, условия (2.1) и (2.3), получим бесконечную систему уравнений:

$$C_{-1} = v_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-2)!} C_{-(2k-1)} \quad (n=3, 5, 7, \dots) \quad (2.7)$$

$$C_{-n} = - \sum_{k=(n+1)/2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2k} B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-n-1)! n!} C_{-(2k-n)}$$

Развернем систему (2.7):

$$C_{-1} = v_0 - \frac{1}{3} \lambda^2 C_{-1} + \frac{1}{15} \lambda^4 C_{-3} - \frac{2}{189} \lambda^6 C_{-5} + \frac{1}{675} \lambda^8 C_{-7} - \dots$$

$$C_{-3} = \frac{1}{45} \lambda^4 C_{-1} - \frac{4}{189} \lambda^6 C_{-3} + \frac{1}{435} \lambda^8 C_{-5} - \frac{8}{5455} \lambda^{10} C_{-7} + \dots \quad (2.8)$$

$$C_{-5} = -\frac{2}{945} \lambda^6 C_{-1} + \frac{1}{225} \lambda^8 C_{-3} - \frac{4}{1485} \lambda^{10} C_{-5} + \frac{2764}{2754125} \lambda^{12} C_{-7} - \dots$$

$$C_{-7} = \frac{1}{4725} C_{-1} - \frac{8}{10395} C_{-3} + \frac{2764}{3869775} \lambda^{12} C_{-5} - \frac{16}{42525} \lambda^{14} C_{-7} + \dots \text{ и т. д.}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным в предыдущем пункте, позволят представить модуль скорости на окружности в решетке тригонометрическим рядом

$$|w| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} n C_{-n} \cos n\varphi \quad (n = 1, 3, 5, \dots) \quad (2.9)$$

3°. *Чисто циркуляционное обтекание решетки из кругов.* Общее решение дается комплексным потенциалом (2.1), но теперь $A \neq 0$.

Рассмотрим разложение второго члена формулы (2.1):

$$\ln \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda z = \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} B_k \lambda^{2k}}{k(2k)!} z^{2k} \quad (2.10)$$

Поскольку это разложение содержит только четные степени z , то все $A_{-1} = A_{-3} = \dots = A_{-(2k+1)} = 0$.

По аналогии с циркуляционным обтеканием изолированной окружности обозначим $A = \Gamma / 2\pi i$, где Γ — циркуляция. Тогда очевидно, что все A_{-2k} будут чисто мнимыми величинами.

Обозначим $A_{-2} = i D_{-2}, A_{-4} = i D_{-4}, \dots$

Используя (2.1) и (2.3), как и прежде, приходим к бесконечной системе уравнений:

$$\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k-1} B_k}{k(2k)!} \lambda^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} D_{-2k} + \sum_{k=(n+2)/2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2k} B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-n-1)! n!} D_{-(2k-n)} \quad (2.11)$$

$$(n = 2, 4, 6, \dots)$$

Развернем систему (2.11):

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{6} \lambda^2 &= D_{-2} + \frac{1}{15} \lambda^4 D_{-2} - \frac{4}{189} \lambda^6 D_{-4} + \frac{1}{225} \lambda^8 D_{-6} - \dots \\ - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{180} \lambda^4 &= D_{-4} - \frac{2}{189} \lambda^6 D_{-2} + \frac{1}{135} \lambda^8 D_{-4} - \dots \\ \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{2835} \lambda^6 &= D_{-6} + \frac{1}{675} \lambda^8 D_{-2} - \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

и т. д.

Скорость на окружности можно выразить тригонометрическим рядом

$$|w| = \frac{\Gamma}{2\pi} + 2 \sum_{n=2}^{\infty} n D_{-n} \cos n\varphi \quad (n = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.13)$$

Пример. Найдем комплексный потенциал потока и закон распределения скоростей на окружности при обтекании решетки кругов, для которой $t/r = 2.5$. Рассмотрим только поперечное обтекание при $u_0 = 1$, так как продольное и циркуляционное находятся точно так же.

При $r = 1$ будет $t = 2.5$ и $\lambda = \pi/t = 1.2566$. Подставим эти числовые данные в систему (2.5):

$$\begin{aligned} 0.4738 A_{-1} &= 1 - 0.1662 A_{-3} + 0.0416 A_{-5} - 0.0092 A_{-7} + \dots \\ 0.9167 A_{-3} &= -0.0554 A_{-1} - 0.0460 A_{-5} + 0.0144 A_{-7} - \dots \\ 0.9736 A_{-5} &= 0.00833 A_{-1} - 0.0276 A_{-3} - 0.0102 A_{-7} + \dots \\ 0.9875 A_{-7} &= -0.001316 A_{-1} + 0.00756 A_{-3} - 0.0115 A_{-5} - \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Приводим результат решения этой системы методом последовательных приближений:

	1-ое приближ.	2-ое приближ.	3-е приближ.
A_{-1}	+ 2.110	+ 2.158	+ 2.158
A_{-3}	- 0.1275	- 0.1316	- 0.1316
A_{-5}	+ 0.02165	+ 0.02224	+ 0.02224
A_{-7}	- 0.00380	- 0.00396	- 0.00396

Процесс последовательных приближений, как видно из приведенной таблицы, сходится очень быстро. Второе приближение при данной точности уже не отличается от третьего. Выпишем первые члены ряда, в который разлагается комплексный потенциал потока ($\lambda = 1.2566$):

$$\begin{aligned} F(z) &= z + 2.158 \lambda \operatorname{cth} \lambda z - 0.1316 \lambda^3 \frac{\operatorname{ch} \lambda z}{\operatorname{sh}^3 \lambda z} + \\ &+ 0.00738 \lambda^5 \frac{\operatorname{ch} \lambda z (2 + \operatorname{ch}^2 \lambda z)}{\operatorname{sh}^5 \lambda z} - \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

Разложение модули скорости на окружности согласно (2.6) будет

$$|w| = 4.316 \sin \varphi - 0.7896 \sin 3\varphi + 0.2224 \sin 5\varphi - 0.0554 \sin 7\varphi + \dots$$

Максимальная скорость на окружности равна $|w| = 5.3824$. Скорость в любой точке потока найдется дифференцированием (2.14).

Отметим, что сходимость рядов при продольном и циркуляционном обтеканиях еще лучше, чем в поперечном.

§ 3. Обтекание решетки из профилей произвольной формы. Пусть требуется определить поток, обтекающий решетку, составленную из профилей L произвольной формы, т. е. нужно найти подъемную силу, действующую на профиль и распределение скоростей в поле потока. Решим эту задачу, опираясь на выводы, полученные в предыдущих параграфах.

Рассмотрим вновь две бесконечно связанные области G и g (фиг. 1 и 2). Введенный ряд (1.5) устанавливает между названными областями конформное соответствие.

Рассмотрим задачу о безотрывном обтекании решетки из контуров L потенциальным потоком, имеющим на бесконечности скорость

$$W_{+\infty} = U_{+\infty} + iV_{+\infty}$$

Комплексный потенциал течения в области g обозначим

$$F(\zeta) = \Phi + i\Psi$$

Подставим сюда вместо ζ его выражение через z из (1.5)

$$F[\zeta(z)] = \varphi + i\psi$$

Эта функция является аналитической в области G и может представлять в этой области комплексный потенциал некоторого потока.

Так как в соответствующих точках областей G и g имеют место равенства

$$\varphi = \Phi, \quad \psi = \Psi$$

и, с другой стороны, $\Psi = \text{const}$ на контурах L , то $\psi = \text{const}$ на окружностях, составляющих решетку в плоскости z .

Следовательно, функция

$$F(z) = F[\zeta(z)] = \varphi + i\psi$$

является комплексным потенциалом потока, обтекающего решетку кругов.

Общий вид этого комплексного потенциала может быть на основании § 2 представлен так:

$$F(z) = \bar{w}_0 z + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{1}{\lambda} \text{sh } \lambda z + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \text{cth } \lambda z \quad (3.1)$$

Здесь w_0 — скорость на бесконечности в бесциркуляционном потоке, обтекающем решетку кругов. Полная скорость на бесконечности перед решеткой кругов равна:

$$\left[\frac{dF(z)}{dz} \right]_{z=+\infty} = w_0 - \frac{\lambda \Gamma}{2\pi i} \quad (3.2)$$

По известному соотношению между скоростями потоков в областях G и g имеем

$$\frac{dF(z)}{dz} = \frac{dF(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} \quad (3.3)$$

Тогда, сравнивая скорости в бесконечности перед решеткой кругов и перед решеткой профилей L , получим

$$w_0 - \frac{\lambda \Gamma}{2\pi i} = \bar{a} W_{+\infty} \quad (3.4)$$

Рассматривая z в (3.1) как функцию от ζ и принимая во внимание условие (3.4), получим выражение искомого комплексного потенциала:

$$F(\zeta) = \left[a\bar{W} - \frac{\lambda\Gamma}{2\pi i} \right] z(\zeta) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda z(\zeta) + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \lambda z(\zeta) \quad (3.5)$$

Величину циркуляции Γ следует определять, пользуясь постулатом Жуковского-Чаплыгина. Задача может считаться решенной, если установлено соответствие между областями G и g по типу (1.5).

Очевидно, что все полученные выражения в предельном случае при $\lambda = 0$ должны переходить в формулы, выражающие законы обтекания изолированного контура L . Действительно, при $\lambda = 0$ ряд (1.5) переходит в ряд Лорана, отображающий внешность круга на внешность контура L , а выражение (3.5) — в известное выражение комплексного потенциала потока, обтекающего изолированный контур L .

Остается решить вопрос об определении коэффициентов a_n в (1.5), если задан вид контура L , составляющего решетку. Аналогичная задача для изолированного профиля хотя и представляет значительные трудности, однако может считаться решенной, поскольку в настоящее время существуют эффективные методы построения потока вокруг профилей.

Поставим задачу в наиболее общем виде: *требуется найти функцию, дающую конформное преобразование внешности решетки кругов на внешность решетки контуров L , если известна функция, преобразующая внешность единичной окружности на внешность изолированного контура L* . Итак, пусть известны коэффициенты ряда Лорана

$$\zeta_1 = c_1 z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z_1^n} \quad (3.6)$$

Требуется найти коэффициенты ряда (1.5) при известном $\lambda = \pi/t$. Пусть θ будет полярный угол в плоскости изолированного круга $z_1 = x_1 + iy_1$. Очевидно, что уравнение

$$\zeta = c_1 e^{i\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\theta} \quad (3.7)$$

представляет контур L в параметрической форме. Подобное параметрическое выражение называют нормальным. Обозначим φ полярный угол в плоскости решетки кругов (фиг. 1). Тогда уравнение

$$\zeta = a e^{i\varphi} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} a_{-(n+1)} \frac{d^n}{dz^n} \operatorname{cth} \lambda z \quad (z = e^{i\varphi}) \quad (3.8)$$

при соответствующем выборе a и a_n выражает тот же контур L , однако соответственным точкам на изолированной окружности и основной окружности решетки кругов отвечают различные точки на контуре L .

Очевидно, что если удастся найти параметрическое представление контура L в форме (3.8), то задача об отыскании функции будет решена простой заменой $e^{i\varphi}$ на z . Для отыскания представления (3.8) применим метод разложения в ряд по степеням параметра [8]. Пользуясь представлением (1.10), напомним выражение (3.8) в другом виде:

$$\zeta = ae^{i\varphi} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}e^{-in\varphi} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_k^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^k B_k \lambda^{2k}}{2k(2k-n-1)! n!} a_{-(2k-n)} e^{in\varphi} \quad (3.9)$$

Напомним, что суммирование по k производится от $k = (n+1)/2$ при n нечетном и от $k = (n+2)/2$ при n четном.

Будем искать зависимость между полярным углом в плоскости z_1 (плоскость изолированного круга) и полярным углом в плоскости z (плоскость решетки кругов), так как наша задача заключается в нахождении параметрического представления контура L по типу (3.9) при известном параметрическом представлении (3.7). Ищем эту зависимость в виде ряда

$$\theta = \varphi + \Delta\varphi = \varphi + \lambda^4\varphi_4 + \lambda^6\varphi_6 + \dots \quad (3.10)$$

Здесь $\varphi_4, \varphi_6, \dots$ — вещественные периодические функции от φ , поскольку при изменении θ и φ на 2π значения ζ_1 и ζ не должны изменяться.

Первый член в (3.10) свободен от λ , так как при $\lambda = 0$ (3.9) совпадает с (3.7) и тогда $a = c_1, a_{-n} = c_{-n}, \varphi = \theta$.

В (3.10) отсутствует член $\lambda^2\varphi_2$, так как λ^2 является коэффициентом только при $e^{i\varphi}$.

Функцию $\Delta\varphi$, которая в дальнейшем будет играть важную роль, назовем *функцией смещения*.

Займемся определением $\varphi_4, \varphi_6, \dots$ как функций от φ, c_1 и c_{-n} . Подставим (3.10) в (3.7) и развернем выражение (3.7) в ряд по степеням λ . Очевидно, что коэффициент при λ^{2k} может быть записан так:

$$\frac{1}{(2k)!} \left[\frac{d^{2k}\zeta_1}{d\lambda^{2k}} \right]_{\lambda=0} \quad (3.11)$$

С помощью (3.7), (3.10) и (3.11) для коэффициентов при различных степенях λ получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} c_1 e^{i\varphi} + \sum n c_{-n} e^{-in\varphi} & \quad \text{при } \lambda^0 \\ i\varphi_4 \left[c_1 e^{i\varphi} - \sum n c_{-n} e^{-in\varphi} \right] & \quad \text{при } \lambda^4 \\ i\varphi_6 \left[c_1 e^{i\varphi} - \sum n c_{-n} e^{-in\varphi} \right] & \quad \text{при } \lambda^6 \\ i\varphi_8 \left[c_1 e^{i\varphi} - \sum n c_{-n} e^{-in\varphi} \right] - \frac{1}{2} \varphi_4^2 \left[c_1 e^{i\varphi} + \sum n^2 c_{-n} e^{-in\varphi} \right] & \quad \text{при } \lambda^8 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Таким образом можно последовательно найти коэффициент при любой степени λ (отметим, что для практических целей вполне достаточно ограничиться членами, содержащими λ не выше чем в шестой или восьмой степени. Выбранная степень точности будет вполне достаточна даже при расчете весьма густых решеток).

Приступим к определению $\varphi_4, \varphi_6, \dots$. После подстановки (3.10) в (3.7) получим ряд, расположенный по степеням λ ; коэффициенты этого ряда даны в (3.12). Упомянутый ряд должен строиться по типу ряда (3.9), т. е. коэффициенты при положительных степенях $e^{in\varphi}$ должны зависеть от коэффициентов при отрицательных степенях $e^{-in\varphi}$ по условию (1.12). Соотношение (1.12) позволит последовательно найти функции $\varphi_4, \varphi_6, \dots$.

При определении функций φ_n следует помнить, что они вещественны, т. е. могут быть представлены так:

$$\varphi_n = \sigma_n + \bar{\sigma}_n \quad (3.13)$$

Будем строить функции $\varphi_4, \varphi_6, \dots$ последовательно друг за другом так, чтобы коэффициенты при $e^{in\varphi}$ зависели от коэффициентов при $e^{-in\varphi}$ по условию (1.12). Разумеется, все вычисления следует производить с точностью до членов, содержащих λ^4 при определении φ_4 , λ^6 при определении φ_6 и т. д. Учитывая (1.12), (3.12) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_4 &= i \left[\frac{1}{45} \frac{c_{-1}}{c_1} e^{2i\varphi} - \frac{1}{15} \frac{c_{-2}}{c_1} e^{i\varphi} \right] \\ \sigma_6 &= i \left[-\frac{2}{945} \frac{c_{-1}}{c_1} e^{4i\varphi} + \frac{2}{189} \frac{c_{-2}}{c_1} e^{3i\varphi} - \left(\frac{2}{945} \frac{c_{-1}^2}{c_1^2} + \frac{4}{189} \frac{c_{-3}}{c_1} \right) e^{2i\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{4}{189} \frac{c_{-4}}{c_1} + \frac{2}{315} \frac{c_{-1}c_{-2}}{c_1^2} \right) e^{i\varphi} \right] \\ \sigma_8 &= i \left[\frac{1}{4725} \frac{c_{-1}}{c_1} e^{6i\varphi} - \frac{1}{675} \frac{c_{-2}}{c_1} e^{5i\varphi} + \left(\frac{1}{225} \frac{c_{-3}}{c_1} + \frac{13}{2835} \frac{c_{-1}^2}{c_1^2} \right) e^{4i\varphi} - \right. \\ &\quad - \left(\frac{4}{1575} \frac{c_{-1}c_{-2}}{c_1^2} + \frac{1}{135} \frac{c_{-4}}{c_1} \right) e^{3i\varphi} + \left(\frac{1}{135} \frac{c_{-5}}{c_1} + \frac{41}{1350} \frac{c_{-1}^3}{c_1^3} - \right. \\ &\quad - \left. \frac{1}{270} \frac{c_{-2}^2}{c_1^2} + \frac{1}{2025} \frac{c_{-1}}{c_1} + \frac{271}{41175} \frac{c_{-1}c_{-3}}{c_1^2} \right) e^{2i\varphi} + \left(-\frac{1}{225} \frac{c_{-6}}{c_1} + \right. \\ &\quad + \frac{724}{96075} \frac{c_{-1}^2c_{-2}}{c_1^3} - \frac{7}{1350} \frac{c_{-1}c_{-2}}{c_1c_1} + \frac{4}{225} \frac{c_{-2}c_{-3}}{c_1^2} - \frac{59}{4725} \frac{c_{-1}c_{-4}}{c_1^2} + \\ &\quad \left. + \frac{1}{135} \frac{c_{-1}c_{-5}}{c_1^2} + \frac{41}{1350} \frac{c_{-1}^4}{c_1^4} - \frac{1}{270} \frac{c_{-1}c_{-2}^2}{c_1^3} + \frac{1}{2025} \frac{c_{-1}c_{-1}}{c_1c_1} + \frac{271}{41175} \frac{c_{-1}^2c_{-3}}{c_1^3} \right) e^{i\varphi} \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Выражения (3.14) через (3.13) и (3.10) определяют функцию смещения $\Delta\varphi$ по известным коэффициентам ряда Лорана (3.7).

Функция смещения устанавливает соответствие между точками окружностей в решетке и точками профилей L в решетке при конформном преобразовании области G на g , если известно такое же соответствие для изолированного профиля L , т. е. если известен ряд Лорана.

Получим теперь формулы, необходимые для изучения поля потока во всей области g . Соответствие между областями G и g будет установлено, если удастся определить коэффициенты a и a_{-n} ряда (1.5) через коэффициенты ряда Лорана (3.6). Подставив в (3.12) вместо $\varphi_4, \varphi_6, \dots$ их выражения из (3.13) и (3.14) и произведя соответствующие умножения, соберем подобные члены. Тогда коэффициенты, получившиеся при $e^{-in\varphi}$, могут быть приравнены соответствующим коэффициентам a_{-n} из (1.5).

Приведем окончательные выражения для коэффициентов a_n :

$$\begin{aligned}
 a &= c_1 - \frac{1}{3} \lambda^2 c_{-1} + \lambda^4 \left[\frac{1}{15} c_{-3} + \frac{1}{45} \frac{c_{-1}^2}{c_1} \right] + \lambda^6 \left[-\frac{2}{189} c_{-5} - \frac{1}{135} \frac{c_1 \bar{c}_{-1}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{62}{945} \frac{c_{-2}^2}{c_1} - \frac{47}{945} \frac{c_{-1} c_{-3}}{c_1} - \frac{2}{945} \frac{c_{-1}^3}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-1} &= c_{-1} + \lambda^4 \left[\frac{1}{45} \frac{c_1 \bar{c}_{-1}}{c_1} - \frac{2}{15} \frac{c_{-2}^2}{c_1} + \frac{1}{15} \frac{c_{-1} c_{-3}}{c_1} \right] + \lambda^6 \left[-\frac{4}{189} \frac{c_1 \bar{c}_{-3}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16}{189} \frac{c_{-2} c_{-4}}{c_1} - \frac{4}{63} \frac{c_{-3}^2}{c_1} - \frac{2}{189} \frac{c_{-1} c_{-5}}{c_1} - \frac{2}{945} \frac{c_1 \bar{c}_{-1}^2}{c_1^2} + \frac{4}{315} \frac{c_{-1} c_{-2}^2}{c_1^2} - \frac{2}{315} \frac{c_{-1}^2 c_{-3}}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-2} &= c_{-2} + \lambda^4 \left[\frac{1}{15} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-2}}{c_1} - \frac{1}{5} \frac{c_{-2} c_{-3}}{c_1} + \frac{4}{45} \frac{c_{-1} c_{-4}}{c_1} \right] + \lambda^6 \left[\frac{2}{189} \frac{c_1 \bar{c}_{-2}}{c_1} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{4}{189} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-4}}{c_1} - \frac{4}{189} \frac{c_{-3} c_{-4}}{c_1} + \frac{10}{189} \frac{c_{-2} c_{-5}}{c_1} - \frac{2}{315} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-1} \bar{c}_{-2}}{c_1^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{105} \frac{c_{-1} c_{-2} c_{-3}}{c_1^2} - \frac{8}{945} \frac{c_{-1}^2 c_{-4}}{c_1^2} \right] + \dots \tag{3.15} \\
 a_{-3} &= c_{-3} + \lambda^4 \left[-\frac{1}{45} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-1}}{c_1} + \frac{2}{15} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-3}}{c_1} - \frac{4}{15} \frac{c_{-2} c_{-4}}{c_1} + \frac{1}{9} \frac{c_{-1} c_{-5}}{c_1} \right] + \\
 &\quad + \lambda^6 \left[-\frac{2}{945} \frac{c_1 \bar{c}_{-1}}{c_1} + \frac{4}{189} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-3}}{c_1} - \frac{8}{189} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-4}}{c_1} + \frac{16}{189} \frac{c_{-4}^2}{c_1} - \frac{20}{189} \frac{c_{-3} c_{-5}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{945} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-1}^2}{c_1^2} - \frac{4}{315} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-1} \bar{c}_{-3}}{c_1^2} + \frac{8}{315} \frac{c_{-1} c_{-2} c_{-4}}{c_1^2} - \frac{2}{189} \frac{c_{-1}^2 c_{-5}}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-4} &= c_{-4} + \lambda^4 \left[-\frac{2}{45} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-1}}{c_1} + \frac{1}{5} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-2}}{c_1} - \frac{1}{3} \frac{c_{-2} c_{-5}}{c_1} \right] + \lambda^6 \left[-\frac{2}{189} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-2}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8}{189} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-3}}{c_1} - \frac{4}{63} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-4}}{c_1} + \frac{20}{189} \frac{c_{-4} c_{-5}}{c_1} + \frac{4}{945} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-1}^2}{c_1^2} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2}{105} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-1} \bar{c}_{-2}}{c_1^2} + \frac{2}{63} \frac{c_{-1} c_{-2} c_{-5}}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-5} &= c_{-5} + \lambda^4 \left[-\frac{1}{15} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-1}}{c_1} + \frac{4}{15} \frac{c_{-4} \bar{c}_{-2}}{c_1} \right] + \lambda^6 \left[\frac{2}{945} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-1}}{c_1} - \frac{4}{189} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-2}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{63} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-3}}{c_1} - \frac{16}{189} \frac{c_{-4} \bar{c}_{-4}}{c_1} + \frac{2}{315} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-1}^2}{c_1^2} - \frac{8}{315} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-1} \bar{c}_{-3}}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-6} &= \lambda^4 \left[-\frac{4}{45} \frac{c_{-4} \bar{c}_{-1}}{c_1} + \frac{1}{3} \frac{c_{-5} \bar{c}_{-2}}{c_1} \right] + \lambda^6 \left[\frac{4}{945} \frac{c_{-2} \bar{c}_{-1}}{c_1} - \frac{2}{63} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-2}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16}{189} \frac{c_{-4} \bar{c}_{-3}}{c_1} - \frac{20}{189} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-4}}{c_1} + \frac{8}{945} \frac{c_{-4} \bar{c}_{-1}^2}{c_1^2} - \frac{2}{63} \frac{c_{-5} \bar{c}_{-1} \bar{c}_{-2}}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-7} &= -\frac{1}{9} \lambda^4 \frac{c_{-5} \bar{c}_{-1}}{c_1} + \lambda^6 \left[\frac{2}{315} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-1}}{c_1} - \frac{8}{189} \frac{c_{-4} \bar{c}_{-2}}{c_1} + \frac{20}{189} \frac{c_{-5} \bar{c}_{-3}}{c_1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{189} \frac{c_{-5} \bar{c}_{-1}^2}{c_1^2} \right] + \dots \\
 a_{-8} &= \lambda^6 \left[\frac{8}{945} \frac{c_{-1} \bar{c}_{-1}}{c_1} - \frac{10}{189} \frac{c_{-3} \bar{c}_{-2}}{c_1} \right] + \dots, \quad a_{-9} = \frac{2}{189} \lambda^6 \frac{c_{-5} \bar{c}_{-1}}{c_1} + \dots
 \end{aligned}$$

Коэффициентами при $\lambda = \pi/t$ служат ряды, составленные из коэффициентов ряда Лорана.

В формулах (3.15) учтены члены, содержащие λ не выше чем в шестой степени, а ряды при λ^n содержат первые шесть коэффициентов ряда Лорана. Выбранная точность достаточна для исследования густых решеток; кроме того, при исследовании потока вне контура L сходимость ряда Лорана и ряда (1.6) лучше, чем на контуре. Для определения скоростей и давлений на контуре L в решетке достаточно подсчитать только первый коэффициент a .

Очевидно, что между шагами решетки кругов и решетки профилей существует зависимость

$$iat = t_1 e^{i\beta}, \quad \text{или} \quad ia\lambda_1 = \lambda e^{i\beta} \quad (3.16)$$

Здесь β — угол между осью решетки лопаток и осью ξ . Подставляя в (3.16) вместо a его выражение из (3.15), получаем уравнение с неизвестным λ :

$$ie^{-i\beta} \lambda_1 \left[c_1 - \frac{1}{3} \lambda^2 c_{-1} + \lambda^4 \left(\frac{1}{15} c_{-1} + \frac{1}{45} \frac{c_{-1}^2}{c_1} \right) + \right. \\ \left. + \lambda^6 \left(-\frac{2}{189} c_{-5} - \frac{1}{135} \frac{c_1 \bar{c}_{-1}}{c_1} + \frac{62}{945} \frac{c_{-2}^2}{c_1} - \frac{47}{945} \frac{c_{-1} c_{-3}}{c_1} - \frac{2}{945} \frac{c_{-1}^3}{c_1^2} \right) \right] = \lambda \quad (3.17)$$

Следует помнить, что параметр λ является действительным числом. Это всегда может быть достигнуто поворотом изолированного круга.

Пусть даны коэффициенты ряда Лорана, преобразующего внешность изолированного круга на внешность изолированного контура L

$$\zeta_1 = c_1 z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z_1^n} \quad (3.18)$$

Если повернуть изолированную окружность на угол α , форма и положение профиля L не изменятся:

$$\zeta_1 = e^{-i\alpha} z_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\alpha} c_{-n}}{z_1^n} \quad (3.19)$$

Угол поворота α следует выбрать таким образом, чтобы параметр λ в (3.17) был действительным числом.

Укажем простой способ решения уравнения (3.17).

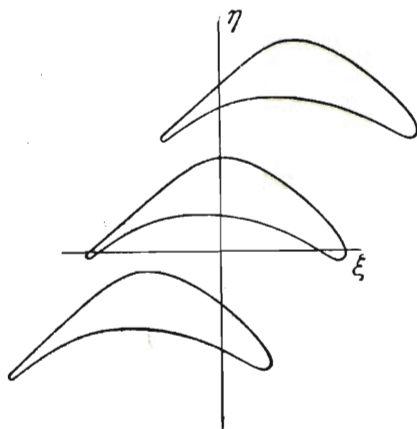
В первом приближении рассмотрим вместо уравнения (3.17) квадратное уравнение и учтем условие (3.19):

$$ie^{-i\beta} \lambda_1 \left(c_1 - \frac{1}{3} \lambda^2 e^{2i\alpha} c_{-1} \right) = \lambda e^{i\alpha} \quad (3.20)$$

Решаем это уравнение относительно комплексного неизвестного $\lambda e^{i\alpha}$. Полученное значение корня λ_I и α_I будет первым приближением к искомому корню уравнения (3.17). Подсчитываем откинутые члены с λ^4 и λ^6 и опять приходим к уравнению типа (3.20) только с измененным свободным членом. Далее таким же путем находим второе приближение λ_{II} и α_{II} . Для практических целей достаточно пользоваться

для a выражением, приведенным в (3.15), и для $\Delta\varphi$ учитывать члены, содержащие λ не выше шестой степени. При решении задачи о влиянии шага решетки и угла установки профиля на гидродинамические характеристики профиля в решетке приходится заново определять лишь λ и $\Delta\varphi$. Построение ряда Лорана необходимо проделать один раз.

§ 4. Пример. Для иллюстрации предлагаемого метода проведем расчет потенциального обтекания решетки направляющих лопаток паровой турбины. Найдем распределение скоростей и давлений по профилю в решетке (фиг. 3).



Фиг. 3

Вычисления (здесь опущенные) дают коэффициенты ряда Лорана, в который приближенно разлагается искомая функция, отображающая внешность единичного круга на внешность профиля

$$\begin{aligned} c_0 &= 0.1258 + 0.5776 i, \\ c_1 &= 1.2800, \\ c_{-1} &= 0.7212, \\ c_{-2} &= -0.0617 - 0.4366 i \\ c_{-3} &= -0.1015 + 0.0561 i \\ c_{-4} &= 0.0157 + 0.0695 i \quad (4.1) \\ c_{-5} &= 0.0336 - 0.0280 i \end{aligned}$$

Эти коэффициенты увеличены в 4.2 раза, что связано с выбором масштаба промежуточных преобразований.

Итак, ряд

$$\zeta_1 = c_0 + c_1 z_1 + \sum_{n=1}^5 \frac{c_{-n}}{z_1^n} \quad (4.2)$$

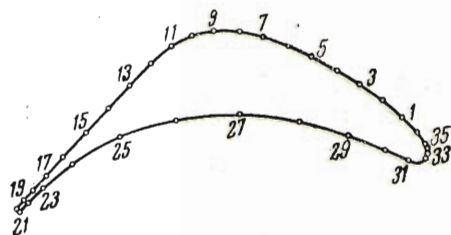
преобразует внешность изолированной окружности на внешность изолированного профиля, расположенного в плоскости $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$.

Соответствие между точками окружности и профиля устанавливается сопряженными тригонометрическими рядами (расположение точек на профиле показано на фиг. 4 точки на окружности взяты через 10°)

$$\begin{aligned} 4.2 \xi_1 &= 2.0012 \cos \theta - 0.0617 \cos 2\theta - 0.4366 \sin 2\theta - 0.1015 \cos 3\theta + \\ &+ 0.0561 \sin 3\theta + 0.0157 \cos 4\theta + 0.0695 \sin 4\theta + 0.0336 \cos 5\theta - \\ &- 0.0280 \sin 5\theta + 0.1258 \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} 4.2 \eta_1 &= 0.5588 \sin \theta - 0.4366 \cos 2\theta + 0.0617 \sin 2\theta + 0.0561 \cos 3\theta + \\ &+ 0.1015 \sin 3\theta + 0.0695 \cos 4\theta - 0.0157 \sin 4\theta - 0.0280 \cos 5\theta - \\ &- 0.0336 \sin 5\theta + 0.5776 \end{aligned}$$

Здесь θ — полярный угол в плоскости изолированного круга.

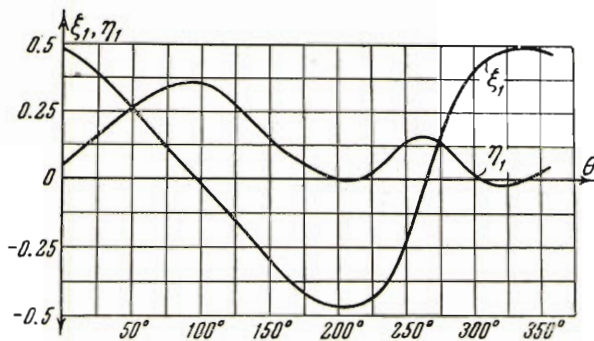


Фиг. 4

По уравнениям (4.3) построены графики функций $\xi_1(\theta)$ и $\eta_1(\theta)$ (фиг. 5). Модуль производной отображающей функции на окружности равен

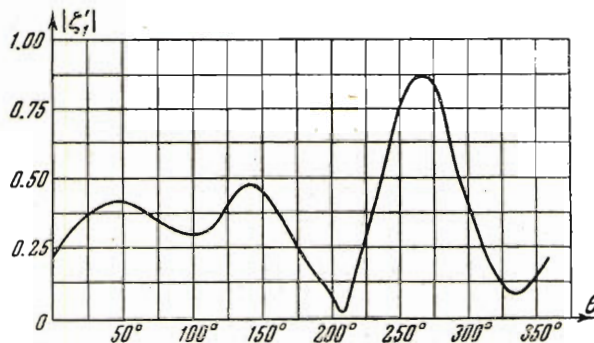
$$\left| \frac{d\zeta_1}{d\theta} \right| = \sqrt{\left(\frac{d\xi_1}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\theta} \right)^2} \quad (4.4)$$

и определяется из (4.3). Зависимость $|\zeta_1'| = |d\zeta_1/d\theta|$ от θ дана на фиг. 6.



Фиг. 5

нахождением этих функций задача обтекания единичного профиля L , представленного на фиг. 4, как известно, может считаться решенной.



Фиг. 6

Имея решение этой задачи, перейдем к построению решения задачи обтекания решетки, составленной из данных профилей.

Прежде всего определим шаг решетки кругов t (или параметр $\lambda = \pi/t$), на внешность которой отображается внешность заданной решетки. Шаг решетки лопаток известен (фиг. 3) и в том масштабе, в котором ведется расчет, равен: $t = 0.520$.

Угол установки профиля в решетке, измеренный от положения изолированного профиля, равен $33^\circ 40'$; следовательно, угол, составляемый осью решетки и осью ξ , равен: $\beta = 56^\circ 20'$.

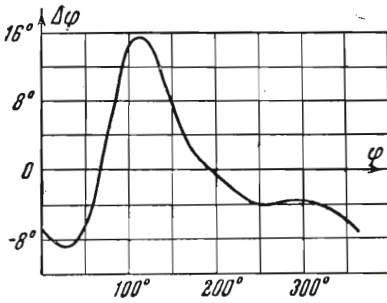
Решая уравнение (3.17) при данных λ_1 и β методом последовательных приближений, находим $\lambda = 1.335$, $\alpha = 17^\circ 40'$.

В связи с поворотом изолированного круга на $\alpha = 17^\circ 40'$ коэффициенты c_1 и c_{-n} следует умножить на $e^{-i\alpha}$ и $e^{in\alpha}$. Приведем новые значения коэффициентов:

	c_1	c_{-1}	c_{-2}	c_{-3}	c_{-4}	c_{-5}
$4.2 c $	1.280	0.7212	0.4410	0.1160	0.0712	0.0437
$\arg c$	$-17^\circ 40'$	$17^\circ 40'$	$-62^\circ 40'$	204°	147°	$48^\circ 30'$

Имея эти коэффициенты, можно определить функцию смещения, связывающую полярные углы θ и φ . Будем вести расчет с точностью до членов, содержащих λ в степени не выше шестой. По данным c_1, c_{-n} , λ с помощью (3.14) находим коэффициенты при различных степенях $e^{in\varphi}$:

$$\begin{aligned} & -0.0524 - 0.0515i \quad \text{при } e^{i\varphi} \\ & -0.0267 + 0.0396i \quad \text{при } e^{2i\varphi} \\ & +0.0147 + 0.0147i \quad \text{при } e^{3i\varphi} \\ & +0.00393 + 0.00555i \quad \text{при } e^{4i\varphi} \end{aligned}$$



Фиг. 7

Используя формулу Эйлера, представим функцию смещения следующим тригонометрическим рядом:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = & -0.1048 \cos \varphi + 0.1030 \sin \varphi - 0.0534 \cos 2\varphi - 0.0792 \sin 2\varphi + \\ & + 0.0294 \cos 3\varphi - 0.0294 \sin 3\varphi + 0.00786 \cos 4\varphi + 0.0111 \sin 4\varphi \quad (4.5) \end{aligned}$$

Здесь φ является полярным углом в плоскости решетки кругов. График функции $\Delta\varphi$ дан на фиг. 7. Для столь густой решетки максимальное смещение достигает значительной величины: $\Delta\varphi_{\max} = 15.6^\circ$.

Учитывая функцию смещения (4.5) и поворот изолированного круга на $17^\circ 40' \approx 17.7^\circ$, получим зависимость

$$\begin{aligned} \theta = \varphi - 17.7^\circ + \frac{180}{\pi} & (-0.1048 \cos \varphi + 0.1030 \sin \varphi - 0.0534 \cos 2\varphi - \\ & - 0.0792 \sin 2\varphi + 0.0294 \cos 3\varphi - 0.0294 \sin 3\varphi + \\ & + 0.00786 \cos 4\varphi + 0.0111 \sin 4\varphi) \quad (4.6) \end{aligned}$$

Тригонометрические ряды (4.3) и (4.6) устанавливают соответствие между точками основной окружности решетки кругов и точками профиля L в решетке. Каждому φ соответствует определенное θ и по графику (фиг. 5) определенное значение ξ и η — координат профиля в решетке.

Значение модуля производной $|d\zeta/d\varphi|$ на основной окружности решетки кругов определяется равенством

$$\left| \frac{d\zeta}{d\varphi} \right| = \left| \frac{d\zeta}{d\theta} \right| \frac{d\theta}{d\varphi} \quad (4.7)$$

Найдем распределение скоростей на окружностях в решетке. Эта задача решена в § 2, там же рассмотрен аналогичный числовой пример.

Решаем уравнения (2.5), (2.8) и 2.12) при значении параметра $\lambda = 1.335$.

Приведем выражения для модуля скорости на окружности.

а) Поперечное обтекание:

$$|w| = u_0(5.180 \sin \varphi - 1.260 \sin 3\varphi + 0.4240 \sin 5\varphi - 0.0795 \sin 7\varphi) \quad (4.8)$$

б) Продольное обтекание:

$$|w| = v_0(1.2660 \cos \varphi + 0.2382 \cos 3\varphi - 0.0563 \cos 5\varphi) \quad (4.9)$$

в) Циркуляционное обтекание:

$$|w| = \frac{\Gamma}{2\pi}(1 + 0.976 \cos 2\varphi - 0.021 \cos 4\varphi) \quad (4.10)$$

Полная скорость на окружности равна сумме скоростей всех трех потоков.

Определим теперь u_0 , v_0 и Γ из условий, что известна скорость на бесконечности перед решеткой профилей, а также известна точка сбega потока с задней кромки профиля.

Примем, что относительная скорость на бесконечности перед решеткой перпендикулярна оси решетки: $|W|_{+\infty} = 1$, $\arg W_{+\infty} = 146^\circ 20'$,

Значение производной отображающей функции в бесконечности подсчитано при определении λ , причем $|a| = 0.223$, $\arg a = -33^\circ 40'$.

По этим данным может быть найдена скорость в бесконечности перед решеткой кругов: $w_{+\infty} = \bar{a}W_{+\infty} = -0.223$,

Так как профиль не имеет острой кромки, то полагаем, что сбег потока происходит в точке, для которой модуль производной отображающей функции имеет минимум. По графику (фиг. 6) этой точке на изолированной окружности отвечает точка $\theta_0 = 206.7^\circ$. По соответствию между θ и φ находим, что на основной окружности решетки кругов точка сбega определяется $\varphi_0 = 227.3^\circ$.

Для определения u_0 , v_0 и Γ составим два уравнения.

1. Условие равенства нулю скорости в точке φ_0 :

$$2.718 u_0 - 0.774 v_0 - 0.942 \frac{\Gamma}{2\pi} = 0 \quad (4.11)$$

Здесь численные коэффициенты перед неизвестными получены из выражений (4.8), (4.9) и (4.10) при подстановке в них $\varphi = \varphi_0 = 227.3^\circ$.

2. Условие $w_\infty = -0.223$ перед решеткой кругов:

$$u_0 + i v_0 + 1.335 \frac{\Gamma}{2\pi i} = -0.223 \quad (4.12)$$

Из (4.11) и (4.12) получаем

$$|u_0| = 0.223, \quad |v_0| = 0.410, \quad \frac{|\Gamma|}{2\pi} = 0.307 \quad (4.13)$$

Подставим эти значения в (4.8), (4.9) и (4.10); вычисления значений составляющих полной скорости для первой четверти окружности дают:

φ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
$ w _u$	0	0.161	0.234	0.353	0.485	0.660	0.905	1.195	1.465	1.550
$ w _v$	0.594	0.582	0.540	0.469	0.381	0.258	0.150	0.070	0.024	0
$ w _\Gamma$	0.600	0.585	0.536	0.460	0.366	0.265	0.160	0.076	0.020	0.001

Учитывая направление составляющих скорости, легко получить значение скорости в любой точке окружности.

Значения модуля скорости на профиле подсчитываются по формуле

$$|W| = \frac{|w|}{|d\xi_i d\varphi|} \quad (4.14)$$

Из уравнения Бернулли для несжимаемой жидкости имеем

$$P = \frac{\rho}{2} (|W|_{-\infty}^2 - |W|^2) + P_{-\infty}$$

Будем рассматривать относительное давление на профиле:

$$P^0 = \frac{2(P - P_{-\infty})}{\rho |W|_{-\infty}^2} = 1 - \frac{|W|^2}{|W|_{-\infty}^2} \quad (4.15)$$

Скорость на профиле W берется по (4.14). Для того чтобы воспользоваться этой формулой, необходимо прежде

определить скорости в бесконечности за решеткой профилей:

$$|W|_{-\infty} = \frac{|w|_{-\infty}}{|a|} = 3.800$$

На основании этих данных построен график P^0 (фиг. 8), где по оси абсцисс развернут профиль, причем точка нулевой скорости на носике профиля совпадает с началом координат.

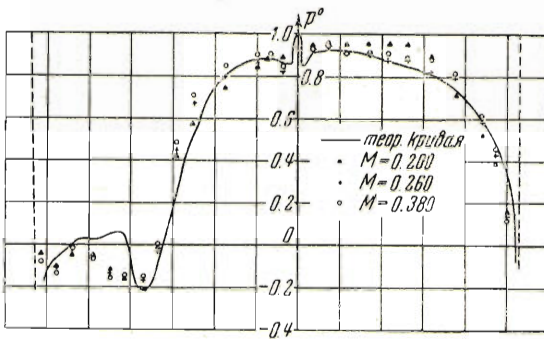
На фиг. 8 нанесены экспериментальные точки, полученные при продувке плоского пакета, направляющих лопаток в аэродинамической установке при различных значениях числа Маха M .

Поступила в редакцию
13 II 1949

Московский Энергетический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. Собрание сочинений. Т. II. Стр. 191. Изд. АН СССР. 1933.
2. Кочин Н. Е. Влияние шага решетки на ее гидродинамические характеристики. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 2.
3. Кочин Н. Е. Определение гидродинамических характеристик решеток большого шага. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 1.
4. Симонов Л. А. Построение профилей по годографу скоростей. ПММ. 1941. Т. V. Вып. 2.
5. Блох Э. Л. Исследование плоской решетки, составленной из теоретических профилей конечной толщины. Изд. ЦАГИ. 1947.
6. Traupel W. Calculation of Potential Flow through Blade Grids. Technical Review. 1945. N 1.
7. Степанов Г. Ю. Гидродинамические исследования турбинных решеток. Обзорный бюллетень авиамоторостроения. 1949. № 4, 5.
8. Канторович Л. В., Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ. 1936.



Фиг. 8