Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Б. В. Булгаков, Н. Т. Кузовков

(Москва)

При исследовании систем автоматического регулирования иногда бывает необходимо знать наибольшее возможное отклонение какой-либо координаты в заданный момент t или в заданном конечном или бесконечном интервале времени при действии ограниченных по модулю внешних сил. Для линейных систем с постоянными параметрами эта задача решена в статье [1]. Целью настоящей работы является решение той же задачи для линейных систем с переменными параметрами.

1. Наибольшие возможные отклонения. Пусть матричное дифференциальное уравнение системы есть

$$\frac{dy}{dt}+f(t)y=x(t) \tag{1.1}$$

где

$$f(t)=\begin{Vmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t)\ldots f_{1n}(t) \\ f_{21}(t) & f_{22}(t)\ldots f_{2n}(t) \\ \ldots & \ldots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t)\ldots f_{nn}(t)\end{Vmatrix}, \qquad y=\begin{Vmatrix} y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n\end{Vmatrix}, \qquad x(t)=\begin{Vmatrix} x_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n(t)\end{Vmatrix}$$

При этом $y_1,\ldots,y_n$ суть неизвестные функции, а $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ возмущающие функции, связанные условиями

$$|x_\rho(t)|\leqslant l_\rho \qquad (\rho=1,\ldots,n) \tag{1.2}$$

где l_ρ — постоянные. Функции $f_{jk}(t), x_\rho(t)$ $(j,k,\rho=1,\ldots,n)$ предполагаются однозначными и кусочно-непрерывными.

Обозначая через $\vartheta(t)$ фундаментальную матрицу однородного уравнения, получаемого из (1.1) при $x(t)\equiv 0$, через $\vartheta^{-1}(t)$ обратную матрицу, а также вводя матрицу последействия

$$N(t,\tau)=\vartheta(t)\vartheta^{-1}(\tau) \tag{1.3}$$

и матрицу-столбец

$$M(t,t_0)=N(t,t_0)y(t_0) \tag{1.4}$$

можно записать решение неоднородного уравнения (1.1), принимающее при $t=t_0$ заданное значение $y(t_0)$, в виде [2]

$$y(t)=M(t,t_0)+\int\limits_{t_0}^{t}N(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \tag{1.5}$$

Предполагая, что фундаментальная матрица найдена тем или иным способом (один из них излагается ниже), подсчитаем наибольшее возможное отклонение в координате y_j, имеющее место, когда лишь одна из сил $x_\rho(t)$ отлична от нуля. Для этого воспользуемся выражением

$$y_j = M_j(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} N_{j\rho}(t,\tau)\, x_\rho(\tau)\, d\tau \tag{1.6}$$

получающимся путем приравнивания j-х элементов матриц-столбцов в левой и правой частях матричного равенства (1.5), при условии, что все возмущающие функции, кроме $x_\rho(t)$, равны нулю. При данных t, t_0 абсолютная величина $|y_j|$ получает свое максимальное значение $h_{j\rho}(t, t_0)$, если абсолютная величина функции $x_\rho(\tau)$ все время равна l_ρ, а ее знак меняется так, чтобы все элементы интеграла в выражении (1.6) имели тот же знак, что и $M_j(t, t_0)$. Иными словами, $x_\rho(\tau)$ должна менять знак при $\tau = t_{j\rho}^{(1)}, t_{j\rho}^{(2)}, \ldots, t_{j\rho}^{(m)}, \ldots$, где $t_{j\rho}^{(m)}$ суть последовательные корни уравнения $N_{j\rho}(t, \tau) = 0$ по аргументу τ на интервале (t_0, t) при заданном t.

Поэтому

$$h_{j\rho}(t, t_0) = |M_j(t, t_0)| + A_{j\rho}(t, t_0)\, l_\rho \tag{1.7}$$

где

$$A_{j\rho}(t, t_0) = \int_{t_0}^{t} |N_{j\rho}(t, \tau)|\, d\tau =$$

$$= |\sigma_{j\rho}(t,t_0) - 2\sigma_{j\rho}(t,t_{j\rho}^{(1)}) + 2\sigma_{j\rho}(t, t_{j\rho}^{(2)}) - 2\sigma_{j\rho}(t, t_{j\rho}^{(3)}) + \ldots| \tag{1.8}$$

$$\sigma_{j\rho}(t, \tau) = \int N_{j\rho}(t, \tau)\, d\tau \tag{1.9}$$

Так как функции $x_\rho(t)$ независимы, то наибольшее по абсолютной величине отклонение в координате y_j в момент t при одновременном действии всех возмущающих сил может быть вычислено с помощью коэффициентов влияния $A_{j\rho}(t, t_0)$

$$H_j(t, t_0) = |M_j(t, t_0)| + \sum_{\rho=1}^{n} A_{j\rho}(t, t_0)\, l_\rho \tag{1.10}$$

Первый член справа представляет собой отклонение вследствие начальных возмущений, второй член — наибольшее отклонение за счет непрерывно действующих сил.

Если состояние $y = 0$ асимптотически устойчиво, то первый член стремится к нулю при $t \to \infty$.

Если нам нужно знать наибольшее возможное отклонение в координате y_j не в заданный момент t, а в заданном конечном или бесконечном интервале времени, то следует построить график функции $H_j(t, t_0)$. Максимальная ордината кривой $H_j(t, t_0)$, получающаяся при некотором значении $t = t^*$ внутри или на границе интервала, дает искомое наибольшее отклонение.

2. Приближенное определение фундаментальной матрицы. Перейдем к определению фундаментальной матрицы $\vartheta(t)$, предполагавшейся в предыдущем известной. В общем случае она может быть найдена путем составления матрицанта [2]. Недостатком этого метода является то, что при больших значениях t ряд, представляющий матрицант, сходится весьма медленно; кроме того, повторные квадратуры, с помощью которых выражаются члены ряда, быстро усложняются с повышением порядкового номера члена.

Если коэффициенты $f_{jk}(t)$ изменяются достаточно плавно, то для приближенного определения фундаментальной матрицы можно заменить их ступенчатыми функциями, изменяющими свои значения в одни и те же моменты $t_0, t_1, t_2, \ldots$ Тогда уравнение (1.1) заменится на интервалах (t_{i-1}, t_i) уравнениями

$$\frac{dy}{dt} + f(t_{i-1})\, y = x(t) \tag{2.1}$$

с постоянными коэффициентами при y и фундаментальная матрица $\vartheta(t)$ может быть найдена весьма просто. Действительно, пусть $\theta_1(t)$, $\theta_2(t), \ldots$ суть фундаментальные матрицы уравнений (2.1). Для 1-го интервала (t_0, t_1) можно принять за $\vartheta(t)$ матрицу

$$\vartheta_1(t) = \theta_1(t) \tag{2.2}$$

Для 2-го интервала (t_1, t_2) следует считать $\vartheta(t)$ равной матрице

$$\vartheta_2(t) = \theta_2(t)\,\theta_2^{-1}(t_1)\,\vartheta_1(t_1) = \theta_2(t)\,\theta_2^{-1}(t_1)\,\theta_1(t_1) \tag{2.3}$$

В самом деле, с одной стороны, эта матрица является фундаментальной для уравнения (2.1) с постоянным коэффициентом, соответствующего 2-му интервалу, так как она равна произведению $\theta_2(t)$ на неособую матрицу $\theta_2^{-1}(t_1)\,\vartheta_1(t_1)$ с постоянными элементами и, следовательно, ее столбцы представляют собой независимые линейные комбинации столбцов матрицы $\theta_2(t)$, т. е. будут независимыми решениями; с другой стороны,

$$\vartheta_2(t_1) = \theta_2(t_1)\,\theta_2^{-1}(t_1)\,\theta_1(t_1) = \theta_1(t_1) = \vartheta_1(t_1)$$

т. е. матрицы $\vartheta_1(t)$, $\vartheta_2(t)$ совпадают в точке t_1 сопряжения интервалов.

Рассуждая аналогичным образом, можно найти приближенное выражение фундаментальной матрицы $\vartheta(t)$ на 3-м интервале. Имеем

$$\vartheta_3(t) = \theta_3(t)\,\theta_3^{-1}(t_2)\,\vartheta_2(t_2) = \theta_3(t)\,\theta_3^{-1}(t_2)\,\theta_2(t_2)\,\theta_2^{-1}(t_1)\,\theta_1(t_1)$$

Для i-го интервала подобным же образом получим

$$\begin{aligned} \vartheta_i(t) &= \theta_i(t)\,\theta_i^{-1}(t_{i-1})\,\vartheta_{i-1}(t_{i-1}) = \\ &= \theta_i(t)\,\theta_i^{-1}(t_{i-1})\,\theta_{i-1}(t_{i-1})\,\theta_{i-1}^{-1}(t_{i-2})\ldots\theta_2(t_2)\,\theta_2^{-1}(t_1)\,\theta_1(t_1) \end{aligned} \tag{2.4}$$

3. Численный пример. Пусть дана система уравнений

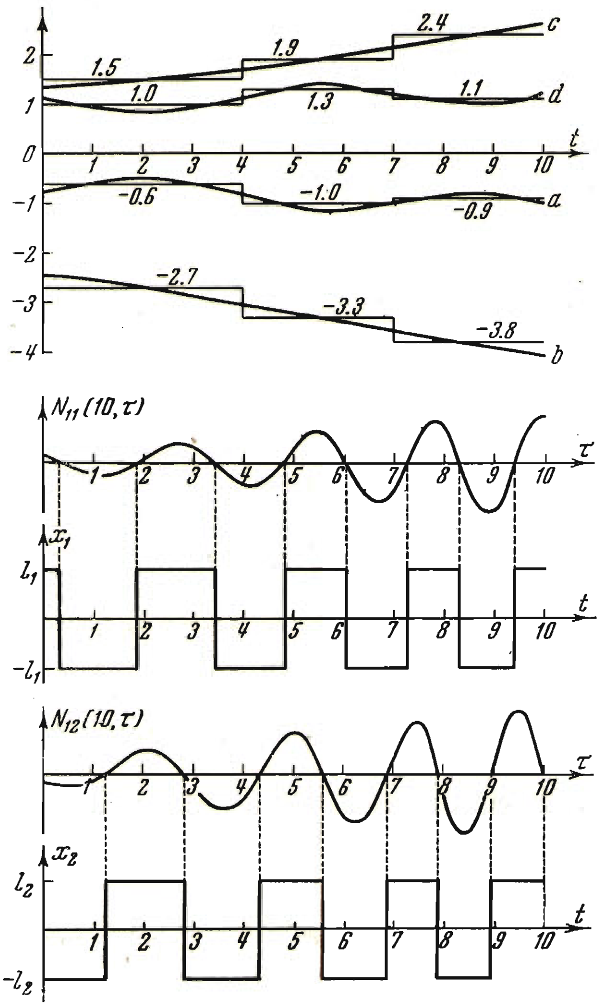
$$\frac{dy_1}{dt} + a(t)\,y_1 + b(t)\,y_2 = x_1(t), \qquad \frac{dy_2}{dt} + c(t)\,y_1 + d(t)\,y_2 = x_2(t) \tag{3.1}$$

в которой

$$|x_1(t)| \leqslant l_1, \qquad |x_2(t)| \leqslant l_2 \tag{3.2}$$

Закон изменения коэффициентов $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ представлен графически на фиг. 1. При $t=0$ должно быть

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0 \tag{3.3}$$



Фиг. 1

Требуется определить наибольшее возможное отклонение в координате y_1 в момент $t = 10$ сек.

Если записать систему (3.1) в форме (1.1), то матрица $f(t)$ будет

$$f(t) = \begin{Vmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{Vmatrix} \tag{3.4}$$

Следуя изложенному выше методу, заменяем функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ ступенчатыми функциями по фиг. 1. Составляем затем фундаментальные матрицы $\theta_i(t)$ для уравнений с постоянными коэффициентами, соответствующих интервалам

$$(t_{i-1},\, t_i) \qquad (i = 1,\, 2,\, 3),$$

где $t_0 = 0$, $t_1 = 4$, $t_2 = 7$ и $t_3 = 10$.

Корни характеристического уравнения для этих интервалов соответственно будут (3.5)

$$\varepsilon_1 \pm i\omega_1 = -\ 0.2 \pm i2$$

$$\varepsilon_2 \pm i\omega_2 = -0.15 \pm i2.5$$

$$\varepsilon_3 \pm i\omega_3 = -0.1 \pm i3$$

Таким образом, для фундаментальных матриц $\theta_i(t)$ имеем [3]

$$\theta_i(t) = \begin{Vmatrix} e^{\varepsilon_i t}[(\varepsilon_i + d_i)\cos\omega_i t - \omega_i \sin\omega_i t] & e^{\varepsilon_i}\ [(\varepsilon_i + d_i)\sin\omega_i t + \omega_i\cos\omega_i t] \\ -c_i e^{\varepsilon_i t}\cos\omega_i t & -c_i e^{\varepsilon_i t}\sin\omega_i t \end{Vmatrix}$$

$$(i = 1,\, 2,\, 3)$$

Составив матрицы, обратные по отношению к $\theta_i(t)$, найдем выражения фундаментальной матрицы $\vartheta(t)$ системы (3.1) на 1-м, 2-м и 3-м интервалах по формуле (2.4):

$$\vartheta_1(t) = \theta_1(t) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-0.2t}(0.8\cos 2t - 2\sin 2t) & e^{-0.2t}(0.8\sin 2t + 2\cos 2t) \\ -1.5e^{-0.2t}\cos 2t & -1.5e^{-0.2t}\sin 2t \end{matrix} \right\|$$

$$\vartheta_2(t) = \theta_2(t)\,\theta_2^{-1}(4)\,\vartheta_1(4) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-0.15t}(1.3563\sin 2.5t + 1.1654\cos 2.5t) & e^{-0.15t}(1.2438\sin 2.5t - 1.2949\cos 2.5t) \\ e^{-0.15t}(0.5145\cos 2.5t - 1.1223\sin 2.5t) & e^{-0.15t}(1.1539\cos 2.5t + 0.4533\sin 2.5t) \end{matrix} \right\|$$

$$\vartheta_3(t) = \theta_3(t)\,\theta_3^{-1}(7)\,\vartheta_2(7) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} e^{-0.1t}(-1.1394\sin 3t - 0.3672\cos 3t) & e^{-0.1t}(-0.5889\sin 3t + 1.0273\cos 3t) \\ e^{-0.1t}(+0.5378\sin 3t - 0.7322\cos 3t) & e^{-0.1t}(-0.5983\sin 3t - 0.6706\cos 3t) \end{matrix} \right\|$$

Переходим ко второму этапу решения, состоящему в отыскании наибольшего возможного отклонения в координате y_1 в **момент** $t = 10$ **сек.**

Вычислив $\vartheta_1^{-1}(\tau)$, $\vartheta_2^{-1}(\tau)$, $\vartheta_3^{-1}(\tau)$, находим $M(10{,}0)$ и $N(10, \tau)$ по формулам (1.3), (1.4).

Матричное решение (1.5) системы дифференциальных уравнений (3.1) при $t = 10$ сек. можно записать в виде

$$\left\| \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0.1362 \\ 0.0897 \end{matrix} \right\| + \int\limits_0^{10} \left\| \begin{matrix} N_{11}(10, \tau)\,x_1(\tau) + N_{12}(10, \tau)\,x_2(\tau) \\ N_{21}(10, \tau)\,x_1(\tau) + N_{22}(10, \tau)\,x_2(\tau) \end{matrix} \right\| d\tau$$

Так как нас интересует координата y_1, то из этого решения выписываем лишь верхнюю строку:

$$y_1 = 0.1362 + \int\limits_0^{10} [N_{11}(10, \tau)\,x_1(\tau) + N_{12}(10, \tau)\,x_2(\tau)]\,d\tau \tag{3.6}$$

Выражения $N_{11}(10, \tau)$ и $N_{12}(10, \tau)$ для трех интервалов суть

$$N_{11}^{(1)}(10, \tau) = e^{0.2\tau}(-0.1966\sin 2\tau + 0.1362\cos 2\tau)$$

$$N_{11}^{(2)}(10, \tau) = e^{0.15\tau}(+0.2406\sin 2.5\tau + 0.1560\cos 2.5\tau)$$

$$N_{11}^{(3)}(10, \tau) = e^{0.1\tau}(-0.3824\sin 3\tau - 0.0644\cos 3\tau)$$

$$N_{12}^{(1)}(10, \tau) = -e^{0.2\tau}(+0.2865\sin 2\tau + 0.1896\cos 2\tau)$$

$$N_{12}^{(2)}(10, \tau) = e^{0.15\tau}(-0.0596\sin 2.5\tau + 0.4111\cos 2.5\tau)$$

$$N_{12}^{(3)}(10, \tau) = e^{0.1\tau}(-0.0789\sin 3\tau - 0.5049\cos 3\tau)$$

Наибольшее возможное отклонение в координате y_1 в момент $t = 10$ сек. будет иметь место, когда возмущающие функции x_1, x_2 по модулю все время равны l_1 и l_2; что же касается знаков, то для функции x_1 знак должен изменяться в точках $t_{11}^{(1)}$, $t_{11}^{(2)}$, . . . , являющихся действительными корнями функций $N_{11}^{(i)}(10, \tau)$, а для функции x_2 — в точках $t_{12}^{(1)}$, $t_{12}^{(2)}$, . . . , представляющих корни $N_{12}^{(i)}(10, \tau)$.

Эти корни таковы:

$$
\begin{array}{ll}
N_{11}^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} t_{11}^{(1)} = 0.3038, \\ t_{11}^{(2)} = 1.8746, \\ t_{11}^{(3)} = 3.4454, \end{array} \right. & N_{12}^{(1)} \left\{ \begin{array}{l} t_{12}^{(1)} = 1.2790 \\ t_{12}^{(2)} = 2.8498 \end{array} \right. \\
N_{11}^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} t_{11}^{(4)} = 4.7958, \\ t_{11}^{(5)} = 6.0524, \end{array} \right. & N_{12}^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} t_{12}^{(3)} = 4.3410 \\ t_{12}^{(4)} = 5.5976 \\ t_{12}^{(5)} = 6.8543 \end{array} \right. \\
N_{11}^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} t_{11}^{(6)} = 7.2748, \\ t_{11}^{(7)} = 8.3220, \\ t_{11}^{(8)} = 9.3692, \end{array} \right. & N_{12}^{(3)} \left\{ \begin{array}{l} t_{12}^{(6)} = 7.9056 \\ t_{12}^{(7)} = 8.9528 \\ t_{12}^{(8)} = 10.0000 \end{array} \right.
\end{array}
\tag{3.7}
$$

Чтобы вызвать наибольшее возможное отклонение в момент $t=10$ сек., функции x_1, x_2 должны, следовательно, изменяться так, как это представлено на фиг. 1. Для того чтобы подсчитать само максимальное отклонение в координате y_1, необходимо сначала по формуле (1.9) вычислить функции $\sigma_{11}^{(i)}(10, \tau)$, $\sigma_{12}^{(i)}(10, \tau)$ $(i = 1, 2, 3)$, озаботившись тем, чтобы эти функции смыкались на границах интервалов; после этого можно получить коэффициенты влияния $A_{11}(10,0)$, $A_{12}(10,0)$ по формуле (1.8). Подставляя эти коэффициенты в формулу (1.10), находим наибольшее возможное отклонение в координате y_1 в момент $t = 10$ сек.

$$H_1(10,0) = 0.1362 + 3.8777\, l_1 + 5.7620\, l_2 \tag{3.8}$$

Поступила в редакцию
15 XII 1949

Институт механики АН СССР
Научно-исследовательский институт
МПСС

ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. О накоплении возмущений в линейных колебательных системах с постоянными параметрами. ДАН СССР. 1946. Т. LI. № 5.
2. Булгаков Б. В. Колебания. М.—Л. 1949. Т. I. § 4.3
3. Frazer R. A., Duncan W. J., Collar A. R. Elementary Matrices and some Applications to Dynamics and Differential Equations. Cambridge — New York. 1947.