

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКОНОВ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ  
 УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННЫМ  
 ПРЕДЕЛОМ УПРУГОСТИ**

**Х. А. Рахматуллин**

(Москва)

§ I. Случай возрастающего предела упругости. Случай среды с возрастающим пределом упругости будет иметь место, если приложить нагрузку к стержню, предварительно подвергнутому удару с противоположного конца. Покажем, что распространение напряжения сжатия по стержню происходит следующим образом.

Передний фронт упругих волн идет со скоростью  $a_0 = \sqrt{E/\rho}$ , а задний фронт, вообще говоря, с переменной скоростью  $b$ . Граница областей упругих и пластических деформаций будет поверхностью разрыва вторых производных от смещений. На фиг. 1 представлено движение в плоскости  $xt$ , где  $x$  — лагранжева координата,  $t$  — время.

Обозначим через  $\epsilon_s = \epsilon_s(x)$  деформацию, соответствующую переменному пределу упругости  $\sigma_s(x)$ . На границе упругой и пластической областей  $x = f(t)$  деформации будут заданы и равны  $\epsilon_s(x)$ .

Если функция  $x = f(t)$  известна, то движение в области упругих деформаций вполне определяется из решения смешанной задачи для уравнения струны.

Заметим, что на кривой  $x = f(t)$ , скорости  $u_t = \partial u / \partial t$ , как будет показано, определяются из уравнения

$$u_t = -a_0 \epsilon_s \quad (1.1)$$

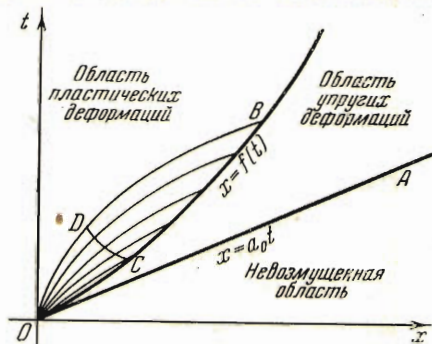
Уравнение движения в области пластических деформаций имеет вид [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [a_0^2 - a^2] \frac{\partial \epsilon_s}{\partial x} \quad (1.2)$$

где  $u$  — смещение частицы,  $\epsilon_s = \epsilon_s(x)$  — переменный предел упругости и

$$a = a(u_x - \epsilon_s) \quad \left( a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma(u_x - \epsilon_s)}{\partial (u_x - \epsilon_s)} \right)$$

Здесь и в дальнейшем в круглых скобках стоит аргумент функции.



Фиг. 1

Характеристики уравнения (1.2) имеют вид:

$$dx = \pm a dt \quad (1.3)$$

$$du_t = \pm a du_x + [a^2 - a_0^2] \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x} dt \quad \left( u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1.4)$$

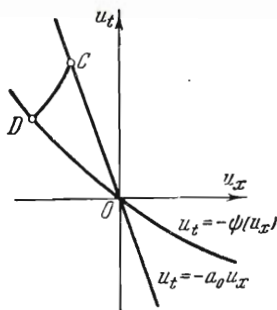
Докажем, что в области пластических деформаций существует решение уравнения (1.2), обладающее особенностью римановых волн (фиг. 1).

Если допустить существование в начале координат особенности, то предельные значения скорости и деформации на основании (1.4) в начале координат будут удовлетворять уравнению

$$u_t = - \int_0^{u_x} a(u_x - \varepsilon_s(0)) du_x = -\psi(u_x) \quad (1.5)$$

Кроме того, из (1.1) на кривой  $x = f(t)$  имеем

$$u_t = -a_0 u_x \quad (1.6)$$



Фиг. 2

Покажем, что решение уравнения (1.2) при условии (1.1) и (1.5) в области, лежащей между кривой  $x = f(t)$  и характеристикой

$OB$ , полностью определяется. Одновременно можно найти и закон движения переднего фронта пластической волны.

Рассмотрим в плоскости  $xt$  на фиг. 1 характеристику  $OC$ , достаточно близкую к прямой  $x = a_0 t$ . По заданному углу наклона этой характеристики определяем деформацию  $u_x$  из уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tg} \varphi = a(u_x - \varepsilon_s(0)) \quad (1.7)$$

Следовательно, в плоскости  $u_x u_t$  на фиг. 2 будем иметь точку  $D$ . Решая совместно уравнение (1.6) и уравнение (1.4) характеристики положительного наклона (заменяя его уравнением в конечных разностях), найдем значения  $u_x$ ,  $u_t$  в точке  $C$ , лежащей на  $x = f(t)$ .

Из уравнения  $u_x = \varepsilon_s(x)$  найдем координату  $x_c$  точки  $C$ . Так как эта точка лежит на прямой  $x = \operatorname{tg} \varphi t$ , то точка  $C$  на плоскости  $xt$  тем самым будет найдена. Зная точку  $C$  и значения скоростей и деформаций на ней, методом характеристик найдем  $u_x$  на всей кривой  $CD$ .

Тем же методом может быть определено решение уравнений (1.2) во всей области  $OCBDO$  и найдена форма кривой  $x = f(t)$ .

Таким образом, отсюда следует существенный результат: закон распространения переднего фронта пластических деформаций не зависит от закона изменения приложенной нагрузки, а определяется только распределением переменного предела упругости и видом кривой  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ .

Зная  $x = f(t)$ , как было указано выше, определим решение для области упругих деформаций.

Так как на прямой  $x = a_0 t$  смещение равно нулю, указанное реше-

ние будет иметь вид:

$$u = F(a_0 t - x) \tag{1.8}$$

Из этого дифференцированием получим (1.4) и (1.6).

Решение уравнения (1.2) для области, прилегающей к оси  $Ot$  (фиг. 1), существенно зависит от закона изменения приложенной нагрузки. Если эта нагрузка со временем возрастает, то получим смешанную задачу для уравнения (1.2). Граничные условия будут заданы на характеристике (скорость и деформация) и на оси  $Ot$  (давление или скорость).

Если приложенная нагрузка будет убывающей, то в начале координат одновременно с волнами Римана возникает волна разгрузки  $OL$  (фиг. 3). Если зададимся формой волны разгрузки, то для определения решения в области, лежащей между ней и осью  $Ot$ , получим задачу Коши. Имея решение задачи Коши, определим условие на торце стержня, которое соответствует данной форме волны разгрузки.

В случае заданной нагрузки на торце стержня решение в упомянутой области может быть определено вместе с формой волны разгрузки методом конечных разностей [2].

В качестве примера возьмем схему Прандтля. В этом случае неупругие волны Римана имеют скорость  $a_1$  и передний фронт пластических волн стягивается к прямой  $x = a_1 t$ .

Решение в области упругих деформаций имеем в виде (1.8). Функция  $F$  в этой формуле определяется из уравнения

$$-F'(a_0 t - f(t)) = \epsilon_s(f(t))$$

Для рассматриваемого случая  $f(t) = a_1 t$  имеем

$$-F'((a_0 - a_1)t) = \epsilon_s(a_1 t), \quad \text{или} \quad F'(z) = -\epsilon_s\left(\frac{a_1}{a_0 - a_1} z\right)$$

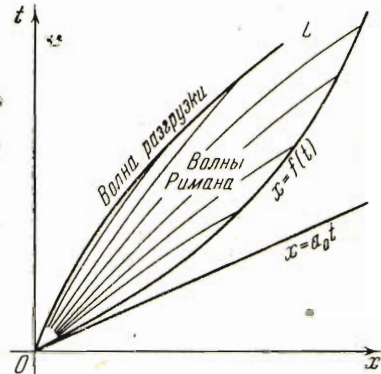
Следовательно,

$$F(a_0 t - x) = - \int_0^{a_0 t - x} \epsilon_s\left(\frac{\lambda}{1 - \lambda} z\right) dz \quad \left(\lambda = \frac{a_1}{a_0}\right) \tag{1.9}$$

Это решение показывает, что каждая частица излучает волну, по интенсивности деформации равную своему пределу упругости, причем эти волны распространяются со скоростью  $a_0$ .

Прямая  $x = a_1 t$  является поверхностью сильного разрыва. Если нагрузка мгновенно возникает и затем монотонно убывает, то  $x = a_1 t$  будет волной разгрузки.

Рассмотрим случай *нарастающей нагрузки*.



Фиг. 3



Из (1.2) получим

$$u = F_1(a_1 t - x) + F_2(a_1 t + x) - \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_1^2} \int_0^x \varepsilon_s(x) dx \quad (1.10)$$

Функции  $F_1$  и  $F_2$  определяем из условий непрерывности смещения на прямой  $x = a_1 t$  и из условия, заданного на торце стержня.

Пусть на торце задана скорость движения  $v_0(t)$ , тогда

$$a_1 F_1'(a_1 t) + a_1 F_2'(a_1 t) = v_0(t)$$

$$F_1(0) + F_2(2a_1 t) - \left[ \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right] \int_0^{a_1 t} \varepsilon_s(x) dx = - \int_0^{(a_0 - a_1)t} \varepsilon_s \left( \frac{\lambda z}{1 - \lambda} \right) dz$$

Отсюда

$$F_2(z) = \left[ \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right] \int_0^{\frac{1}{2}z} \varepsilon_s(x) dx - \int_0^{\zeta} \varepsilon_s \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} \xi \right) d\xi \quad \left( \zeta = \frac{a_0 - a_1}{2a_1} z \right) \quad (1.11)$$

$$F_1(z) = \frac{1}{a_1} \int_0^{\frac{z}{2}} v_0 \left( \frac{y}{a_1} \right) dy - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right] \int_0^{\frac{z}{2}} \varepsilon_s \left( \frac{y}{2} \right) dy - \frac{1 - \lambda}{2\lambda} \int_0^{\frac{z}{2}} \varepsilon_s \left( \frac{y}{2} \right) dy$$

Рассмотрим случай *волны разгрузки*. Пусть  $\varepsilon_0(x)$  — значения деформации на волне разгрузки. Тогда для напряжения имеем

$$\sigma = \sigma_s(x) + [\varepsilon_0 - \varepsilon_s(x)] E' - [\varepsilon_0 - u_x] E \quad (1.12)$$

где  $E' = a_1^2 \rho$  — модуль упругости. Уравнение движения будет

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + [a_0^2 - a_1^2] \left[ \frac{d\varepsilon_s}{dx} - \frac{d\varepsilon_0}{dx} \right] \quad (1.13)$$

Интеграл этого уравнения, очевидно, имеет вид:

$$u = \Phi_1(a_0 t - x) + \Phi_2(a_0 t + x) + [1 - \lambda^2] \int_0^x [\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s(x)] dx \quad (1.14)$$

Из условий на волне разгрузки имеем

$$-\Phi_1'([a_0 - a_1] t) + \Phi_2'([a_0 + a_1] t) + [1 - \lambda^2] [\varepsilon_0 - \varepsilon_s] = \varepsilon_0(x) \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1([a_0 - a_1] t) + \Phi_2([a_0 + a_1] t) + [1 - \lambda^2] \int_0^{a_1 t} [\varepsilon_0(x) - \varepsilon_s(x)] dx = \\ = - \int_0^{[a_0 - a_1]t} \varepsilon_s \left( \frac{\lambda}{1 - \lambda} z \right) dz \end{aligned} \quad (1.16)$$

Условие на торце стержня дает

$$a_0 \Phi_1'(a_0 t) + a_0 \Phi_2'(a_0 t) = v_0(t) \quad \text{или} \quad \Phi_1'(z) = \frac{1}{a_0} v_0 \left( \frac{z}{a_0} \right) - \Phi_2'(z) \quad (1.17)$$

Дифференцируя уравнение (1.16) и имея в виду (1.17), получим

$$\begin{aligned} \Phi_2'([a_0 - a_1] t) + \Phi_2'([a_0 + a_1] t) - \frac{1}{a_0} v_0 \left( \frac{a_0 - a_1}{a_0} t \right) = \lambda^2 [\varepsilon_0 - \varepsilon_s]_{x=a_1 t} \\ [a_0 - a_1] \left\{ \frac{1}{a_0} v_0 \left( \frac{a_0 - a_1}{a_0} t \right) - \Phi_2'([a_0 - a_1] t) \right\} + \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$+ [a_0 + a_1] \Phi_2'([a_0 + a_1] t) = - [1 - \lambda^2] a_1 [\varepsilon_0(a_1 t) - \varepsilon_s(a_1 t)] - [a_0 - a_1] \varepsilon_s(a_1 t)$$

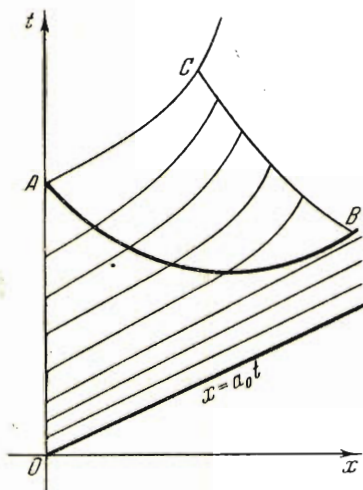
Таким образом, исключая отсюда  $\epsilon_0(a, t)$ , задачу приводим к решению функционального уравнения для  $\Phi_2'$ .

Пользуясь (1.18), можно решить различные задачи, связанные с процессом распространения волны разгрузки в среде с переменным пределом упругости [1]. Так, например, может быть решена задача о продольном ударе по испытывавшему удар стержню.

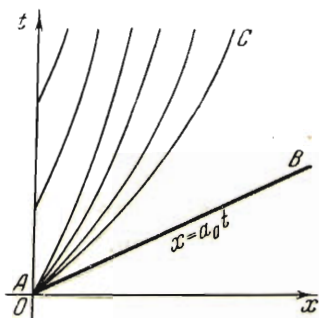
**§ 2. Случай убывающего предела упругости.** Этот случай имеет место при повторных ударах по одному и тому же концу стержня. В работе [1] рассмотрена задача о накоплении остаточных деформаций концевого сечения стержня для случая линейного упрочнения.

Здесь задача рассматривается в общей постановке для любой зависимости  $\sigma = \sigma(\epsilon)$ ; для случая линейного упрочнения дается решение, пригодное по всей длине стержня.

Рассмотрим сначала случай, когда давление, приложенное к концу стержня, нарастает от нуля.



Фиг. 4



Фиг. 5

Так как предел упругости убывает вдоль оси  $x$ , то картина движения в плоскости  $xt$  имеет вид, приведенный на фиг. 4. Кривая  $AB$  на фиг. 4 является границей упругих и пластических деформаций.

Мгновенно приложенную силу можно рассмотреть как предельный случай непрерывного нагружения.

Предельный переход дает решение, приведенное на фиг. 5. С переходом к пределу точка  $A$  (фиг. 4) перейдет в начало координат, а кривая  $AB$  в прямую  $x = a_0 t$ .

Прямая  $x = a_0 t$  будет движущейся поверхностью разрыва, при подходе к которой каждая частица стержня приобретает деформацию, равную собственному пределу упругих деформаций.

Если предположить, что кривая  $\sigma = \sigma(\epsilon)$  имеет непрерывную касательную, то указанная прямая будет характеристикой уравнения движения. Следовательно, на ней имеет место уравнение

$$du_t = a_0 du_x$$

Заметим, что  $a = a_0$  при  $x = a_0 t$  и свободный член уравнения (1.2) обращается в нуль.

С другой стороны, равенство нулю смещения вдоль той же прямой дает  $u_t = -a_0 u_x$ , что противоречит соотношению  $du_t = a_0 du_x$  на характеристике. Можно обойти это противоречие, допуская небольшой перелом касательной к кривой  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  при переходе от упругих к пластическим деформациям.

Если этот перелом существует, то характеристика  $AC$  будет отличной от прямой  $x = a_0 t$ ; при уменьшении перелома кривая  $AC$  будет приближаться к прямой  $x = a_0 t$  (фиг. 5).

Следовательно, определение волн Римана сводится к интегрированию системы уравнений характеристик (1.3) и (1.4) при условиях

$$u_x = \varepsilon_s, \quad u_t = -a_0 \varepsilon_s \quad \text{на } x = a_0 t$$

При подходе по различным направлениям к началу координат имеет место

$$u_t = - \int_0^{u_x} a(u_x - \varepsilon_s) du_x$$



Фиг. 6

Если диаграмма напряжения деформации задана в виде схемы Прандтля, то, очевидно (фиг. 6), характеристика  $AC$  перейдет в  $x = a_1 t$  и в ту же прямую перейдет весь пучок характеристик, исходящих из  $O$ .

Покажем непосредственно существование указанного решения для случая схемы Прандтля.

Очевидно, на ударной волне  $x = a_0 t$  имеем

$$u_x = \varepsilon_s, \quad u_t = -a_0 \varepsilon_s \quad (2.1)$$

Следовательно, в области  $BOC$  для уравнения (1.2) имеем задачу Коши. Заметим, что в этом случае в уравнении (1.2)  $a = a_1$ .

Очевидно, решение задачи Коши имеет вид:

$$u = \Phi_3(x - a_1 t) + \Phi_4(x + a_1 t) - \frac{a_0^2 - a_1^2}{a_1^2} \int_0^x \varepsilon_s(x) dx \quad (2.2)$$

Функции  $\Phi_3$  и  $\Phi_4$  определяются из условий на прямой  $x = a_0 t$ :

$$\begin{aligned} \Phi_3'([a_0 - a_1]t) + \Phi_4'([a_0 + a_1]t) - \left[ \frac{1}{\lambda^2} - 1 \right] \varepsilon_s(x) &= \varepsilon_s(x) \\ -a_1 \Phi_3'([a_0 - a_1]t) + a_1 \Phi_4'([a_0 + a_1]t) &= -a_1 \varepsilon_s(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \Phi_4'([a_0 + a_1]t) &= \frac{1}{2a_1} \left[ \frac{a_1}{\lambda^2} - a_0 \right] \varepsilon_s(a_1 t) \\ \Phi_3'([a_0 - a_1]t) &= \frac{1}{2a_1} \left[ \frac{a_1}{\lambda^2} + a_0 \right] \varepsilon_s(a_1 t) \end{aligned} \quad (2.4)$$



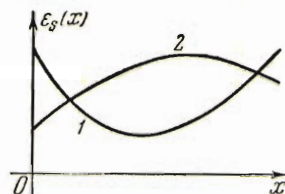
Пользуясь (2.3), вычислим  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$  на прямой  $x = a_0 t$ . Имеем

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = a_1 \{ \Phi_4''([a_0 + a_1]t) - \Phi_3''([a_0 - a_1]t) \} = -a_0 \frac{d\varepsilon_s}{dx}$$

Отсюда видим, что для случая убывающего предела упругости после прохождения волны сильного разрыва деформации растут по абсолютной величине.

Это показывает, что в области *ВОС* (фиг. 6) происходит активная деформация.

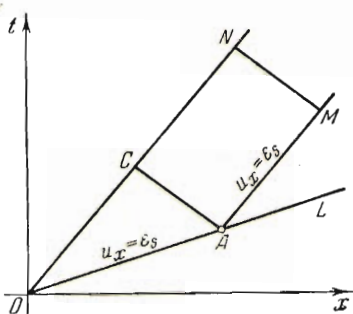
Прямая  $x = a_1 t$  является волной сильного разрыва. Если нагрузка приложена к торцу стержня мгновенно и затем монотонно убывает, то прямая  $x = a_1 t$  будет также и волной разгрузки.



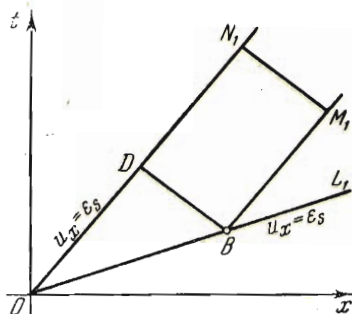
Фиг. 7

Задача о волне разгрузки может быть решена для конечного стержня с учетом отражающей волны, которая может быть как волной нагрузки, так и разгрузки. В последнем случае задача легко решается, если волна разгрузки является и волной сильного разрыва.

Исходя из рассмотренных задач, можно дать решение вопроса для двух случаев характера распределения  $\varepsilon_s = \varepsilon_s(x)$  предела упругих деформаций, представленных на фиг. 7.



Фиг. 8



Фиг. 9

В первом случае (кривая 1 на фиг. 7) в предположении линейного упрочнения волновая система приведена на фиг. 8.

Для области *OAC* решение дается формулой (2.4); для области *AML* решение дается формулой (1.9).

Нахождение решения для области *ACNM* сводится к характеристической задаче Коши.

Дальнейшее исследование движения в этом случае также сводится к известным задачам математической физики.

Во втором случае (кривая 2 на фиг. 7) в предположении линейного упрочнения волновая система приведена на фиг. 9.

Для области *OBD* решение дается формулой (1.9), для области *BL<sub>1</sub>M<sub>1</sub>* — формулой (2.9). Нахождение решения в области *BDN<sub>1</sub>M<sub>1</sub>* сводится к характеристической задаче Коши.

**§ 3. Задача о накоплении остаточной деформации в стержне, при многократном ударе по абсолютно твердой плите.** Будем рассматривать удар стержня конечной длины  $l$ . Первоначально однородный по своим механическим свойствам стержень после первого удара будет иметь по длине переменный предел упругости.

Задачу можно обратить и рассматривать не удар стержня, а удар плиты бесконечной массы о стержень, причем задача будет равносильна задаче о распространении деформации вдоль стержня, одному концу которого сообщена постоянная скорость.

Поместим начало координат на конец стержня, соприкасающегося с плитой. Ось  $x$  направим по скорости удара. Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \left( a^2 = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}} \right) \quad (3.1)$$

где  $u$  — смещение частицы стержня,  $\sigma$  — условное напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения стержня,  $\rho$  — начальная массовая плотность.

Обозначая через  $v_0$  скорость удара и  $\varepsilon_m$  максимальную деформацию стержня, имеем

$$\frac{x}{l} = a(u_x), \quad v_0 = \int_0^{\varepsilon_m} a(u_x) du_x \quad (\varepsilon_m > 0, a > 0) \quad (3.2)$$

Формулы (3.2) показывают, что вдоль пучка прямых, исходящих из начала координат, деформации постоянные.

Когда волны сжатия достигнут конца стержня, они отразятся и стержень начнет разгружаться. Следовательно, на свободном конце стержня возникнет волна разгрузки, которая в данном случае будет волной сильного разрыва и будет распространяться с постоянной скоростью  $a_0$ . Уравнение волны разгрузки имеет вид (фиг. 10):

$$x + a_0 t = 2l \quad (3.3)$$

Обозначая через  $\varepsilon_0^\circ$  значение деформации на волне разгрузки со стороны волн Римана, на основании (3.2) и (3.3) имеем

$$a(\varepsilon_0^\circ) = \frac{x a_1}{2l - x} \quad (3.4)$$

Пользуясь законом разгрузки и формулой (3.4), легко получить закон распределения  $\sigma_s(x)$  предела упругости после первого удара.

Имеем

$$\sigma_s(x) = \sigma(\varepsilon_0^\circ) = \sigma\left(a^{-1}\left(\frac{x a_0}{2l - x}\right)\right) \quad (3.5)$$

Так как в области  $OBC$  (фиг. 10) для любого удара деформации постоянные, то, обозначая через  $\varepsilon_1^*$  остаточную деформацию после первого удара, получим

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_{m1} - \frac{\sigma_1(\varepsilon_{m1})}{E} \quad (3.6)$$

где индекс  $m$  указывает максимальную деформацию.



Для предела упругости  $\sigma_{1s}$  конечного сечения имеем

$$\sigma_{s1} = \sigma_1(\varepsilon_{m1}) \tag{3.7}$$

Из (3.2) имеем

$$v_0 = a_0 \varepsilon_{s,0} + \int_{\varepsilon_{s,0}}^{\varepsilon_m} a(u_x) du_x$$

В силу постоянства деформации в области *OBC* уравнение (3.1) в этой области всегда будет выполняться. Следовательно, для любого удара

$$v_0 = a_0 \varepsilon_{s,n-1} + \int_{\varepsilon_{s,n-1}}^{\varepsilon_{mn}} a(u_x) du_x \tag{3.8}$$

$$\varepsilon_n^* = \varepsilon_{mn} - \frac{\sigma_n(\varepsilon_{mn})}{E} = \varepsilon_{mn} - \varepsilon_{sn} \tag{3.9}$$

В этих формулах  $\varepsilon_{mn}$  — максимальная деформация после *n*-удара,  $\varepsilon_{sn}$  — упругая деформация после *n*-удара. Подставляя в (3.8) выражение для  $\varepsilon_{s,n-1}$ , получаем связь между максимальными деформациями при двух последовательных ударах с одной и той же скоростью

$$v_0 = a_0 \frac{\sigma[\varepsilon_{m,n-1} + \delta_n]}{E} + \int_{\sigma[\varepsilon_{mn} + \delta_n] / E}^{\varepsilon_{mn}} a(u_x) du_x \tag{3.10}$$

где

$$\delta_n = \sum_{v=1}^n \varepsilon_v^*$$

Докажем теорему: процесс упрочнения заканчивается только после бесконечно большого числа ударов.

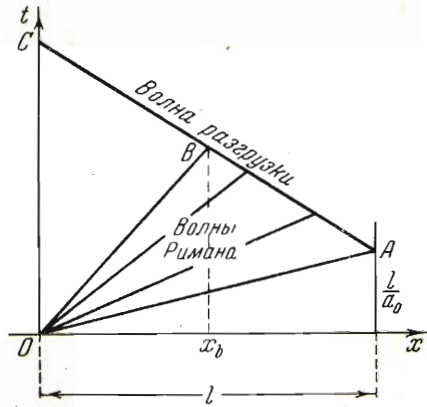
По теореме о среднем из (3.8) имеем

$$v_0 = a_0 \varepsilon_{s,n-1} + a_n (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{s,n-1}) \tag{3.11}$$

Заметим, что  $a_1 < a_n < a_0$ , где  $a_1 > 0$  есть минимальное значение, достижимое при данной величине скорости удара  $v_0$ , или вообще минимум *a* для всех деформаций. Здесь существенно, что  $a_1 > 0$ . Проводя прямую через точки  $\sigma_{n-1}$ ,  $\sigma_n$  и обозначая угол наклона ее к оси  $\varepsilon$  через  $E_n$ , имеем

$$\varepsilon_{sn} = \varepsilon_{s,n-1} + \frac{E_n}{E} (\varepsilon_{mn} - \varepsilon_{s,n-1}) \tag{3.12}$$

Заметим также, что  $E_1 < E_n < E$ , где  $E_1$  — значение  $d\sigma/d\varepsilon$ , соответствующее  $a_1$ .



Фиг. 10

Подставляя из (3.11) в (3.12), получим

$$\varepsilon_{sn} = \lambda_n \varepsilon_{s, n-1} + q_n \left( \lambda_n = 1 - \frac{E_n a_0}{E a_n}, q_n = \frac{E_n v_0}{E a_n} \right) \quad (3.13)$$

Предположим, что  $0 < \lambda_n < 1$ . Это требование накладывает некоторые условия на кривую сжатия. Нетрудно проверить, что оно удовлетворяется практически почти всегда. В частности, оно удовлетворяется в случае линейного упрочнения. В самом деле, в этом случае будем иметь

$$\lambda_n = \lambda_1 = 1 - \frac{E' a_0}{E V E' / \rho} = 1 - \sqrt{\frac{E'}{E}}$$

Так как условие  $0 < \lambda_n < 1$  удовлетворяется для случая линейного упрочнения, то оно будет выполняться для всех кривых сжатий, достаточно близких к линейному закону. Из (3.13) получим

$$\varepsilon_{sn} = q_n + \lambda_n [\lambda_{n-1} \varepsilon_{s, n-2} + q_{n-1}]$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sn} = & q_n + \lambda_n q_{n-1} + \lambda_n \lambda_{n-1} q_{n-2} + \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} q_{n-3} + \dots \\ & + \lambda_n \lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \dots \lambda_1 q_0 + \lambda_n \lambda_{n-1} \dots \lambda_1 \varepsilon_s^0 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Так как все члены этой суммы положительные при любом числе ударов, то деформация  $\varepsilon_{sn}$  увеличивается при возрастании  $n$ . Докажем, что  $\varepsilon_{sn}$  при  $n \rightarrow \infty$  стремится к пределу.

Так как  $\lambda_n < \lambda$ ,  $q_n < q$  для любого  $n$ , то из (3.14) имеем

$$\varepsilon_{sn} < q [1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \dots + \lambda^{n-1}] + \lambda^n \varepsilon_s^0$$

Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_{sn} < \frac{q}{1 - \lambda}$$

Таким образом, высказанная выше теорема доказана. В работе<sup>[1]</sup> это положение было доказано для случая линейного упрочнения. Здесь оно распространено для более общего случая.

Заменяя истинную диаграмму схемой Прандтля, можно решить вопрос не только о накоплении деформаций на конечном сечении, но может быть точно решена задача об изменении формы многократно ударяющегося по жесткой плите пластического стержня.

Поступила в редакцию  
26 IX 1949

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматуллин Х. А. О распространении волны разгрузки вдоль стержня переменного предела упругости. (Задача о накоплении остаточных деформаций). ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3.
2. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5-6.