Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ЗАМЕТКИ

ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОСЛЕКРИТИЧЕСКОЙ СТАДИИ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. А. Алумяэ
(Таллин)

Обобщение принципа Кастильяно на малую пластическую деформацию, а также на конечную упругую и пластическую деформацию было уже предметом многочисленных исследований, из которых упомянем работы Качанова [1], Лурье [2], Рейснера [3], Филлипса [4]. В данной заметке дадим специальную форму обобщенного вариационного принципа Кастильяно применительно к состоянию равновесия тонкостепнных упругих оболочек в послекритической стадии.

1. Основные положения. Пусть будет $T_{(c)}{}^{ij}$ критическое значение тензора тангенциальных сил безмоментного начального напряженного состояния, $T_{(c)}{}^{ij} + t^{ij}$ — тензор тангенциальных сил начального напряженного состояния при параметре нагрузки, отличном от критического и притом так, что, кроме безмоментного состояния равновесия $T_{(c)}{}^{ij} + t^{ij}$, существует еще по крайней мере одно состояние равновесия, характеризуемое тензором тангенциальных сил $T_{(c)}{}^{ij} + t^{ij} + S^{ij}$, тензором моментов M^{ij}. Деформацию срединной поверхности при переходе от состояния $T_{(c)}{}^{ij} + t^{ij}$ в состояние $T_{(c)}{}^{ij} + t^{ij} + S^{ij}$ опишем вектором перемещения $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}$ и тензорами деформации ε_{ij}, μ_{ij}. Как обычно, коэффициенты первой и второй квадратичных форм срединной поверхности, которые предполагаются отнесенными к состоянию $T_{(c)}{}^{ij}$, обозначим через a_{ij}, b_{ij}, а компоненты дискриминантного тензора первой квадратичной формы через c_{ij}.

Предположим, что начальное напряженное состояние T^{ij} и краевые условия таковы, что поле перемещений $\boldsymbol{v}_i$, $\boldsymbol{v}$ принадлежит к типу «местной потери устойчивости». Дальше, пусть приведенная к срединной поверхности внешняя нагрузка имеет гидростатический характер, т. е. остается и после выпучивания стенки нормальной к стенке, не изменяя своей величины. При исследовании послекритической стадии тонкостенных оболочек эти предположения позволяют считать законными следующие упрощенные зависимости [5, 6, 7]:

$$2\varepsilon_{ij} = \nabla_i v_j + \nabla_j v_i - 2b_{ij}v + \nabla_i v \nabla_j v, \qquad \mu_{ij} = -\nabla_i \nabla_j v \tag{1.1}$$

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i} = 0, \qquad c_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.2}$$

$$S^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta} + (T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \nabla_\beta v + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} = 0 \tag{1.3}$$

$$c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} (2b_{\alpha\beta} \nabla_\gamma \nabla_\rho v + \nabla_\alpha \nabla_\beta v \nabla_\gamma \nabla_\rho v + 2\nabla_\gamma \nabla_\rho \varepsilon_{\alpha\beta}) = 0 \tag{1.4}$$

причем

$$\varepsilon_{ij} = B' P_{ij\alpha\beta} S^{\alpha\beta}, \qquad \mu_{ij} = D' P_{ij\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

где

$$B' = \frac{1}{Et}, \qquad D' = \frac{12}{Et^3}, \qquad P_{ijmn} = a_{im} a_{jn} - \nu c_{im} c_{jn} \tag{1.6}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — толщина оболочки

Допустим еще, что на каждом участке контура срединной поверхности в силу краевых условий имеем

$$(T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta})\, v \nabla_\beta v c_{\alpha\sigma} dx^\sigma = 0 \tag{1.7}$$

2. Обобщенный принцип Кастильяно. Образуем теперь функционал

$$R = \frac{1}{2} \iint_G \{(T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha v \nabla_\beta v + + P_{\alpha\beta\gamma\rho} (B' S^{\alpha\beta} S^{\gamma\rho} + D' M^{\alpha\beta} M^{\gamma\rho})\} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \tag{2.1}$$

где G — область интегрирования — распространяется на всю срединную поверхность оболочки, и рассмотрим вариацию этого функционала путем вариации S^{ij}, M^{ij}, $\boldsymbol{v}$. Легко найти, что

$$\delta R = \iint_G \left\{ (T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha v \nabla_\beta \delta v + \frac{1}{2} \nabla_\alpha v \nabla_\beta v \delta S^{\alpha\beta} + + \varepsilon_{\alpha\beta} \delta S^{\alpha\beta} + \mu_{\alpha\beta} \delta M^{\alpha\beta} \right\} \sqrt{a}\, dx^1\, dx^2 \tag{2.2}$$

Допуская в функционале R в сравнение лишь статически возможные вариации δS^{ij}, δM^{ij}, $\delta \boldsymbol{v}$, т. е. которые удовлетворяют, как показывают условия равновесия (1.2), (1.3), уравнениям

$$\nabla_\alpha \delta S^{\alpha i} = 0, \quad c_{\alpha\beta} \delta S^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.3}$$

$$(b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta v) \delta S^{\alpha\beta} + (T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta v + \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta M^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.4}$$

и однородным статическим граничным условиям, можем убедиться, что R принимает стационарное значение

$$\delta R = 0 \tag{2.5}$$

если соответствующая статически возможной совокупности деформация будет непрерывна. Так как мы это и должны требовать от статически возможной совокупности S^{ij}, M^{ij}, $\boldsymbol{v}$, то условие (2.5) является критерием состояния равновесия.

В самом деле, выражая ε_{ij}, μ_{ij} через $\boldsymbol{v}_i$, v по (1.1), имеем

$$\begin{aligned} \delta R = \oint \{T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta})\, v \nabla_\beta \delta v + v \nabla_\beta v \delta S^{\alpha\beta} + v_\beta \delta S^{\alpha\beta} - \\ - \nabla_\beta v \delta M^{\beta\alpha} + v \nabla_\beta \delta M^{\alpha\beta}\} c_{\alpha\sigma} dx^\sigma - \\ - \iint \{v [(T_{(c)}{}^{\alpha\beta} + t^{\alpha\beta} + S^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta v + (b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta v) \delta S^{\alpha\beta} + \\ + \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta M^{\alpha\beta}] + v_\beta \nabla_\alpha \delta S^{\alpha\beta}\} \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

потому что контурный интеграл (или же контурные интегралы) исчезает ввиду краевых условий, двойной интеграл — по условиям (2.3), (2.4) относительно вариации δS^{ij}, δM^{ij}, $\delta \boldsymbol{v}$.

3. Выбор статически возможной совокупности S^{ij}, M^{ij}. Следуя примеру Гольденвейзера [8] и Лурье [9], которые ввели в линейную теорию оболочек четыре функции напряжения, можно также и в нелинейной теории оболочек выразить S^{ij}, M^{ij} через четыре функции напряжения таким образом, что однородные уравнения равновесия будут всегда тождественно удовлетворены, какие бы ни были функции напряжения. Опуская, однако, все выкладки, приводим эти соотношения в окончательном виде:

$$S^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi \tag{3.1}$$

$$M^{ij} = (c^{i\alpha} c^{j\beta} - \frac{1}{2} c^{ij} c^{\alpha\beta}) \nabla_\alpha \varphi_\beta - c^{i\alpha} c^{j\beta} (b_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta v) \varphi - (T_{(c)}{}^{ij} + t^{ij})\, v \tag{3.2}$$

Здесь φ, φ_1, φ_2 — функции напряжения; четвертая функция напряжения исключена условием $c_{\alpha\beta}M^{\alpha\beta}=0$, являющимся следствием условия стационарности R.

Подставляя S^{ij}, M^{ij} по (3.1), (3.2) в уравнения равновесия (1.2), (1.3), легко убедиться, что они удовлетворяются тождественно с точностью, присущей теории, изложенной в разделе 1. Очевидно также, что δS^{ij}, δM^{ij}, полученные путем вариации φ, φ_i, $\boldsymbol{v}$ в (3.1), (3.2), удовлетворяют условиям (2.3), (2.4).

Таким образом, статически возможные совокупности S^{ij}, M^{ij} выражаются через четыре функции φ, φ_i, $\boldsymbol{v}$, которые будут определены из условия (2.5), причем в функционале (2.1) допускаются в сравнение только функции φ, φ_i, $\boldsymbol{v}$, удовлетворяющие однородным статическим краевым условиям и условию (1.7).

Можно указать и другой вариант выбора статически возможной совокупности S^{ij}, M^{ij}. Второе из соотношений (1.1) и законы упругости (1.5) показывают, что тензор моментов M^{ij} можно искать в виде

$$M^{ij}=DE^{ij\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta w \tag{3.3}$$

где

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad E^{ijmn}=a^{im}a^{jn}+\nu c^{im}c^{jn} \tag{3.4}$$

Тангенциальные усилия S^{ij} выражаем попрежнему через φ по (3.1). Теперь в функционале R в сравнение допускаются лишь такие функции φ, v, w, которые удовлетворяют статическим краевым условиям, условию (1.7) и дифференциальному уравнению (3.5)

$$Da^{\alpha\gamma}a^{\beta\rho}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla_\gamma\nabla_\rho w=-c^{\alpha\gamma}c^{\beta\rho}(b_{\alpha\beta}+\nabla_\alpha\nabla_\beta v)\nabla_\gamma\nabla_\rho\varphi-(T_{(c)}^{\alpha\beta}+t^{\alpha\beta})\nabla_\alpha\nabla_\beta v$$

4. Определение критической нагрузки. Пусть тензор t^{ij} имеет бесконечно малое значение. По определению критической нагрузки тогда и тензоры $t^{ij}+S^{ij}$, M^{ij}, ε_{ij}, μ_{ij} и вектор $\boldsymbol{v}_i$ $\boldsymbol{v}$ имеют бескнечно малые значения. В этом случае состояние равновесия $T_{(c)}^{ij}+t^{ij}+S^{ij}$, M^{ij} обладает, как нетрудно проверить, тем свойством, что функционал

$$R_{(c)}=\frac{1}{2}\iint\limits_G\{T_{(c)}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha v\nabla_\beta v+P_{\alpha\beta\gamma\rho}(B'S^{\alpha\beta}S^{\gamma\rho}+D'M^{\alpha\beta}M^{\gamma\rho})\}\sqrt{a}\,dx^1dx^2 \tag{4.1}$$

будет стационарным, если в сравнение в функционале $R_{(c)}$ допускать только совокупности S^{ij}, M^{ij}, $\boldsymbol{v}$, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla_\alpha S^{\alpha i}=0, \qquad c_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}=0 \tag{4.2}$$

$$b_{\alpha\beta}S^{\alpha\beta}+T_{(c)}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta v+\nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\alpha\beta}=0 \tag{4.3}$$

статическим краевым условиям, а также условию

$$T_{(c)}^{\alpha\beta}v\nabla_\beta v c_{\alpha\sigma}dx^\sigma=0 \tag{4.4}$$

на каждом участке контура срединной поверхности. Кроме того, знаем [10], что

$$R_{(c)}=0 \tag{4.5}$$

Пусть будут

$$T_{(c)}^{ij}=T_{(c)}\tau^{ij}, \qquad T_{(c)}v=\psi \tag{4.6}$$

тогда S^{ij}, M^{ij}, выраженные через функции φ, φ_1, φ_2, ψ в виде

$$S^{ij}=c^{i\alpha}c^{j\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi \tag{4.7}$$

$$M^{ij}=\left(c^{i\alpha}c^{j\beta}-\frac{1}{2}c^{ij}c^{\alpha\beta}\right)\nabla_\alpha\varphi_\beta-c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta}\varphi-\tau^{ij}\psi \tag{4.8}$$

представляют собой совокупность, удовлетворяющую условиям (4.2). (4.3), каковы бы ни были φ, φ_i, ψ.

Критическое значение параметра нагрузки $T_{(c)}$ определяется по (4.5) из условия

$$-T_{(c)}=\left[\frac{\iint \tau^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\psi\nabla_\beta\psi\sqrt{a}\,dx^1dx^2}{\iint P_{\alpha\beta\gamma\rho}\left(B'S^{\alpha\beta}S^{\gamma\rho}+D'M^{\alpha\beta}M^{\gamma\rho}\right)\sqrt{a}\,dx^1dx^2}\right]_{\text{st}} \tag{4.9}$$

где S^{ij}, M^{ij} подразумеваются выраженными через φ, φ_i, ψ по (4.7), (4.8), причем в сравнение допускаются такие функции φ, φ_i, ψ, которые удовлетворяют статическим граничным условиям, а также условию (4.4).

Отметим, что при решении задачи (4.9) методом Ритца получим вместо $T_{(c)}$ приближенное значение $T_{(c)}^*$ по своему абсолютному значению или меньшее или большее, чем $|T_{(c)}|$. Хотя при фиксированном ψ значение $|T_{(c)}^*|$ увеличивается с расширением класса допустимых функций для φ, φ_i, поскольку знаменатель выражения (4.9) может иметь стационарное значение лишь при минимуме, тем не менее, как следует из физических соображений, расширение класса допустимых функций для ψ в свою очередь уменьшает $|T_{(c)}^*|$, как при методе Рэйли-Ритца.

Применяя вышеизложенные рассуждения к двум предельным случаям, приходим к следующему выводу.

Если при некоторой допустимой ψ функции напряжения φ, φ_i удовлетворяют условиям стационарности $T_{(c)}$ относительно вариации φ, φ_i, то из (4.9) получим верхнюю границу для критического значения $|T_{(c)}|$. Наоборот, если допустимые функции ψ, φ, φ_i удовлетворяют условию стационарности $T_{(c)}$ относительно вариации ψ, то получим нижнюю границу для критического значения $|T_{(c)}|$.

В случае балки, сжатой осевой силой, легко получить для определения критической силы формулы, содержащие только функцию ψ.

Пусть ось $x^1=x$ совпадает с осью балки, плоскость (x, y) — с главной плоскостью поперечного сечения, имеющей наибольшую жесткость. Тогда, очевидно, $\varphi_{x,x}=0$, а $\varphi_{y,y}$ может быть только линейной функцией относительно x:

$$\varphi_{y,y}=\alpha+\beta x \tag{4.10}$$

иначе уравнение равновесия типа (4.3) не было бы тождественно удовлетворено. Критическая сила $T_{(c)}$ определяется из условия

$$-T_{(c)}=\left[\int_0^l(\psi_{,x})^2\,dx\Big/\int_0^l D'(\alpha+\beta x-\psi)^2\,dx\right]_{\text{st}}\qquad\left(D'=\frac{1}{EI}\right) \tag{4.11}$$

где $I=I(x)$ — момент инерции поперечного сечения балки, l — длина балки.

В случае свободно опертой простой балки статические граничные условия относительно изгибающего момента $M=\varphi_{y,y}-\psi$ требуют $\alpha=0$, $\beta=0$; из (4.11) имеем

$$-T_{(c)}=\left[\int(\psi_{,x})^2\,dx\Big/\int D'\psi^2dx\right]_{\text{st}} \tag{4.12}$$

Эта формула известна; более того, доказано [11], что формула (4.12) дает, вообще говоря, лучшую оценку верхней границы критической силы при той же функции ψ, чем формула Рейли.

В случае жестко заделанной симметричной балки $\beta=0$, а условие стационарности $T_{(c)}$ относительно α требует

$$\alpha\int D'dx=\int D'\psi\,dx \tag{4.13}$$

так что

$$-T_{(c)}=\left[\frac{\int(\psi_{,x})^2\,dx\int D'dx}{\int D'\psi^2dx\int D'\,dx-\left(\int D'\psi\,dx\right)^2}\right]_{\text{st}} \tag{4.14}$$

При аппроксимации

$$\psi = A\left(1 - 8\frac{x^2}{l^2} + 16\frac{x^4}{l^4}\right), \qquad D' = \text{const}$$

формула (4.14) дает

$$-T_{(c)}{}^* D' l^2 = 40$$

формула Рэйли

$$-T_{(c)}{}^* D' l^2 = 42$$

вместо точного значения $4\pi^2$. Таким образом, и в данном случае формула Кастильяно (4.14) дала для верхней границы критической силы лучшую оценку, чем формула Рэйли.

Преобразование формулы (4.9) к видам, по содержанию аналогичным формулам (4.12), (4.14), возможно еще в случае цилиндрического выпучивания пластинок. В более общих случаях потери устойчивости пластинок и оболочек, исключение функции напряжения φ_i, φ требует для каждого частного вида ψ интегрирования подчиненной некоторым краевым условиям системы дифференциальных уравнений в частных производных, свободные члены которой содержат функцию ψ. Но вряд ли целесообразно точное решение краевой задачи, если мы после этого все равно получим приближенное значение критического параметра нагрузки $T_{(c)}{}^*$. Оно нам нужно только для утверждения, что найденное по (4.9) значение $|T_{(c)}{}^*|$ представляет собой верхнюю границу для для $|T_{(c)}|$. Однако, как правило, верхнюю границу для критической нагрузки $|T_{(c)}|$ легче всего определить методом Рэйли-Ритца. Вместе с тем здесь нельзя не отметить, что приближение к решению вышеупомянутой краевой задачи методом Ритца путем расширения класса допустимых функций для φ_i, φ нетрудно, так как оно сводится к решению неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Сравнительно легче можно из условия (4.9) получить нижнюю границу для критического значения параметра нагрузки $|T_{(c)}|$. Из физических соображений следует, что это имеет место, если допустимые функции φ, φ_i, ψ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{D'T_{(c)}}\tau^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi - P_{\alpha\beta\gamma\rho}\tau^{\alpha\beta}\tau^{\gamma\rho}\psi + \tau^{\alpha\beta}(c_\alpha{}^{\cdot\gamma}c_\beta{}^{\cdot\rho} - \nu a_\alpha{}^\gamma a_\beta{}^\rho)(\nabla_\gamma\varphi_\rho - b_{\gamma\rho}\varphi) = 0 \tag{4.15}$$

потому что теперь

$$\delta_\psi R_{(c)} = 0$$

Приводим результаты решения некоторых простых задач.

1. *Цилиндрическое выпучивание сжатой плоской пластинки* с пролетом l, *свободно опертой* при $x^1 = x = \pm l/2$. В данном случае $\varphi_{y,\,y} = 0$ и уравнение (4.15) принимает вид:

$$\frac{1}{D'T_{(c)}}\psi_{,\,xx} - \psi - \nu\varphi_{x,\,x} = 0 \tag{4.16}$$

Аппроксимируя ψ полиномом четвертой степени

$$\psi = A\left\{1 - 4\alpha\frac{x^2}{l^2} - 16(1-\alpha)\frac{x^4}{l^4}\right\} \tag{4.17}$$

где α — пока неопределенная постоянная, находим нижнюю границу нагрузки

$$T_{(c)}{}^* = -9.80\,D/l^2$$

при $\alpha = 1.207$. Точное решение имеет, как известно, коэффициентом π^2 вместо 9.80.

2. *Цилиндрическое выпучивание сжатой плоской пластинки, жестко заделанной* на контуре $x = \pm l/2$. Вид уравнения (4.15) в данном случае не отличается от (4.16). Аппроксимируя ψ также полиномом (4.17), получим в качестве нижней границы критической нагрузки слабую оценку (точное решение — $4\pi^2D/l^2$)

$$T_{(c)}{}^* = -31.6\,D/l^2 \qquad (\text{при } \alpha = 1.7)$$

3. *Выпучивание равномерно сжатой квадратной плоскости*, жестко заделанной по сторонам $x^2 = y = \pm a/2$, перпендикулярным к направлению сжатия, и свободно опертой по другим сторонам $x^1 = x = \pm x/2$. Уравнение (4.15) теперь имеет вид:

$$\frac{1}{D' T_{(c)}} \psi_{,xx} - \psi + \varphi_{y,y} - \nu \varphi_{x,x} = 0 \qquad (4.18)$$

Если аппроксимируем ψ в форме

$$\psi = A\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\frac{\pi y}{a} \qquad (4.19)$$

то получим

$$-T_{(c)}^* = 6.67\,\frac{\pi^2}{a^2} D$$

Точное решение[12] имеет вместо 6.67 коэффициентом 6.74.

4. *Сжатая в обоих направлениях одинаковыми усилиями квадратная пластинка* со сторонами a, жестко заделанная на контуре. Для нахождения нижней границы критической нагрузки должно быть удовлетворено уравнение

$$\frac{D(1+\nu)}{T_{(c)}}(\psi_{,xx} + \psi_{,yy}) - 2\psi + \varphi_{x,x} + \varphi_{y,y} = 0 \qquad (4.20)$$

Пусть будет

$$\psi = A\left(1 + \cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1 + \cos\frac{2\pi y}{a}\right) \qquad (4.21)$$

Тогда получим

$$T_{(c)}^* = -5.09\,\frac{\pi^2}{a^2} D$$

Метод Рэйли дает при (4.21)

$$T_{(c)}^* = -5.33\,\frac{\pi^2}{a^2} D$$

Поступила в редакцию
12 XII 1949

Институт механики АН СССР
Институт строительства и архитектуры
АН Эстонской ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Вариационные принципы для упруго-пластических сред. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 2—3.
2. Лурье А. И. Обобщение теоремы Кастильяно. Труды Ленинградского политехнического института. 1946. Вып. 1.
3. Reissner E. Note on the method of complementary energy. Journ. Math. Phys. 1948. Vol 27. No. 2.
4. Phillips A. Variational principles in the theory of finite plastic deformations. Quart. App. Math. 1949. Vol. VII. No. 1.
5. Муштари Х. Некоторые обобщения теории тонких оболочек. ПММ. 1939. Т. II.
6. Власов В. З. Общая теория оболочек. М. — Л. 1949.
7. Алумяэ Н. А. Дифференциальные уравнения состояний равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.
8. Гольденвейзер А. Уравнения теории тонких оболочек. ПММ. 1940. Т. IV.
9. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек. ПММ. 1940. Т. IV.
10. Алумяэ Н. А. Некоторые качественные характеристики состояния равновесия тонкостенных упругих оболочек в послекритической стадии. Исследования и обзоры АН Эстонской ССР. 1949. Вып. 2.
11. Lang H. A. Note on Rayleigh's method and the non-uniform strut. Quart. App. Math. 1948. Vol. V. No. 4.
12. Тимошенко С. П. Устойчивость упругих систем. М. — Л. 1946. Стр. 374.