Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБ ИСТОЧНИКАХ И СТОКАХ НА ПОВЕРХНОСТИ

П. Я. Полубаринова-Кочина

(Москва)

В работе рассматривается движение нефти в искривленном пласте, ограниченном некоторой поверхностью.

В теории фильтрации нефти совершенная скважина, т. е. проходящая через всю толщу пласта, рассматривается как линейный сток. Следовательно, на рассматриваемой поверхности нефтяной скважине соответствует точечный сток.

Ниже излагается общий метод построения функции Грина на искривленных поверхностях (т. е. построение потенциала скорости, отвечающего источнику или стоку). Этот метод иллюстрируется некоторыми примерами.

Аналогичная задача для сферической поверхности рассматривались Цермело[1] и Р. Э. Соловейчиком [2] в применении к исследованию движения вихрей. О. В. Голубева [3] рассмотрела вопрос о движении вихреисточников на сфере.

Такие движения представляют интерес для динамической метеорологии, так как при изучении циклонов и антициклонов, перемещающихся в больших областях, толщина слоя атмосферы может считаться малой и движение можно рассматривать как движение на поверхности.

В теории фильтрации в целях оценки влияния на приток к скважинам степени искривленности пласта рассматривалась задача о куполообразной залежи, причем последняя изображалась в виде части сферической поверхности [4].

Отметим, что К. А. Царевичем была проделана работа по изучению движения нефти в изогнутом цилиндрическом пласте.

1. Будем предполагать, что искривленный пласт, в котором происходит фильтрация, ограничен поверхностью

$$x = f_1(\alpha,\ \beta), \qquad y = f_2(\alpha,\ \beta), \qquad z = f_3(\alpha,\ \beta) \tag{1.1}$$

(где α и β — параметры) и близкой к ней поверхностью такой, что пласт имеет всюду одинаковую толщину $h = \delta n$, где δn — элемент нормали. Будем считать, что параметры α, β в уравнениях (1.1) выбраны так, что линии $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ образуют ортогональную систему. Тогда для элемента дуги поверхности имеем выражение

$$ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2 \tag{1.2}$$

где

$$A^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2, \qquad B^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2 \tag{1.3}$$

Обозначим физические составляющие вектора скорости вдоль координатных линий $\alpha = \text{const}$ и $\beta = \text{const}$ соответственно через u и v.

Тогда будем иметь

$$u = A\frac{d\alpha}{dt}, \qquad v = B\frac{d\beta}{dt} \tag{1.4}$$

При этом уравнения движения можно представить в виде

$$\frac{d}{dt}(Au) - \frac{u^2}{A}\frac{\partial A}{\partial \alpha} - \frac{v^2}{B}\frac{\partial B}{\partial \alpha} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + F_\alpha \tag{1.5}$$

$$\frac{d}{dt}(Bv) - \frac{u^2}{A}\frac{\partial A}{\partial \beta} - \frac{v^2}{B}\frac{\partial B}{\partial \beta} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + F_\beta$$

Здесь

$$\Phi = \int \frac{dp}{\rho} + \Phi_1$$

где p — давление, ρ — плотность, Φ_1 — потенциал внешних сил, F_α, F_β, — проекции других сил. В частности, в теории фильтрации жидкостей в пористых средах рассматриваются силы сопротивления, пропорциональные скоростям.

Раскрыв выражения полных производных по времени, уравнения (1.5) можно привести к виду уравнений Громеки-Лемба (1.6)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \xi v - \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) + F_\alpha, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -\xi u - \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\Phi + \frac{1}{2}q^2\right) + F_\beta$$

где ξ — вихрь скорости, q — величина вектора скорости:

$$\xi = \frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial \alpha}(Bv) - \frac{\partial}{\partial \beta}(Au)\right\}, \qquad q = \sqrt{u^2 + v^2} \tag{1.7}$$

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$AB\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \alpha}(A\rho u) + \frac{\partial}{\partial \beta}(B\rho v) = 0 \tag{1.8}$$

Поток P через замкнутый контур L определяется так:

$$P = \int\limits_L \rho q_n ds = \int\limits_L \rho\left(Bv\frac{d\alpha}{ds} - Au\frac{d\beta}{ds}\right) ds$$

где q_n — нормальная к контуру составляющая скорости.

Для циркуляции C по контуру L имеем формулу

$$C = \int\limits_L q_s\, ds = \int\limits_L Au\, d\alpha + Bv\, d\beta$$

где q_s — касательная составляющая вектора скорости.

Для замкнутого контура L, ограничивающего кусок поверхности Σ, имеем

$$C = \iint\limits_\Sigma \xi\, d\sigma, \qquad d\sigma = AB\, d\alpha\, d\beta$$

Если рассматривается движение на замкнутой поверхности, то

$$C = \iint\limits_\Sigma \xi\, d\sigma = 0$$

так как для вычисления C за контур L здесь следует взять кривую, которая стягивается в точку.

Для несжимаемой жидкости существует функция тока, так что

$$u = -\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, \qquad v = \frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}$$

В случае безвихревого движения существует потенциал скорости φ, так что

$$u = \frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}, \qquad v = \frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}$$

Для безвихревого движения несжимаемой жидкости потенциал скорости удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = \frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right)\right\} = 0 \tag{1.9}$$

2. Из теории поверхностей известно, что на произвольной поверхности можно выбрать изотермические координаты, т. е. такие, что системы координатных линий $\alpha = \text{const}$, $\beta = \text{const}$ на поверхности будут не только ортогональными, но и образующими квадратную сетку. Элемент дуги в изотермических координатах $\alpha\beta$ определяется равенством

$$ds^2 = \lambda(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2) \tag{2.1}$$

Так как в изотермических координатах A и B формулы (1.2) равны, то уравнение Лапласа (1.9) имеет тот же вид, что в декартовых координатах. Если положить $\alpha + i\beta = w$, выражение элемента дуги (2.1) примет вид:

$$ds^2 = \lambda\, dw\, d\overline{w} \tag{2.2}$$

Всевозможные изотермические системы на рассматриваемой поверхности получим, заменяя w в (2.2) на произвольную аналитическую функцию $f(w)$ или $f(\overline{w})$.

Семейство линий тока и линий равного потенциала источника на поверхности можно рассматривать как изотермическую систему координатных линий. Поэтому задача сводится к выбору подходящих изотермических координат.

Если для незамкнутой поверхности выбраны α и β так, что $\lambda = 1$:

$$ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2$$

то функция

$$\lg(w - w_1) = \lg|w - w_1| + i\arg(w - w_1)$$

(здесь $w_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ — постоянная) дает потенциал скорости Φ и функцию тока ψ в виде

$$\Phi = \frac{1}{2}\lg[(\alpha - \alpha_1)^2 + (\beta - \beta_1)^2], \qquad \psi = \operatorname{arctg}\frac{\beta - \beta_1}{\alpha - \alpha_1} \tag{2.3}$$

которые соответствуют источнику интенсивности 2π.

Например, для развертывающегося геликоида

$$z = a\varphi, \qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

элемент дуги будет

$$ds^2 = dr^2 + a^2 d\varphi^2 = dr^2 + dz^2$$

т. е. r и z будут изотермическими координатами. Поэтому согласно (2.3)

$$\Phi = \frac{1}{2}\lg[(r-r_1)^2 + (z-z_1)^2], \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{z-z_1}{r-r_1}$$

Линии тока будут линиями пересечения геликоида с поверхностями $z - z_1 = C(r - r_1)$, где C — произвольная постоянная, или иначе

$$(z - z_1 + Cr_1)^2 = C^2(x^2 + y^2)$$

Это круговые конусы с вершиной в точке $(0, 0, z_1 - Cr_1)$. Линии тока будут винтовыми коническими линиями. Среди них особенно простыми являются: прямая (при $C = 0$) — пересечение плоскости $z = z_1$ с геликоидом — и цилиндрическая винтовая линия (при $C = \infty$), начерченная на цилиндре $r = r_1$.

3. Цилиндрические поверхности. Пусть цилиндрическая поверхность образована движением прямой, параллельной оси z, вдоль направляющей

$$y = f(x)$$

Тогда для элемента дуги имеем

$$ds^2 = dz^2 + d\sigma^2$$

где $d\sigma$ — элемент дуги направляющей.

Если L — незамкнутая кривая, т. е. цилиндрическая поверхность не замкнута, то функция Грина и функция тока будут

$$\Phi = \frac{1}{2}\lg[(z-z_1)^2 + (\sigma-\sigma_1)^2], \quad \psi = \operatorname{arctg}\frac{\sigma-\sigma_1}{z-z_1}$$

Здесь

$$\sigma = \int\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx$$

Чтобы получить геометрическую картину течения на незамкнутой цилиндрической поверхности, достаточно взять семейство линий тока и эквипотенциалей для точечных источников на плоскости и наложить эту плоскость на цилиндрическую поверхность.

Если же цилиндрическая поверхность «замкнута», т. е. если ее направляющая L представляет замкнутую линию, то плоскость, наложенная на цилиндрическую поверхность, покроет ее бесчисленное множество раз и предыдущее выражение потенциала скорости уже не будет годиться. В этом случае поступим так. Разрежем цилиндр по образующей и развернем его на плоскость. Получим полосу ширины 2π. Пусть в точке w_1 этой полосы находится источник, причем границы полосы являются твердыми стенками. Тогда будем иметь, считая, что w_1 находится в середине полосы:

$$\Phi + i\Psi = \lg \operatorname{sh}\frac{\pi(w - w_1)}{l} \qquad \begin{pmatrix} w = z + i\sigma \\ w_1 = z_1 + i\sigma \end{pmatrix}$$

Функцию

$$\Phi = \lg\left|\operatorname{sh}\frac{\pi(w-w_1)}{l}\right| = \lg[\operatorname{ch}(z - z_1) - \cos(\sigma - \sigma_1)] + \text{const}$$

будем считать основной функцией Грина на цилиндрической поверхности.

Так как коэффициенты квадратичной формы $ds^2 = dz^2 + d\sigma^2$ равны единице, то физические составляющие u и v вектора скорости по координатным линиям r и σ будут здесь, как и для плоского течения, равны

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\operatorname{sh}(z - z_1)}{\operatorname{ch}(z - z_1) - \cos(\sigma - \sigma_1)}, \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\sin(\sigma - \sigma_1)}{\operatorname{ch}(z - z_1) - \cos(\sigma - \sigma_1)}$$

4. Поверхности вращения. Пусть поверхность S образована вращением кривой $z = f(r)$ вокруг оси z. Для элемента дуги, вводя долготу φ, отсчитываемую от произвольно выбранного меридиана, получаем

$$ds^2 = dr^2 + dz^2 + r^2 d\varphi^2 = [1 + f'^2(r)]\, dr^2 + r^2 d\varphi^2$$

или в изотермических координатах

$$ds^2 = r^2 (d\alpha^2 + d\varphi^2) \tag{4.1}$$

где

$$d\alpha = \frac{1}{r} \sqrt{1 + f'^2(r)}\, dr = \frac{d\sigma}{r}$$

В некоторых случаях удобно ввести обозначение

$$\alpha = \int \sqrt{1 + f'^2(r)}\, \frac{dr}{r} = \lg R \tag{4.2}$$

Если поверхность вращения не замкнута с обоих концов, то она топологически эквивалентна цилиндрической поверхности (замкнутой), поэтому для функции Грина можно взять выражение, аналогичное тому, которое указано для цилиндрической поверхности.

Поэтому, полагая $w = \alpha + i\varphi$, $w_1 = \alpha_1 + i\varphi_1$, имеем

$$\Phi = \lg [\operatorname{ch}(\alpha - \alpha_1) - \cos(\varphi - \varphi_1)] = \lg \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{R_1} + \frac{R_1}{R} \right) - \cos(\varphi - \varphi_1) \right]$$

или

$$\Phi = \lg [R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos(\varphi - \varphi_1)] - \lg R + \text{const} \tag{4.3}$$

На незамкнутой поверхности член $\lg R$ дает источники на полюсах, поэтому его можно отбросить и, следовательно, получим

$$\Phi = \lg [R^2 + R_1^2 - 2RR_1 \cos(\varphi - \varphi_1)] \tag{4.4}$$

Рассмотрим некоторые примеры.

5. Сфера. Напишем уравнение окружности в плоскости zr в виде

$$r^2 + z^2 = a^2, \quad \text{или} \quad r = a \sin\theta, \ z = a\cos\theta$$

где θ — дополнение широты. Для квадрата элемента дуги имеем

$$ds^2 = \frac{a^2 dr^2}{a^2 - r^2} + r^2\, d\varphi^2 = a^2\, d\theta^2 + a^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2$$

или

$$ds^2 = r^2 \left[\frac{a^2 dr^2}{r^2 (a^2 - r^2)} + d\varphi^2 \right] = a^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\theta^2}{\sin^2\theta} + d\varphi^2 \right)$$

Полагая

$$u = a \int \frac{dr}{r\sqrt{a^2 - r^2}} = \int \frac{d\theta}{\sin\theta} = \lg \frac{r}{a + \sqrt{a^2 - r^2}} = \lg \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$$

найдем

$$R = \frac{r}{a + \sqrt{a^2 - r^2}} = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$$

Согласно уравнению (4.4) выражение потенциала скорости источника для сферы будет

$$\Phi = \lg\left[\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\theta_1}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\cos(\varphi - \varphi_1)\right]$$

или после простых преобразований

$$\Phi = \lg[1 - \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)] - \lg(1 + \cos\theta)$$

Слагаемое $\lg(1 + \cos\theta)$ даст бесконечную скорость на полюсах сферы,— это точки, соответствующие бесконечно далеким точкам цилиндра или полосы, которая отображена в нашу сферу. При составлении потенциала скорости для всех источников и стоков на сфере с интенсивностями $q_1, q_2, \ldots, q_n$ это слагаемое пропадает, так как будет умножаться на сумму $q_1 + \cdots + q_n$, равную нулю.

Поэтому член $\lg(1 + \cos\theta)$ в выражении Φ можно исключить и принять за искомую функцию Грина выражение

$$\Phi = \lg[1 - \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)] \tag{5.1}$$

При этом физические составляющие u и v скорости по параллели θ и меридиану φ будут

$$u = \frac{1}{a}\,\frac{\sin\theta\cos\theta_1 - \cos\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)}{1 - \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

$$v = \frac{1}{a\sin\theta}\,\frac{\sin\theta\sin\theta_1\sin(\varphi - \varphi_1)}{1 - \cos\theta\cos\theta_1 - \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi - \varphi_1)}$$

6. Эллипсоид вращения. Пусть уравнение эллипса, вращающегося вокруг оси z, будет

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1$$

Тогда для α по формуле (4.2) имеем

$$\alpha = \int\sqrt{1 + f'^2}\,\frac{dr}{r} = \int\sqrt{1 + \frac{c^2r^2}{b^4}}\,\frac{dr}{r\sqrt{1 - r^2/b^2}} \qquad (c^2 = a^2 = b^2)$$

Произведя вычисления, найдем

$$\alpha = \lg\frac{r}{\sqrt{b^2 + c^2r^2/b^2} + \sqrt{b^2 - r^2}} + \frac{c}{2b}\arcsin\left(\frac{2c^2r^2}{a^2b^2} - \frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)$$

Поэтому

$$R = \frac{r}{\sqrt{b^2 + c^2r^2/b^2} + \sqrt{b^2 - r^2}}\exp\left[\arcsin\left(\frac{2c^2r^2}{a^2b^2} - \frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)\right]$$

Введем вместо r переменную θ, положив $r = b\sin\theta$ (для сферы, т. е. при $c = 0$, $a = b$, угол θ перейдет в дополнение широты). Тогда получим

$$R = \frac{\sin\theta}{\cos\theta + \sqrt{1 + c^2\sin^2\theta/b^2}}\exp\left[\arcsin\left(\frac{2c^2}{a^2}\sin^2\theta - \frac{c^2 - b^2}{a^2}\right)\right]$$

7. Трехосный эллипсоид. Известно выражение элемента дуги на поверхности эллипсоида

$$ds^2 = \frac{\rho - \rho_1}{4}(d\lambda^2 + d\lambda_1^2) \tag{7.1}$$

где

$$d\lambda = \frac{\sqrt{\rho}\, d\rho}{\sqrt{(p-\rho)(q-\rho)(\rho-r)}}, \qquad d\lambda_1 = \frac{\sqrt{\rho_1}\, d\rho_1}{\sqrt{(p-\rho_1)(q-\rho_1)(\rho_1-r)}} \tag{7.2}$$

причем

$$p = a^2, \qquad q = b^2, \qquad r = c^2$$

Здесь a, b, c — полуоси эллипсоида. Параметры ρ и ρ_1 удовлетворяют неравенствам

$$r < q < \rho < p, \qquad r < \rho_1 < q < p$$

Линии ρ и ρ_1 образуют ортогональную систему на поверхности эллипсоида. С помощью подстановок

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{q(p-\rho)}{\rho(\rho-q)}}, \qquad \sin\theta = \sqrt{\frac{q(\rho_1-r)}{\rho_1(q-\rho_1)}}$$

из (7.2) получим (7.3)

$$\lambda = \int_{\rho}^{a} \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{(p-\rho)(\rho-q)(\rho-r)\rho}} = \frac{2}{\sqrt{q(p-r)}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1+n^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$\lambda_1 = \int_{c}^{\rho_1} \frac{\rho_1\, d\rho_1}{\sqrt{(p-\rho_1)(q-\rho_1)(\rho_1-r)\rho_1}} = \frac{2r}{\sqrt{q(p-r)}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1-n_1^2\sin^2\theta)\sqrt{1-k_1^2\sin^2\theta}}$$

где

$$n^2 = \frac{p-q}{pq}, \qquad k^2 = \frac{(p-q)r}{(p-r)q}, \qquad n_1^2 = \frac{q-r}{q}, \qquad k_1^2 = \frac{p(q-r)}{q(p-r)}$$

Положим

$$u = F\left(\arcsin\sqrt{\frac{q(p-\rho)}{\rho(\rho-q)}},\ K\right), \qquad u_1 = F\left(\arcsin\sqrt{\frac{q(\rho_1-r)}{\rho_1(q-\rho_1)}},\ K_1\right)$$

$$\left(F = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\right)$$

Тогда входящие в формулы (5.3) интегралы третьего рода можно выразить через эллиптические функции ϑ. Получим

$$\lambda = \frac{ui}{K}\frac{\vartheta_1'(\alpha i/2K)}{\vartheta_1(\alpha i/2K)} - i\ln\frac{\vartheta_0[u+\alpha i]/2K}{\vartheta_0[u-\alpha i]/2K}$$

$$\lambda_1 = \frac{u_1}{K_1}\frac{\vartheta_1'(\alpha_1/2K_1)}{\vartheta_1(\alpha_1/2K_1)} + \ln\frac{\vartheta_0[\alpha_1-u_1]/2K_1}{\vartheta_0[\alpha_1+u_1]/2K_1}$$

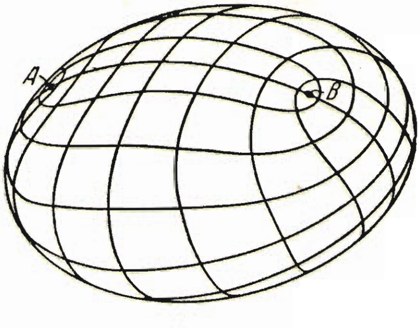
При $p = q$, т. е. для эллипсоида вращения, в данном случае укороченного, получим, что

$$\lambda = \frac{2\varphi}{\sqrt{p(p-r)}}, \qquad \lambda_1 = \frac{2r}{\sqrt{p(p-r)}} \int_0^{\theta} \frac{d\theta}{(1-n_1^2\sin^2\theta)\cos\theta} =$$

$$= \sqrt{\frac{p}{p-r}}\lg\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} - \lg\frac{1+\sqrt{(p-r)/p}\,\sin\theta}{1-\sqrt{(p-r)/p}\,\sin\theta}$$

и, следовательно, φ соответствует долготе. Если далее положить $p=q$, т. е. перейти к сфере, то увидим, что θ перейдет в дополнение широты.

Эллипсоид имеет четыре точки закругления (омбилические точки), т. е. точки, в которых главные радиусы кривизны равны между собой. На фиг. 1 видны две такие точки A и B, лежащие на одной горизонтальной линии.



Фиг. 1

Если $p=q$, то имеем укороченный эллипсоид вращения (вокруг оси z). В этом случае омбилические точки A и B совпадают, система координатных линий переходит в параллели и меридианы, μ становится равным φ. Следовательно, μ соответствует долготе точки на эллипсоиде вращения.

Положив $q=r$, получим удлиненный эллипсоид вращения (вокруг оси x). При этом совпадают пары омбилических точек, лежащие на одной вертикали. Параметр μ_1 становится равным θ, т. е. μ_1 в этом случае играет роль долготы.

Если мы примем $p=q=r$, то для сферы, в которую перейдет эллипсоид, φ и θ будут соответственно долготой и дополнением широты.

Возвращаясь к формулам для μ и μ_1, построим функцию, представляющую потенциал скорости для источника на поверхности трехосного эллипсоида в виде

$$\Phi = \lg\left[R^2 + R_1^2 - 2RR_1\cos_1(\varphi^* - \varphi_1^*)\right]$$

где

$$R = \left[\frac{\vartheta_0[a_1 - u_1]/2K_1}{\vartheta_0[a_1 + u_1]/2K_1}\right]^{r/q} \exp\left[\frac{ru_1}{qK_1}\,\frac{\vartheta_1' a_1/2K_1}{\vartheta_1 a_1/2K_1}\right]$$

$$\varphi^* = \frac{p}{q}\left[\frac{ui}{K}\,\frac{\vartheta_1' ai/2K}{\vartheta_1 ai/2K} - i\ln\frac{\vartheta_0[u+ai]/2K}{\vartheta_0[u-ai]/2K}\right]$$

Поступила в редакцию
30 XII 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Zermelo. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kugelfläche. Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1902. Bd. 47.
2. Соловейчик Р. Э. О движении вихрей на сферической поверхности. Труды Главной геофизической обсерватории. Гидромет. изд-во. Л.— М. 1937. Вып. 13. Стр. 3—19.
3. Голубева О. В. К вопросу о движении цепочек вихрей и вихреисточников на поверхности сферы. ДАН. 1949. Т. XV. № 5. Стр. 653—656.
4. Казарновская Б. Э., Полубаринова-Кочина П. Я. О движении подошвенных вод в нефтяных пластах. ПММ. 1943. Т. VII. Стр. 439—454.