

ПЛОСКОЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ РАВНОВЕСИЕ ПЛАСТИЧЕСКОЙ МАССЫ МЕЖДУ ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

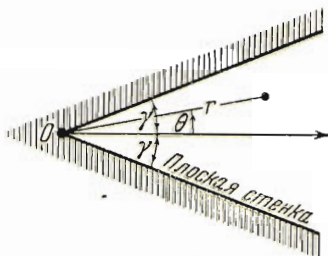
В. В. Соколовский

(Москва)

В настоящей работе рассматривается плоское равновесие пластической массы, заполняющей область между двумя плоскими стенками, и осесимметричное равновесие пластической массы, заполняющей область, ограниченную конической стенкой.

§ 1. Плоская задача о равновесии пластической массы, заполняющей область формы клина. Рассмотрим плоское равновесие пластической массы, заполняющей области формы клина, ограниченную двумя плоскими жесткими стенками; угол между плоскостями равен 2γ .

Примем цилиндрическую систему координат $r\theta z$, ось z которой направлена вдоль прямой пересечения стенок, и будем считать, что напряженное состояние не зависит от координаты z (фиг. 1).



Фиг. 1

Компоненты напряжения и деформации

$$\tau_{rz} = \tau_{\theta z} = 0, \quad \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0 \quad (1.1)$$

а остальные компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}$ и компоненты деформации $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}$ суть функции r и θ .

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид:

$$r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\tau_{r\theta} = 0 \quad (1.2)$$

Основные зависимости между компонентами напряжения и деформации в предположении о несжимаемости пластического материала

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = 0$$

берем в обычной форме:

$$\epsilon_r = \frac{E}{2S}(\sigma_r - \sigma), \quad \epsilon_\theta = \frac{E}{2S}(\sigma_\theta - \sigma), \quad \epsilon_z = \frac{E}{2S}(\sigma_z - \sigma), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{E}{S}\tau_{r\theta} \quad (1.3)$$

где $3\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$, а через S и E обозначены соответственно интенсивность напряжений и интенсивность деформаций сдвига:

$$S = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2] + \tau_{r\theta}^2}$$

$$E = \sqrt{\frac{2}{3} [(\epsilon_\theta - \epsilon_z)^2 + (\epsilon_z - \epsilon_r)^2 + (\epsilon_r - \epsilon_\theta)^2] + \gamma_{r\theta}^2} \quad (1.4)$$

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде степенной зависимости

$$S = KE^\mu \quad (1.5)$$

а условие идеальной пластичности берется в виде

$$S = k \quad (1.6)$$

где K, k, μ — константы, характеризующие механические свойства материала.

При решении поставленной плоской задачи естественно предположить, что смещение частиц будет происходить по направлениям радиусов. Поэтому будем искать точное решение задачи, принимая компоненты смещения u_r, u_θ, u_z в виде $u_r = u_r(r, \theta)$, $u_\theta = u_z = 0$.

Компоненты деформации, соответствующие этим смещениям, будут

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (1.7)$$

Отсюда следует уравнение совместности деформаций

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} = \gamma_{r\theta} \quad (1.8)$$

а зависимости (1.3) дают

$$\sigma = \sigma_z = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta), \quad \varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0 \quad (1.9)$$

Выражения (1.4) для интенсивностей напряжения S и деформации E принимают вид:

$$S = \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad E = \sqrt{4\varepsilon_r^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

Компоненты деформации можно выразить через величины E и ψ :

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{array} \right\} = \pm \frac{E}{2} \cos \psi, \quad \gamma_{r\theta} = E \sin \psi \quad (1.10)$$

Компоненты напряжения на основании (1.3) напишутся так:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{array} \right\} = \sigma \pm S \cos \psi, \quad \tau_{r\theta} = S \sin \psi \quad (1.11)$$

Условие несжимаемости пластического материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} = 0$$

показывают, что ru_r есть функция только от одной независимой переменной θ . Компонента смещения u_r , таким образом, может быть представлена в виде

$$u_r = lU_0 \frac{U(\theta)}{\rho}$$

Здесь U_0 — безразмерный параметр, который будет определен в дальнейшем, $\rho = r/l$, при этом l — какая-нибудь длина.

Компоненты деформации $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$ принимают вид:

$$\varepsilon_\theta = -\varepsilon_r = U_0 \frac{U(\theta)}{\rho^2}, \quad \gamma_{r\theta} = U_0 \frac{U'(\theta)}{\rho^2} \quad (1.12)$$

а интенсивность деформации E будет

$$E = U_0 \frac{g(\theta)}{\rho^2}, \quad g = \sqrt{4U^2 + U'^2} \quad (1.13)$$

Компоненты деформации (1.10) представляются в виде

$$\left. \begin{matrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{matrix} \right\} = \pm U_0 \frac{g}{2\rho^2} \cos \psi, \quad \gamma_{r\theta} = U_0 \frac{g}{\rho^2} \sin \psi \quad (1.14)$$

причем ψ не зависит от ρ и является функцией только θ , т. е. $\psi = \psi(\theta)$.

При условии пластичности со степенным упрочнением (1.5) интенсивность напряжения выражается так:

$$S = K t_0 \frac{t(\theta)}{\rho^{2\mu}}, \quad t = g^\mu, \quad t(0) = 1 \quad (1.15)$$

Через $K t_0$ обозначена величина S на оси симметрии в единичном ($\rho = 1$) расстоянии от начала координат.

Параметр U_0 , введенный выше, выражается через параметр t_0 при помощи равенства $t_0 = U_0^\mu$.

Компоненты напряжения, если обозначить $\sigma = K t_0 s$, будут

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = K t_0 \left(s \pm \frac{t}{\rho^{2\mu}} \cos \psi \right), \quad \tau_{r\theta} = K t_0 \frac{t}{\rho^{2\mu}} \sin \psi \quad (1.16)$$

При условии идеальной пластичности (1.6) компоненты напряжения:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right\} = k (s \pm \cos \psi), \quad \tau_{r\theta} = k \sin \psi \quad (1.17)$$

Сформируем теперь граничные условия.

Вдоль оси симметрии компоненты $\tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$; поэтому

$$\psi = 0, \quad t = 1 \quad \text{при} \quad \theta = 0 \quad (1.18)$$

Вдоль плоских стенок могут быть приняты различные виды граничных условий в зависимости от характера контакта.

При условии пластичности (1.5) будем предполагать, что на стенках имеет место прилипание, т. е. $u_r = \varepsilon_\theta = 0$. Отсюда в силу (1.14) имеем

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \theta = \gamma \quad (1.19)$$

При условии идеальной пластичности (1.6) будем считать, что на плоских стенках сила трения постоянна, т. е. $\tau_{r\theta} = k_0$. Отсюда, вводя обозначение $\eta = k_0 / k$, в силу (1.17) имеем

$$\psi = \psi_0 = \arcsin \eta \quad \text{при} \quad \theta = \gamma \quad (1.20)$$

Величина ψ в формулах (1.18) — (1.20) определена с точностью до числа, кратного 2π , не влияющего на компоненты напряжения и деформации.

§ 2. Плоская задача для пластичности со степенным упрочнением. Исследуем плоское пластическое равновесие при условии пластичности со степенным упрочнением (1.5).

Уравнения равновесия (1.2) после внесения выражений (1.16) принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho^{2\mu+1} \frac{\partial s}{\partial \rho} + \frac{d}{d\theta} (t \sin \psi) + 2(1-\mu)(t \cos \psi) &= 0 \\ \rho^{2\mu} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{d}{d\theta} (t \cos \psi) + 2(1-\mu)(t \sin \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как величины ψ и t зависят только от θ , то величина s может быть представлена в виде

$$s = s_0 + \frac{p(\theta)}{\rho^{2\mu}} \quad (2.2)$$

где s_0 — постоянный параметр.

Внося выражение (2.2) в уравнения (2.1), получим

$$\frac{d^2}{d\theta^2} (t \sin \psi) + 4\mu(1-\mu)(t \sin \psi) + 2(1-2\mu) \frac{d}{d\theta} (t \cos \psi) = 0 \quad (2.3)$$

$$2\mu p = \frac{d}{d\theta} (t \sin \psi) + 2(1-\mu)(t \cos \psi) \quad (2.4)$$

Уравнение совместности деформаций после подстановки выражений (1.14) дает

$$\frac{d}{d\theta} (g \cos \psi) + 2(g \sin \psi) = 0 \quad (2.5)$$

причем в силу (1.15) величина $t = g^\mu$.

Сопоставляя выражения (1.12) и (1.14) и (1.15), получим

$$U = -t^{1/\mu} \frac{\cos \psi}{2} \quad (2.6)$$

Рассмотрим сначала систему уравнений (2.1)—(2.4) для частного значения $\mu = 1/2$. Уравнение (2.3) может быть проинтегрировано:

$$t \sin \psi = C \sin \theta + D \cos \theta$$

причем из условия (1.18) следует, что $C = 1/\delta$, $D = 0$.

Величины t , p и U выражаются через ψ на основании формул (2.4) и (2.6) следующим образом:

$$t = \frac{\sin \theta}{\delta \sin \psi}, \quad p = \frac{\sin(\psi + \theta)}{\delta \sin \psi}, \quad U = -\left(\frac{\sin \theta}{\delta \sin \psi}\right)^2 \frac{\cos \psi}{2} \quad (2.7)$$

где через δ обозначено значение $\delta = [d\theta/d\psi]_{\theta=0}$.

Уравнение (2.3) после внесения t дает

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 2 \frac{1 + \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \psi}{1 + 2 \operatorname{ctg}^2 \psi} \quad (2.8)$$

Определение напряженного состояния пластического клина сводится к построению решения $\psi = \psi(\theta)$ уравнения (2.8) при граничном условии (1.19), голоморфного в окрестности особой точки $\theta = 0$.

Из уравнения (2.8) очевидно, что для этого голоморфного решения $\psi(0) = 0$ и, следовательно, условие (1.18) на оси симметрии удовлетворяется автоматически.

Компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ и смещения u_z в любой точке могут быть определены по формулам (1.16) и (2.7) после внесения $\psi = \psi(\theta)$.

Уравнения линий равной интенсивности $S = \text{const}$ легко найти по формуле (1.15) в виде

$$\frac{t(\theta)}{\rho} = \text{const}$$

Приводим результаты решения уравнения (2.8) численным методом для $\gamma = 20^\circ$:

$\theta =$	0.00	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\psi =$	0.00	0.30	0.60	0.89	1.14	1.33	1.48	1.57

По этим данным на фиг. 2 построена интегральная кривая уравнения (2.8), изображающая искомую функцию $\psi = \psi(\theta)$.

Рассмотрим систему четырех уравнений (2.1) — (2.4) для $\mu \neq 1/2$. Уравнение (2.3) и (2.4) и (1.16) дают

$$\text{ctg } \psi \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \left(\mu - 1 + \frac{2\mu}{\Psi} \right) \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 - 2 \left(1 + \frac{2\mu^2}{\Psi} \right) \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{4\mu^2}{\Psi} = 0 \quad (2.9)$$

где

$$\Psi = \mu + (1 - \mu) \cos^2 \psi$$

Уравнения (2.5) и (1.15) приводят к уравнению

$$\frac{d \ln t}{d\theta} = \mu \text{tg } \psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} - 2 \right) \quad (2.10)$$

Таким образом, величина ψ удовлетворяет уравнению второго порядка (2.9), а величина t — уравнению первого порядка (2.10); величина ρ связана с ψ и t уравнением (2.4).

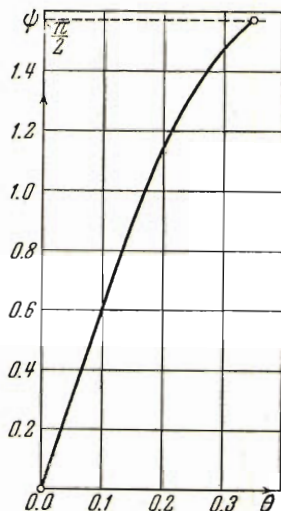
Заметим, что уравнение (2.9) может быть сведено к нелинейному уравнению первого порядка, если ψ принять за независимое переменное, а $d\theta/d\psi = \Theta$ за искомую функцию. Имеем

$$\text{ctg } \psi \frac{d\Theta}{d\psi} = \left(\mu - 1 + \frac{2\mu}{\Psi} \right) \Theta - 2 \left(1 + \frac{2\mu^2}{\Psi} \right) \Theta + \frac{4\mu^2}{\Psi} \Theta^2$$

Определение напряженного состояния пластического клина при $\mu \neq 1/2$ состоит в решении системы уравнений (2.9) — (2.10); граничными условиями¹ при этом являются (1.18) — (1.19).

Сначала определяется решение $\psi = \psi(\theta, \delta)$ уравнения (2.9), зависящее от параметра $\delta = [d\theta/d\psi]_{\theta=0}$.

¹ Заметим, что из уравнения (2.9) и граничного условия (1.19) следует, что $d\psi/d\theta = 2$ при $\theta = \gamma$.

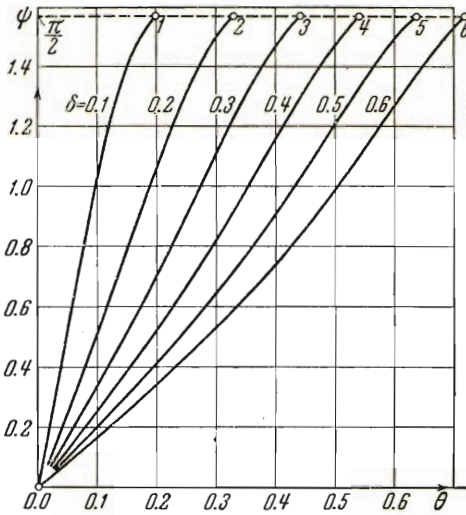


Фиг. 2

Далее строится решение $t = t(\theta, \delta)$ уравнения (2.10), а затем из (2.4) находится $p = p(\theta, \delta)$.

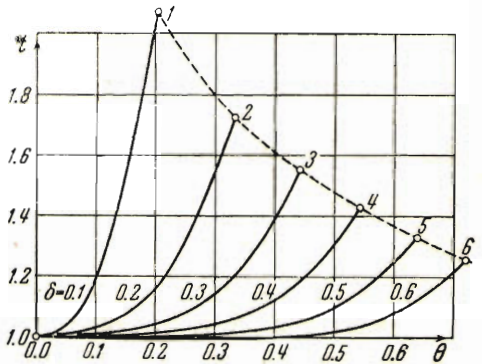
Параметр δ , входящий в решения, может быть связан с углом γ . Вследствие условия прилипания (1.19) на плоской стенке $\theta = \gamma$ имеет место уравнение

$$\psi(\gamma, \delta) = \frac{\pi}{2}$$



Фиг. 3

Компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ и смещения u_2 в любой точке



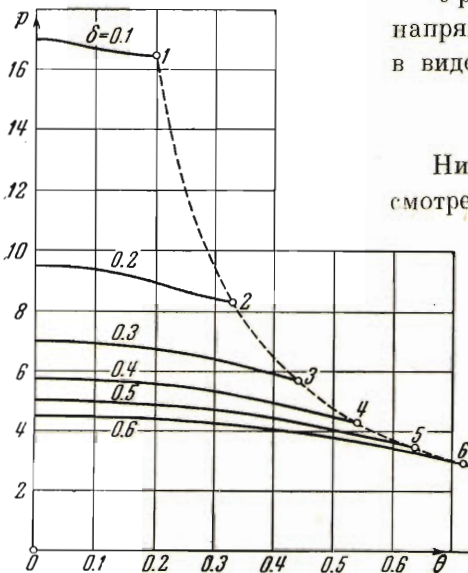
Фиг. 4

пластического клина могут быть определены по формулам (1.16) и (2.6) после внесения $\psi = \psi(\theta, \delta)$ и $t = t(\theta, \delta)$.

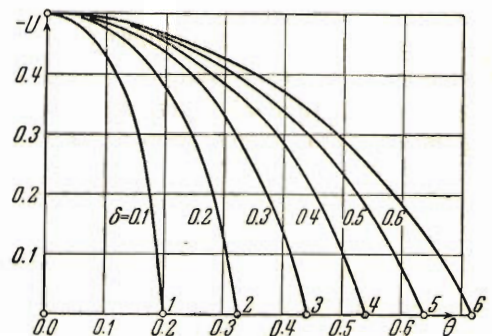
Уравнение линий равной интенсивности напряжения $S = \text{const}$ легко найти по (1.15) в виде

$$\frac{t(\theta)}{\rho^{2\mu}} = \text{const}$$

Ниже приведено численное решение рассмотренной задачи для $\mu = 1/3$.



Фиг. 5



Фиг. 6

Уравнение (2.9) проинтегрировано численным методом для значений параметра $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$; величины ψ , найденные в результате вычислений, сведены в табл. 1.

Таблица 1

δ	θ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7
0.1	ψ	0.00	1.02	1.57					
	t	1.00	1.18	2.05					
	p	17.0	16.6	16.4					
	$-U$	0.500	0.425	0.000					
0.2	ψ	0.00	0.50	1.07	1.50				
	t	1.00	1.03	1.16	1.55				
	p	9.50	9.37	8.95	8.43				
	$-U$	0.500	0.476	0.375	0.121				
0.3	ψ	0.00	0.34	0.70	1.11	1.47			
	t	1.00	1.01	1.05	1.14	1.39			
	p	7.00	6.90	6.71	6.39	5.90			
	$-U$	0.500	0.486	0.376	0.333	0.139			
0.4	ψ	0.00	0.25	0.52	0.82	1.16	1.48		
	t	1.00	1.00	1.01	1.04	1.12	1.31		
	p	5.75	5.68	5.57	5.31	4.94	4.50		
	$-U$	0.500	0.492	0.452	0.385	0.285	0.106		
0.5	ψ	0.00	0.20	0.41	0.64	0.91	1.21	1.50	
	t	1.00	1.00	1.00	1.01	1.03	1.10	1.25	
	p	5.00	4.95	4.85	4.71	4.45	4.06	3.63	
	$-U$	0.500	0.492	0.410	0.411	0.340	0.235	0.074	
0.6	ψ	0.00	0.16	0.34	0.53	0.74	0.99	1.27	1.53
	t	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.02	1.07	1.22
	p	4.50	4.46	4.43	4.26	4.05	3.79	3.44	3.00
	$-U$	0.500	0.349	0.478	0.427	0.370	0.290	0.183	0.037

На фиг. 3 построены графики функции $\psi = \psi(\theta, \delta)$ по координатам точек, взятых из табл. 1, для различных значений δ .

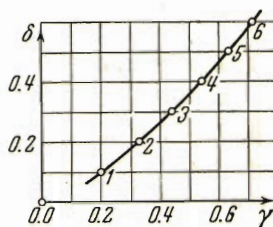
Прямая $\psi = \pi/2$, показанная на чертеже пунктиром, отвечает плоской стенке $\theta = \gamma$, ограничивающей пластическую массу. Она пересекает интегральные кривые в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6. Абсциссы этих точек определяют углы γ , соответствующие выбранным значениям параметра δ .

Уравнения (2.10) также проинтегрированы численным методом для тех же значений параметра $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$; величины t , найденные в процессе этих вычислений, а также величины p и U , полученные по формулам (2.4) и (2.6), приведены в табл. 1.

На фиг. 4, 5 и 6 построены графики функций $t = t(\theta, \delta)$, $p = p(\theta, \delta)$ и $U = U(\theta, \delta)$ по координатам точек, взятых из табл. 1 для различных значений δ .

Пунктирные кривые, соединяющие точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствуют ограничивающей плоской стенке $\theta = \gamma$.

Кривая, нанесенная на фиг. 7, устанавливает зависимость между углом γ и параметром δ .



Фиг. 7

§ 3. Плоская задача для идеальной пластичности. Исследуем плоское пластическое равновесие при условии идеальной пластичности (1.6).

Уравнения равновесия (1.2) после подстановки выражения (1.17) дают

$$\rho \frac{\partial s}{\partial \rho} + \cos \psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 2 \right) = 0, \quad \frac{\partial s}{\partial \theta} + \sin \psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 2 \right) = 0 \quad (3.1)$$

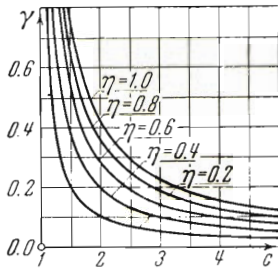
Так как величина ψ зависит только от θ , то величина s может быть представлена в виде

$$s = 1 + p(\theta) + 2c \ln \frac{\alpha}{\rho}, \quad p(0) = 0 \quad (3.2)$$

где α и c — произвольные постоянные.

Внося выражение (3.2) в уравнения (3.1), получим уравнения для величин ψ и p :

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{2c}{\cos \psi} - 2, \quad \frac{dp}{d\theta} = -2c \operatorname{tg} \psi \quad (3.3)$$



Фиг. 8

Величина ψ определяется путем интегрирования первого из этих уравнений. Ограничиваясь значениями параметра $|c| > 1$, получим

$$2\theta + \psi = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) + C \quad (3.4)$$

где C — постоянная интегрирования.

Величина p выражается через ψ так:

$$p = \bar{c} \ln \frac{c-1}{c-\cos \psi} \quad (3.5)$$

Решение поставленной задачи дается равенством (3.4). После нахождения постоянной интегрирования C из условия (1.18) имеем

$$2\theta + \psi = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \right) \quad (3.6)$$

Постоянная c связана с углом γ зависимостью

$$2\gamma + \psi_0 = \frac{2c}{\sqrt{c^2 - 1}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{c+1}{c-1}} \operatorname{tg} \frac{\psi_0}{2} \right), \quad \eta = \sin \psi_0$$

Формулы (3.4)—(3.6), а также следующие ниже формулы (3.7) и (3.8) были получены А. Надаи.

Графики, нанесенные на фиг. 8, устанавливают зависимости между углом γ и параметром c для значений $\eta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Приведенные результаты могут быть значительно упрощены, когда угол γ мал, что соответствует большим значениям параметра c .

Первое уравнение (3.3) при значениях c , больших по сравнению с 1, приближенно дает

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{2c}{\cos \psi} \quad (3.7)$$

Интегрируя это уравнение при условии (1.18), найдем

$$\sin \psi = 2c \theta$$

Воспользуемся граничным условием (1.20) для случая $k_0 = k$ или $\eta = 1$. Параметр $2c = 1/\gamma$, а следовательно,

$$\sin \psi = \frac{\theta}{\gamma}$$

Интегрируя уравнение (3.3), в которое внесена найденная величина ψ , получим

$$p = \cos \psi - 1 = \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\gamma^2}} - 1$$

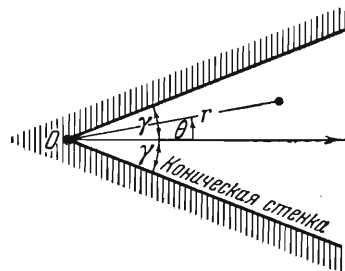
Компоненты напряжения σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$ для случая $k_0 = k$ на основании (1.17) и (3.2) будут

$$\sigma_r = k \left(\frac{1}{\gamma} \ln \frac{\alpha}{\rho} + 2 \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\gamma^2}} \right), \quad \sigma_\theta = \frac{k}{\gamma} \ln \frac{\alpha}{\rho}, \quad \tau_{r\theta} = k \frac{\theta}{\gamma} \quad (3.8)$$

Таким образом, плоское пластическое равновесие при идеальной пластичности, которое соответствует радиальным смещениям, совпадает с напряженным состоянием, рассмотренным еще А. Надаи.

§ 4. Осесимметричная задача о равновесии пластичной массы, заполняющей область формы конуса. Рассмотрим осесимметричное равновесие пластической массы, заполняющей область формы конуса с жесткой конической стенкой; угол при вершине конуса равен 2γ .

Примем сферическую систему координат $r\theta\varphi$, центр которой помещен в вершине конуса, и будем считать, что напряженное состояние не зависит от координаты φ (фиг. 9).



Фиг. 9

Компоненты напряжения и деформации $\tau_{r\varphi} = \tau_{\theta\varphi} = 0, \quad \gamma_{r\varphi} = \gamma_{\theta\varphi} = 0 \quad (4.1)$

а остальные компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{r\theta}$ и компоненты деформации $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_\varphi, \gamma_{r\theta}$ являются функциями только r и θ .

Дифференциальные уравнения равновесия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta \tau_{r\theta} + 2\sigma_r - \sigma_\theta - \sigma_\varphi &= 0 \\ r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \text{ctg } \theta (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) + 3\tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Основные зависимости между компонентами напряжений и деформаций в предположении о несжимаемости пластического материала

$$\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_\varphi = 0$$

берем в обычной форме

$$\epsilon_r = \frac{E}{2S} (\sigma_r - \sigma), \quad \epsilon_\theta = \frac{E}{2S} (\sigma_\theta - \sigma), \quad \epsilon_\varphi = \frac{E}{2S} (\sigma_\varphi - \sigma), \quad \gamma_{r\theta} = \frac{E}{S} \tau_{r\theta} \quad (4.3)$$

где $3\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_\varphi$, а через S и E обозначены соответственно интен-

сивность напряжений и интенсивность деформации сдвига:

$$S = \sqrt{\frac{1}{6} [(\sigma_\theta - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2] + \tau_{r\theta}^2} \quad (4.4)$$

$$E = \sqrt{\frac{2}{3} [(\varepsilon_\theta - \varepsilon_\varphi)^2 + (\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2] + \gamma_{r\theta}^2}$$

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде степенной зависимости

$$S = KE^\mu \quad (4.5)$$

а условие идеальной плоскости берется в виде

$$S = k \quad (4.6)$$

где K , k , μ — константы, характеризующие механические свойства материала.

При решении поставленной осесимметричной задачи естественно считать, что смещение частиц будет происходить по направлению радиусов. Поэтому будем искать точное решение задачи, принимая компоненты смещения u_r , u_θ , u_φ в виде $u_r = u_r(r, \theta)$, $u_\theta = u_\varphi = 0$.

Компоненты деформации, отвечающие этим смещениям, будут

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r}, \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \quad (4.7)$$

Отсюда следует уравнение совместимости деформации

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial \theta} = \gamma_{r\theta} \quad (4.8)$$

а зависимости (4.3) дают

$$\sigma_\theta = \sigma_\varphi, \quad 3\sigma = \sigma_r + 2\sigma_\theta, \quad \varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = 0 \quad (4.9)$$

Выражения (4.4) для интенсивностей напряжения S и деформации E принимают вид:

$$S = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2}, \quad E = \sqrt{3\varepsilon_r^2 + \gamma_{r\theta}^2}$$

Компоненты деформации могут быть выражены через ψ и E :

$$\varepsilon_r = E \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -E \frac{\cos \psi}{2\sqrt{3}}, \quad \gamma_{r\theta} = E \sin \psi \quad (4.10)$$

а компоненты напряжения на основании (4.3) будут

$$\sigma_r = \sigma + S \frac{2 \cos \psi}{\sqrt{3}}, \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma - S \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}}, \quad \tau_{r\theta} = S \sin \psi \quad (4.11)$$

Условие несжимаемости пластического материала

$$\varepsilon_r + 2\varepsilon_\theta = 0, \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} + 2 \frac{u_r}{r} = 0$$

устанавливает, что $r^2 u_r$ есть функция лишь одной переменной θ .

Компоненту смещения u_r , таким образом, можно представить в виде

$$u_r = lU_0 \frac{U(\theta)}{r^2}$$

Здесь U_0 — безразмерный параметр, который будет определен в дальнейшем, $\rho = r/l$, при этом l — какая-нибудь длина.

Компоненты деформации ε_r , ε_θ , ε_φ , $\gamma_{r\theta}$ принимают вид:

$$\varepsilon_r = -2U_0 \frac{U(\theta)}{\rho^3}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = U_0 \frac{U(\theta)}{\rho^3}, \quad \gamma_{r\theta} = U_0 \frac{U'(\theta)}{\rho^3} \quad (4.12)$$

а интенсивность деформации E будет

$$E = U_0 \frac{g(\theta)}{\rho^3}, \quad g = \sqrt{12U^2 + U'^2} \quad (4.13)$$

Компоненты деформации (4.10) представляются в виде

$$\varepsilon_r = U_0 \frac{g}{\rho^3} \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi = -U_0 \frac{g}{\rho^3} \frac{\cos \psi}{2\sqrt{3}}, \quad \gamma_{r\theta} = U_0 \frac{g}{\rho^3} \sin \psi \quad (4.14)$$

причем ψ не зависит от ρ и есть функция лишь θ , т. е. $\psi = \psi(\theta)$.

При условии пластичности со степенным упрочнением (4.5) интенсивность напряжения представляется так:

$$S = Kt_0 \frac{t(\theta)}{\rho^{3\mu}}, \quad t = g^\mu, \quad t(0) = 1 \quad (4.15)$$

Через Kt_0 обозначена величина S на оси симметрии в единичном ($\rho = 1$) расстоянии от начала координат.

Параметр U_0 , введенный выше, выражается через параметр t_0 при помощи равенства $t_0 = U_0^\mu$.

Компоненты напряжения, если ввести обозначение $\sigma = Kt_0 s$, будут

$$\begin{aligned} \sigma_r = Kt_0 \left(s + \frac{t}{\rho^{3\mu}} \frac{2 \cos \psi}{\sqrt{3}} \right), \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = Kt_0 \left(s - \frac{t}{\rho^{3\mu}} \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}} \right) \\ \tau_{r\theta} = Kt_0 \frac{t}{\rho^{3\mu}} \sin \psi \end{aligned} \quad (4.16)$$

При условии идеальной пластичности (4.6) компоненты напряжения напишутся

$$\sigma_r = k \left(s + \frac{2 \cos \psi}{\sqrt{3}} \right), \quad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = k \left(s - \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}} \right), \quad \tau_{r\theta} = k \sin \psi \quad (4.17)$$

Остановимся теперь на граничных условиях.

Вдоль оси симметрии компоненты $\tau_{r\theta} = \gamma_{r\theta} = 0$, а потому

$$\psi = 0, \quad t = 1 \quad \text{при} \quad \theta = 0. \quad (4.18)$$

Вдоль конической стенки, так же как и выше, могут быть приняты различные виды граничных условий в зависимости от характера контакта.

При условии пластичности со степенным упрочнением (4.5) будем попрежнему предполагать, что на конической стенке имеет место прилипание, т. е. $u_r = \varepsilon_\theta = 0$. Отсюда вследствие (4.14) следует, что

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad \theta = \gamma \quad (4.19)$$

При условии идеальной пластичности (4.6) будем, как и ранее, считать, что на конической стенке сила трения постоянна, т. е. $\tau_{r\theta} = k_0$. Поэтому, вводя обозначение $\eta = k_0/k$, на основании (4.17) имеем

$$\psi = \psi_0 = \arcsin \eta \quad \text{при} \quad \theta = \gamma \quad (4.20)$$

Величина ψ в формулах (4.18) — (4.20) определены с точностью до числа, кратного 2π , не влияющего на компоненты напряжения и деформации.

§ 5. Осесимметричная задача для пластичности со степенным упрочнением. Исследуем осесимметричное пластическое равновесие при условии пластичности со степенным упрочнением (4.5).

Уравнения равновесия (4.2) после подстановки (4.17) принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho^{3\mu+1} \frac{\partial s}{\partial \rho} + \frac{d}{d\theta} (t \sin \psi) + \operatorname{ctg} \theta (t \sin \psi) + 2\sqrt{3}(1-\mu)(t \cos \psi) &= 0 \\ \rho^{3\mu} \frac{\partial s}{\partial \theta} - \frac{d}{d\theta} \left(t \frac{\cos \psi}{\sqrt{3}} \right) + 3(t \sin \psi) &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Так как величины ψ и t зависят только от θ , то величина s может быть представлена в виде

$$s = s_0 + \frac{p(\theta)}{\rho^{3\mu}} \quad (5.2)$$

где s_0 — постоянный параметр.

Внося выражения (5.2) в уравнения (5.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} (t \sin \psi) + \operatorname{ctg} \theta \frac{d}{d\theta} (t \sin \psi) + \left[9\mu(1-\mu) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \right] (t \sin \psi) + \\ + \sqrt{3}(2-3\mu) \frac{d}{d\theta} (t \cos \psi) = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$3\mu p = \frac{d}{d\theta} (t \sin \psi) + \operatorname{ctg} \theta (t \sin \psi) + 2\sqrt{3}(1-\mu)(t \cos \psi) \quad (5.4)$$

Уравнение совместности деформаций после подстановки выражений (4.14) дает

$$\frac{d}{d\theta} (g \cos \psi) + 2\sqrt{3}(g \sin \psi) = 0 \quad (5.5)$$

причем вследствие (4.15) величина $t = g^\mu$.

Сопоставляя выражения (4.12), (4.14) и (4.15), получим

$$U = -t^{1/\mu} \frac{\cos \psi}{2\sqrt{3}} \quad (5.6)$$

Рассмотрим сначала систему уравнений (5.1) — (5.4) для частного значения $\mu = 2/3$. Уравнение (5.3) может быть проинтегрировано:

$$t \sin \psi = C \sin \theta + D \left(\operatorname{ctg} \theta - \sin \theta \ln \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right)$$

причем из условия (4.18) следует, что $C = 1/\delta$, $D = 0$.

Величины t , p и U выражаются через ψ на основании формул (5.4) и (5.6) следующим образом:

$$t = \frac{\sin \theta}{\delta \sin \psi}, \quad p = \frac{1}{\delta} \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\operatorname{ctg} \psi}{\sqrt{3}} \right), \quad U = - \left(\frac{\sin \theta}{\delta \sin \psi} \right)^{3/2} \frac{\cos \psi}{2\sqrt{3}} \quad (5.7)$$

где через δ обозначено значение $\delta = [d\theta / d\psi]_{\theta=0}$.

Уравнение (5.3) после подстановки t дает

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \sqrt{3} \frac{4 + \sqrt{3} \operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \psi}{2 + 3 \operatorname{ctg}^2 \psi} \quad (5.8)$$

Определение напряженного состояния пластического конуса сводится к построению решения $\psi = \psi(\theta)$ уравнения (5.8) при граничном условии (4.19), голоморфного вблизи точки $\theta = 0$.

Из уравнения (5.8) очевидно, что для этого голоморфного решения $\psi(0) = 0$ и, следовательно, условие (4.18) на оси симметрии удовлетворяется автоматически.

Компоненты напряжения σ_r , σ_θ , σ_φ , $\tau_{r\theta}$ и смещения u_z в любой точке могут быть определены по формулам (4.16) и (5.7) после внесения $\psi = \psi(\theta)$.

Уравнение линий равной интенсивности $S = \text{const}$ легко найти по формулам (4.15) в виде

$$\frac{t(\theta)}{\rho^2} = \text{const}$$

Приводим результаты решения уравнения (5.8) численным методом для $\gamma = 20^\circ$:

$$\theta = 0.00 \quad 0.05 \quad 0.10 \quad 0.15 \quad 0.20 \quad 0.25 \quad 0.30 \quad 0.35$$

$$\psi = 0.00 \quad 0.23 \quad 0.46 \quad 0.71 \quad 0.95 \quad 1.19 \quad 1.40 \quad 1.57$$

По этим данным на фиг. 10 построена интегральная кривая уравнения (5.8), изображающая искомую функцию $\psi = \psi(\theta)$.

Рассмотрим систему уравнений (5.1) — (5.4) для $\mu \neq 2/3$.

Уравнения (5.3), (5.4) и (4.15) дают

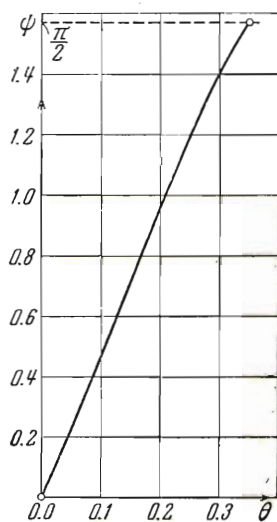
$$\operatorname{ctg} \psi \frac{d^2 \psi}{d\theta^2} + \left(\mu - 1 + \frac{2\mu}{\Psi} \right) \left(\frac{d\psi}{d\theta} \right)^2 - \sqrt{3} \left(\mu + 2 + \frac{3\mu^2}{\Psi} - \frac{\operatorname{ctg} \psi \operatorname{ctg} \theta}{\sqrt{3}} \right) \frac{d\psi}{d\theta} + \frac{3}{\Psi} \left[4\mu^2 - \cos^2 \psi \left(\mu(\mu + 1) + \frac{2\mu \operatorname{tg} \psi}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{3 \sin^2 \theta} \right) \right] = 0 \quad (5.9)$$

где обозначено

$$\Psi = \mu + (1 - \mu) \cos^2 \psi$$

Уравнения (5.5) и (4.15) приводят к уравнению

$$\frac{d \ln t}{d\theta} = \mu \operatorname{tg} \psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} - 2\sqrt{3} \right) \quad (5.10)$$



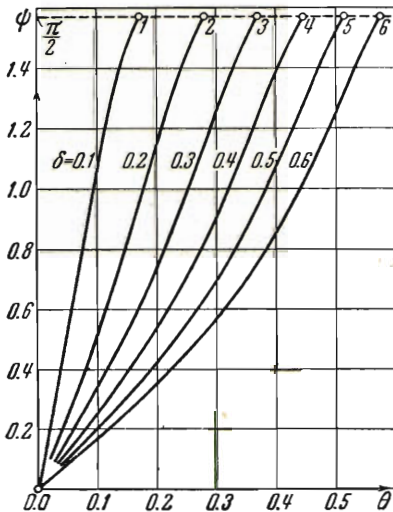
Фиг. 10

Таблица 2

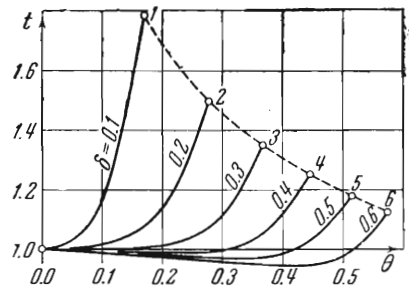
δ	θ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.55
		0.1	ψ	0.00	1.06			
	t	1.00	1.19					
	p	22.3	22.1					
	$-U$	0.289	0.156					
0.2	ψ	0.00	0.50	1.15				
	t	1.00	1.02	1.14				
	p	12.3	12.1	11.8				
	$-U$	0.289	0.264	0.177				
0.3	ψ	0.00	0.34	0.74	1.25			
	t	1.00	1.00	1.01	1.11			
	p	9.00	8.90	8.64	8.30			
	$-U$	0.289	0.272	0.221	0.124			
0.4	ψ	0.00	0.26	0.54	0.91	1.40		
	t	1.00	1.00	0.99	1.00	1.12		
	p	7.30	7.25	7.10	6.85	6.40		
	$-U$	0.289	0.275	0.240	0.175	0.071		
0.5	ψ	0.00	0.20	0.42	0.70	1.08	1.52	
	t	1.00	0.99	0.98	0.97	0.98	1.14	
	p	6.62	6.60	6.55	5.40	5.10	4.80	
	$-U$	0.289	0.278	0.248	0.202	0.131	0.022	
0.6	ψ	0.00	0.17	0.35	0.57	0.85	1.25	1.48
	t	1.00	0.98	0.98	0.96	0.94	0.98	1.06
	p	5.62	5.60	5.54	5.39	5.10	4.80	4.55
	$-U$	0.289	0.280	0.251	0.212	0.160	0.084	0.031

Таким образом, величина ψ удовлетворяет уравнению второго порядка (5.9), а величина t уравнению первого порядка (5.10); величина p связана с ψ и t уравнением (5.4).

Определение напряженного состояния пластического конуса при $\mu \neq 2/3$ состоит в решении системы уравнений



Фиг. 11



Фиг. 12

(5.9) — (5.10); граничными условиями¹ при этом являются (4.18) — (4.19).

¹ Заметим, что из уравнения (5.9) и граничного условия (4.19) следует, что $d\psi/d\theta = 2\sqrt{3}$ при $\theta = \gamma$.

Дальнейшие рассуждения, служащие для рассмотрения осесимметричной задачи, ничем не отличаются от соответствующих рассуждений, приведенных выше для аналогичной плоской задачи.

Сначала находится решение $\psi = \psi(\theta, \delta)$ уравнения (5.9), зависящее от параметра $\delta = [d\theta/d\psi]_{\theta=0}$.

Далее строится решение $t = t(\theta, \delta)$ уравнения (5.10), а затем из уравнения (5.4) определяется $p = p(\theta, \delta)$.

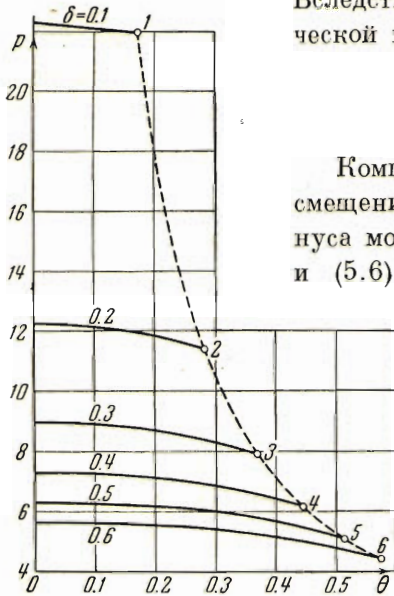
Параметр δ , входящий в решения, может быть связан с углом γ .

Вследствие условия прилипания (4.19) на конической поверхности $\theta = \gamma$, имеет место уравнение

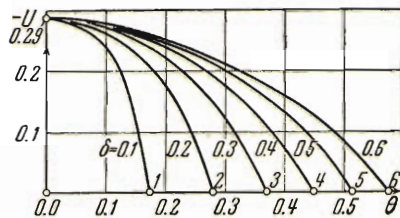
$$\psi(\gamma, \delta) = \frac{\pi}{2}$$

Компоненты напряжения $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_\varphi, \tau_{r\theta}$ и смещения u_z в любой точке пластического конуса могут быть определены по формулам (4.16) и (5.6) после внесения

$$\psi = \psi(\theta, \delta), \quad t = t(\theta, \delta)$$



Фиг. 13



Фиг. 14

Уравнения линий равной интенсивности напряжения $S = \text{const}$ легко получить по формулам (4.15) в виде

$$\frac{t(\theta)}{\rho^{3\mu}} = \text{const}$$

Ниже приведено численное решение рассмотренной задачи для $\mu = 1/3$.

Уравнение (5.9) проинтегрировано численным методом для значений параметра $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$; величины ψ , найденные в процессе этих вычислений, сведены в табл. 2.

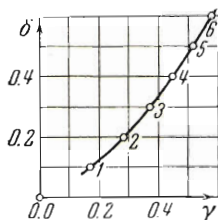
На фиг. 11 построены графики функции $\psi = \psi(\theta, \delta)$ по координатам точек, взятых из табл. 2 для различных значений δ .

Пунктирная прямая $\psi = \pi/2$ отвечает ограничивающей конической стенке $\theta = \gamma$. Она пересекает интегральные кривые в точках 1, 2, 3, 4, 5, 6. Абсциссы этих точек определяют углы γ , соответствующие выбранным значениям параметра δ .

Уравнения (5.10) тоже проинтегрированы численным методом для значений параметра $\delta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$; величины t , найден-

ные в процессе этих вычислений, а также величины p , полученные по формулам (5.4) и (5.6), занесены в ту же табл. 2.

На фиг. 12, 13 и 14 построены графики функций $t = t(\theta, \delta)$, $p = p(\theta, \delta)$ и $U = U(\theta, \delta)$ по координатам точек, взятых из табл. 2 для различных значений δ . Пунктирные кривые, соединяющие точки 1, 2, 3, 4, 5, 6, соответствуют конической стенке $\theta = \gamma$.



Фиг. 15

Кривая, нанесенная на фиг. 15, устанавливает зависимость между углом γ и параметром δ .

Сопоставление результатов § 2 и 5 дает сравнение плоского и осесимметричного пластических равновесий при наличии пластичности со степенным упрочнением материала.

§ 6. Осесимметричная задача для идеальной пластичности. Исследуем осесимметричное пластическое равновесие при условии идеальной пластичности (4.6).

Уравнения равновесия (4.2) после внесения выражений (4.1) дают

$$\rho \frac{\partial s}{\partial \rho} + \cos \psi \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 2\sqrt{3} \right) + \operatorname{ctg} \theta \sin \psi = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \theta} + \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} \left(\frac{d\psi}{d\theta} + 3\sqrt{3} \right) = 0$$

Так как величина ψ зависит только от θ , то величина s может быть представлена в виде

$$s = \frac{1}{\sqrt{3}} + p(\theta) + 2c \ln \frac{\alpha}{\rho}, \quad p(0) = 0 \quad (6.2)$$

где α и c — произвольные постоянные.

Внося (6.2) в уравнения (6.1), получим уравнение для ψ

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{2c}{\cos \psi} - 2\sqrt{3} - \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} \psi \quad (6.3)$$

и уравнение для p

$$-\frac{dp}{d\theta} = \frac{\sin \psi}{\sqrt{3}} \left(\frac{2c}{\cos \psi} + \sqrt{3} - \operatorname{ctg} \theta \operatorname{tg} \psi \right) \quad (6.4)$$

Определение напряженного состояния пластического конуса сводится к интегрированию уравнения (6.3) при граничных условиях (4.18) и (4.20).

Решения уравнений (6.3) и (6.4), зависящие от параметра c , обозначим $\psi = \psi(\theta, c)$, $p = p(\theta, c)$.

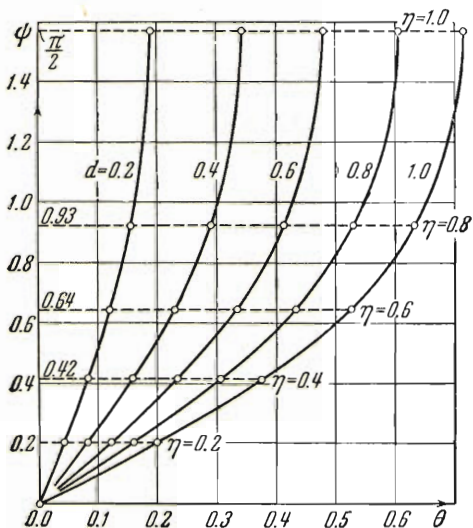
Параметр c , входящий в построенное решение, может быть связан с углом γ на основании условия (4.20) так:

$$\psi(\gamma, c) = \psi_0$$

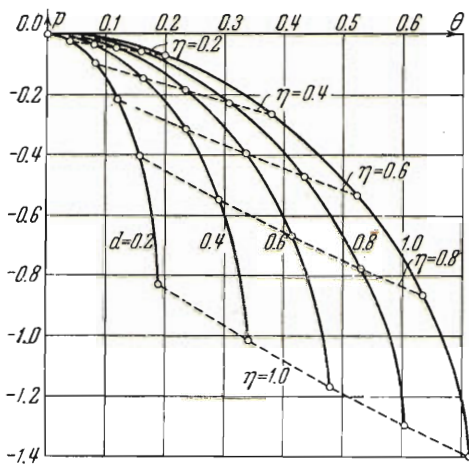
Компоненты напряжения σ_r , σ_θ , σ_φ и $\tau_{r\theta}$ в любой точке пластического конуса могут быть найдены по формулам (4.17) и (6.2) после внесения $\psi = \psi(\theta, c)$ и $p = p(\theta, c)$.

Ниже приведено решение рассмотренной задачи, причем уравнения (6.3) и (6.4) проинтегрированы численным методом.

На фиг. 16 нанесены интегральные кривые уравнения (6.3), изображающие искомую функцию $\psi = \psi(\theta, c)$ для различных значений параметра c . Пунктирные прямые $\psi = \psi_0$ для различных значений ψ_0 , соот-



Фиг. 16

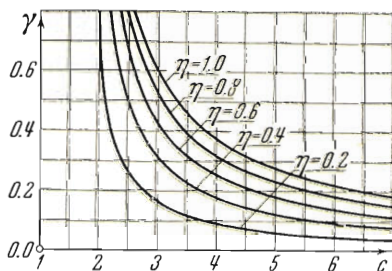


Фиг. 17

ветствующих $\eta = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$, отвечают конической стенке. Абсциссы точек пересечения интегральных кривых с какой-нибудь из этих пунктирных прямых $\psi = \psi_0$ дают значения γ для различных значений c .

На фиг. 17 изображены интегральные кривые уравнения (6.4), представляющие функцию $p = p(\theta, c)$ также для различных значений c .

Графики, построенные на фиг. 18, устанавливают зависимости между углом γ и параметром c для указанных выше η .



Фиг. 18

Заметим, что для удобства вычислений вместо параметра c был принят параметр

$$d = \frac{1}{c - \sqrt{3}}$$

При этом найденные выше интегральные кривые соответствуют значениям $d = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$.

Полученные результаты могут быть значительно упрощены, когда угол γ мал, что соответствует большим значениям параметра c .

Уравнения (6.3) и (6.4) при значениях c , больших по сравнению с 1, приближенно дают

$$\frac{d\psi}{d\theta} = \frac{2c}{\cos\psi} - \operatorname{ctg}\theta \operatorname{tg}\psi, \quad -\frac{dp}{d\theta} = \frac{\sin\psi}{\sqrt{3}} \left(\frac{2c}{\cos\psi} - \operatorname{ctg}\theta \operatorname{tg}\psi \right) \quad (6.5)$$

Интегрируя первое уравнение (6.5) при условии (4.18), найдем

$$\sin\psi = 2c \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \approx c\theta$$

Воспользуемся граничным условием (4.20) для случая $k_0 = k$ или $\eta = 1$. Параметр $c = 1/\gamma$, а следовательно,

$$\sin\psi \approx \frac{\theta}{\gamma}$$

Интегрируя второе уравнение (6.5), в которое внесена найденная величина ψ , получим

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\gamma^2}} - 1 \right)$$

Компоненты напряжения σ_r , σ_θ , σ_φ и $\tau_{r\theta}$ для случая $k_0 = k$ на основании формул (4.17) и (6.2) будут

$$\begin{aligned} \sigma_r &= k \left(\frac{2}{\gamma} \ln \frac{\alpha}{\rho} + \sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\gamma^2}} \right) \\ \sigma_\theta &= \sigma_\varphi = k \frac{2}{\gamma} \ln \frac{\alpha}{\rho}, \quad \tau_{r\theta} = k \frac{\theta}{\gamma} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Таким образом, осесимметричное пластическое равновесие при идеальной пластичности, которое соответствует радиальным смещениям, может быть рассмотрено достаточно просто.

Сопоставление результатов § 3 и 6 дает сравнение плоского и осесимметричного пластических равновесий при наличии идеальной пластичности.

Поступила в редакцию
10 XII 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР. 1946.