Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦА ПРИ КРУЧЕНИИ

Э. И. Григолюк

(Москва)

В заметке рассматривается задача о критических значениях крутящих моментов, приложенных на контурах тонкой упругой кольцевой пластины. Для ряда отношений внутреннего и наружного радиусов пластины, защемленной по контурам, получены наименьшие критические значения этих моментов. Результаты этих значений приближенные, так как основаны на применении метода Галеркина к решению основного уравнения устойчивости пластины. В двух частных случаях приводятся сопоставление приближенного решения с результатом, полученным путем точного решения основного уравнения устойчивости пластины[1].

1. Ниже исследуется устойчивость плоской формы равновесия тонкой круглой пластины при кручении ее в плоскости моментами M, действующими на контурах.

Если ограничиться случаем малых упругих деформаций и оставить в стороне вопрос о поведении пластины после потери устойчивости, то для решения задачи можно использовать сен-венанову теорию тонких пластин, в которой пренебрегается влиянием прогиба на величину внутренних усилий в плоскости пластины, но вместе с тем учитывается влияние этих сил на величину прогиба.

Основное уравнение устойчивости тонкой упругой пластины после приведения к полярным координатам имеет вид[2]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right]-$$
$$-\frac{\delta}{D}\left[\sigma_{rr}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\sigma_{\theta\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)+2\tau_{\theta r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial\theta}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\right]=0 \qquad (1.1)$$

Здесь $w=w(r,\theta)$ — прогиб точки срединной поверхности пластины с координатами r и θ; σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$ — соответственно радиальное и кольцевое нормальные напряжения; $\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}$ — касательные напряжения на радиальных и кольцевых площадках; $D=E\delta^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость пластины; δ — толщина стенки пластины; E — модуль упругости первого рода; μ — коэффициент Пуассона.

Напряжения σ_{rr}, $\sigma_{\theta\theta}$, $\tau_{\theta r}=\tau_{r\theta}$ находятся из решения плоской задачи теории упругости [3]. Они выражаются через функцию напряжений F

$$\sigma_{rr}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E}{\partial\theta^2}, \qquad \sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$$
$$\tau_{r\theta}=\tau_{\theta r}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\theta}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\theta} \qquad (1.2)$$

удовлетворяющую бигармоническому уравнению

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\left[\frac{\partial^2 E}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\theta^2}\right]=0 \qquad (1.3)$$

При кручении пластины функция напряжений F зависит только от угла θ. При этом она пропорциональна величине этого угла, т. е.

$$F = H\theta$$

Тогда из (1.2) имеем

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = 0, \qquad \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \frac{H}{r^2} \tag{1.4}$$

Постоянная H находится из статического условия

$$M - \int_0^{2\pi} \delta \tau_{r\theta} r^2 d\theta = 0$$

Таким образом получим

$$H = \frac{M}{2\pi\delta}, \qquad \tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \frac{M}{2\pi\delta r^2} \tag{1.5}$$

С учетом зависимостей (1.4), (1.5) основное уравнение задачи (1.1) будет

$$\varphi(\rho, \theta) = \frac{\partial^4 w}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho^3} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2} \cdot \frac{1}{\rho^3}\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial^4 w}{\partial \rho^2 \partial \theta^2} -$$
$$- \frac{2}{\rho^3}\frac{\partial^3 w}{\partial \rho \partial \theta^2} + \frac{4}{\rho^4}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho^4}\frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} - k\left(\frac{1}{\rho^3}\frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \theta} - \frac{1}{\rho^4}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) = 0 \tag{1.6}$$

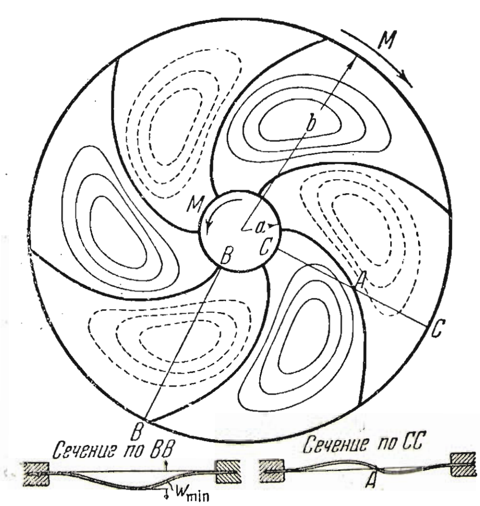
где

$$\rho = \frac{r}{b}, \qquad k = \frac{M}{\pi D} \tag{1.7}$$

причем b — наружный радиус пластины.

Решение уравнения (1.6) даст значения коэффициента момента k, т. е. критические значения крутящего момента на контурах.

Решение уравнения (1.6) известно. Оно, в частности, имеется в статье П. А. Соколова [1], посвященной точному решению рассматриваемой задачи. Там указан путь общего решения задачи о плоской форме равновесия кольца при кручении при произвольных граничных условиях на контурах, однако количественная сторона задачи осталась невыясненной. Последнее устанавливается в настоящей статье для одного частного случая граничных условий.



Фиг. 1

Касательное напряжение в момент потери устойчивости равно:

$$\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta} = \varkappa E\left(\frac{\delta}{r}\right)^2 \tag{1.8}$$

$$\left(\varkappa = \frac{k}{24(1-\mu^2)}\right)$$

2. Приведем решение уравнения (1.6) для случая кольцевой пластины с защемленными краями (фиг. 1), когда

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = \frac{a}{b} = l \\ w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = 1 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Точное решение этой задачи, как известно, имеет следующий вид:

$$w = \psi(r)\cos m\theta + \lambda(r)\sin m\theta \tag{2.2}$$

где m — число поперечных волн при выпучивании пластины.

Отказываясь от точного метода, применим метод Галеркина[4,5] к решению уравнения (1.6).

Исходя из условий деформации пластины при выпучивании ее, задаемся следующим выражением прогибов:

$$w = C(1-\rho^2)^2(\rho^2 - l^2)^2\cos[m\theta + n(\rho - l)] \tag{2.3}$$

Здесь C — постоянная, n — параметр, определяющий характер кривой нулевого прогиба.

Легко видеть, что выражение (2.3) удовлетворяет граничным условиям (2.1).

Решая уравнение (1.6) по методу Галеркина, получим

$$\int_0^{2\pi}\int_l^1 \varphi(\rho,\theta)(1-\rho^2)^2(\rho^2-l^2)^2\cos[m\theta + n(\rho-l)]\,d\rho\,d\theta = 0$$

Отсюда

$$k = k(m, n, l) \tag{2.4}$$

Выражение $k(m, n, l)$ очень громоздко. Мы не приводим его.

Коэффициент момента k для данного отношения радиусов пластины зависит от параметров m и n. Величину n для данного l подбираем из условия, чтобы критический момент на контуре имел минимальное значение:

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial^2 k}{\partial n^2} > 0$$

Приводим наименьшие значения коэффициента момента k и соответствующие ему значения числа волн, а также значения $\varkappa$ при $\mu = 1/3$:

$l =$	0	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$m =$	1	1	2	3	4	5	6
$k =$	0	22.8	39.2	78.4	126	220	350
$\varkappa =$	0	1.07	1.84	3.67	5.90	10.3	16.4

Форма выпученной срединной поверхности пластины представлена на фиг. 1 (при $m = 3$).

Для случаев $l = 0.1$ методом, указанным в статье[1], можно найти $k = 35.0$ ($m = 2$), а при $l = 0.2$ — $k = 72.3$ ($m = 3$). Тогда ошибки приближенных решений соответственно составляют 12% и 7,2%. Число волн выпученной поверхности в обоих решениях совпало.

Поступила в редакцию
30 XI 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов П. А. Устойчивость плоского кругового кольца, нагруженного по краям касательными усилиями. ПММ. 1939. Т. III. Вып. 1. Стр. 31—38.
2. Папкович П. Ф. Строительная механика корабля, ч. II. Судпромгиз. 1941.
3. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.
4. Григолюк Э. И. Устойчивость круглых кольцевых пластин. Инженерный сборник АН СССР. 1949. Т. V. Вып. 2. Стр. 83—95.
5. Тезисы докладов научно-технической конференции МВТУ им. Н. Э. Баумана. Январь 1949.