

К ТЕОРИИ «РЕЗОНАНСА» В МЕХАНИЧЕСКОЙ АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ С ГИРОСКОПИЧЕСКИМИ ЧЛЕНАМИ

Н. В. Бутенин

(Ленинград)

В работе рассматривается поведение механической автоколебательной системы с гироскопическими силами, близкой к линейной консервативной, при действии на нее внешней синусоидальной силы. Рассмотрение ведется в предположении, что одна из нормальных частот линейной консервативной системы совпадает с частотой внешней силы ¹.

В качестве конкретного примера приводится механическая система с гироскопическим стабилизатором ². Показано, что при действии на механическую автоколебательную систему с двумя степенями свободы внешней синусоидальной силы характер устойчивых режимов существенно зависит от величины амплитуды этой силы. В рассматриваемой системе, которая при отсутствии сервомомента неустойчива, при совпадении одной из нормальных частот линейной консервативной системы с частотой внешней силы возможны устойчивые гармонические и бигармонические режимы. При достижении амплитудой внешней силы определенного значения устойчивые гармонические и бигармонические режимы в системе невозможны.

§ 1. Уравнения установления процесса движения. Пусть движение механической системы описывается системой уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - \kappa_1 \frac{dy}{dt} - n_1^2 x &= \mu f\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \kappa_2 \frac{dx}{dt} - n_2^2 y &= \mu g\left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt}\right) + Q' \sin t \end{aligned} \quad (1.1)$$

где f и g — нелинейные функции, μ — малый параметр, характеризующий близость рассматриваемой системы к линейной консервативной. Предположим также, что амплитуда внешней силы имеет порядок μ , и представим Q' в виде $Q' = \mu Q$.

Уравнение для определения нормальных частот линейной консервативной системы ($\mu = 0$) имеет вид:

$$\omega^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0 \quad (1.2)$$

¹ В работе автора ^[1] был рассмотрен случай, когда частота внешней силы была далека от обеих нормальных частот соответствующей линейной консервативной системы.

² Вопрос о вынужденных колебаниях в сложном генераторе рассмотрен А. Г. Майером ^[2].

Предположим, что $\omega_1^2 > \omega_2^2$, и примем $\omega_2^2 = 1$. Решение системы (1.1) будем искать в виде

$$x = a \sin(\omega_1 t + \psi) + b \sin(t + \varphi) \quad (1.3)$$

$$y = (ak_1 + d) \cos(\omega_1 t + \psi - \gamma) + (bk_2 + d_1) \cos(t + \varphi - \gamma_1)$$

где

$$k_1 = \frac{\omega_1^2 + n_1^2}{x_1 \omega_1} = \frac{x_2 \omega_1}{\omega_1^2 + n_2^2}, \quad k_2 = \frac{1 + n_1^2}{x_1} = \frac{x_2}{1 + n_2^2}$$

так называемые «коэффициенты распределения» линейной системы. В решении (1.3) будем считать a, b, ψ, φ медленно меняющимися функциями времени, т. е. будем считать, что производные этих функций по t имеют порядок μ , вторые производные — порядок μ^2 и т. д. Поправки на амплитуды и частоты d, γ, d_1 и γ_1 будем считать медленно меняющимися функциями порядка μ . Для удобства в дальнейшем представим решение (1.3) в виде

$$x = a \sin(\omega_1 t + \psi) + b_1 \sin t + b_2 \cos t \quad (1.4)$$

$$y = (ak_1 + d) \cos(\omega_1 t + \psi) + a_1 \sin(\omega_1 t + \psi) + b_1 k_2 \cos t - b_2 k_2 \sin t + b_3 \sin t + b_4 \cos t$$

где a, b_1, b_2, ψ — медленно меняющиеся функции времени, а d, a_1, b_3 и b_4 — медленно меняющиеся функции времени порядка μ (членами порядка μ^2 пренебрегаем).

Подставляя решение (1.4) в уравнение (1.1), получим

$$\left[a \frac{d\psi}{dt} (k_1 x_1 - 2\omega_1) + \omega_1 x_1 d \right] \sin \xi + \left[\frac{da}{dt} (2\omega_1 - k_1 x_1) - a_1 x_1 \omega_1 \right] \cos \xi + \\ + \left[\frac{db_2}{dt} (x_1 k_2 - 2) + b_4 x_1 \right] \sin t + \left[\frac{db_1}{dt} (2 - x_1 k_2) - b_3 x_1 \right] \cos t = \mu f^* \quad (1.5)$$

$$\left[a \frac{d\psi}{dt} (x_2 - 2k_1 \omega_1) - d(\omega_1^2 + n_2^2) \right] \cos \xi + \left[\frac{da}{dt} (x_2 - 2k_1 \omega_1) - a_1 (\omega_1^2 + n_2^2) \right] \sin \xi + \\ + \left[\frac{db_2}{dt} (x_2 - 2k_2) + b_4 (1 + n_2^2) \right] \cos t + \left[\frac{db_1}{dt} (x_2 - 2k_2) - b_3 (1 + n_2^2) - \mu Q \right] \sin t = \mu g^* \quad (1.6)$$

Здесь

$$f^* = f(a \sin \xi + b_1 \sin t + b_2 \cos t, a \omega_1 \cos \xi + b_1 \cos t - b_2 \sin t, ak_1 \cos \xi + \\ + b_1 k_2 \cos t - b_2 k_2 \sin t, -ak_1 \omega_1 \sin \xi - b_1 k_2 \sin t - b_2 k_2 \cos t)$$

$$g^* = g(a \sin \xi + b_1 \sin t + b_2 \cos t, a \omega_1 \cos \xi + b_1 \cos t - b_2 \sin t, ak_1 \cos \xi + \\ + b_1 k_2 \cos t - b_2 k_2 \sin t, -ak_1 \omega_1 \sin \xi - b_1 k_2 \sin t - b_2 k_2 \cos t)$$

причем $\xi = \omega_1 t + \psi$.

Будем считать, что изменения амплитуд будут происходить значительно медленнее по сравнению с колебаниями, происходящими в системе¹. Поэтому можно, умножив последовательно выражение (1.5) на $\sin \xi, \cos \xi, \sin t, \cos t$ и выражение (1.6) на $\cos \xi, \sin \xi, \cos t, \sin t$, взять их средние значения за периоды $2\pi/\omega_1$ и 2π .

¹ Обоснованию и применению указанного предположения посвящена большая литература [3-8].

Таким образом получим

$$\begin{aligned} -\frac{db_2}{dt}(2-x_1k_2) + b_4x_1 &= \mu A_1 \\ \frac{db_1}{dt}(2-x_1k_2) - b_3x_1 &= \mu A_2 \\ \frac{da}{dt}(2\omega_1-x_1k_1) - a_1x_1\omega_1 &= \mu A_3 \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} a \frac{d\psi}{dt}(k_1x_1-2\omega_1) + d\omega_1x_1 &= \mu A_4 \\ \frac{db_2}{dt}(x_2-2k_2) - b_4(1+n_2^2) &= \mu B_1 \\ \frac{db_1}{dt}(x_2-2k_2) - b_3(1+n_2^2) &= \mu B_2 + \mu Q \\ -\frac{da}{dt}(2k_1\omega_1-x_2) - a_1(\omega_1^2+n_2^2) &= \mu B_3 \\ a \frac{d\psi}{dt}(x_2-2k_1\omega_1) - d(\omega_1^2+n_2^2) &= \mu B_4 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Здесь

$$A_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f^* \frac{\cos t}{\cos \xi} \frac{\sin t}{\sin \xi} d\xi dt, \quad B_\nu = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g^* \frac{\sin t}{\sin \xi} \frac{\cos t}{\cos \xi} d\xi dt \quad (\nu=1, 2, 3, 4) \quad (1.9)$$

Исключая из уравнений (1.7) и (1.8) величины b_4, b_3, a_1, d , получим

$$\begin{aligned} \frac{db_2}{dt} \frac{2(\omega_1^2-1)}{1+n_2^2} &= \mu \left[A_1 + k_2 \frac{x_1}{x_2} B_1 \right] \\ \frac{db_1}{dt} \frac{2(\omega_1^2-1)}{1+n_2^2} &= \mu \left[-A_2 + k_2 \frac{x_1}{x_2} B_2 + k_2 \frac{x_1}{x_2} Q \right] \\ \frac{da}{dt} \frac{2\omega_1(\omega_1^2-1)}{\omega_1^2+n_2^2} &= \mu \left[A_3 - k_1 \frac{x_1}{x_2} B_3 \right] \\ a \frac{d\psi}{dt} \frac{2\omega_1(\omega_1^2-1)}{\omega_1^2+n_2^2} &= -\mu \left[A_4 + k_1 \frac{x_1}{x_2} B_4 \right] \end{aligned} \quad (1.10)$$

При вычислении следует иметь в виду соотношения

$$\omega_1^2 = n_1^2 n_2^2, \quad 1 + \omega_1^2 = x_1 x_2 - n_1^2 - n_2^2$$

Если $\omega_1^2 = 1$, то решение системы (1.1) следует искать в виде

$$\begin{aligned} x &= a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin(\omega_2 t + \psi) \\ y &= a_1 k_1 \cos t - a_2 k_1 \sin t + (b k_2 + d) \cos(\omega_2 t + \psi) + \\ &\quad + b_1 \sin(\omega_2 t + \psi) + a_3 \sin t + a_4 \cos t \end{aligned} \quad (1.11)$$

где ω_2^2 — корень уравнения (1.2); а

$$k_1 = \frac{1+n_1^2}{x_1} = \frac{x_2}{1+n_2^2}, \quad k_2 = \frac{\omega_2^2+n_1^2}{x_1\omega_2} = \frac{x_2\omega_2}{\omega_2^2+n_2^2}$$

Как и ранее, будем считать a_1, a_2, b и ψ медленно меняющимися функциями времени, причем первые производные их по t имеют порядок μ , вторые — μ^2 и т. д. Величины d, b_1, a_3, a_4 будем считать медленно меняющимися функциями времени порядка μ .

Совершенно аналогично предыдущему получим

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{dt} \frac{2(1-\omega_2^2)}{1+n_2^2} &= -\mu \left[A_1 + k_1 \frac{x_1}{x_2} B_1 \right] \\ \frac{da_1}{dt} \frac{2(1-\omega_2^2)}{1+n_2^2} &= \mu \left[A_2 - k_1 \frac{x_1}{x_2} B_2 - k_1 \frac{x_1}{x_2} Q \right] \\ \frac{db}{dt} \frac{2\omega_2(1-\omega_2^2)}{\omega_2^2+n_2^2} &= -\mu \left[A_3 - k_2 \frac{x_1}{x_2} B_3 \right] \\ b \frac{d\psi}{dt} \frac{2\omega_2(1-\omega_2^2)}{\omega_2^2+n_2^2} &= \mu \left[A_4 + k_2 \frac{x_1}{x_2} B_4 \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

Значения $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ вычисляются по формулам (1.9), в которых будет $\xi = \omega_2 t + \psi$ и

$$f^* = f(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \xi, a_1 \cos t - a_2 \sin t + b\omega_2 \cos \xi, a_1 k_1 \cos t - a_2 k_1 \sin t + b k_2 \cos \xi, -a_1 k_1 \sin t - a_2 k_1 \cos t - b k_2 \omega_2 \sin \xi)$$

$$g^* = g(a_1 \sin t + a_2 \cos t + b \sin \xi, a_1 \cos t - a_2 \sin t + b\omega_2 \cos \xi, a_1 k_1 \cos t - a_2 k_1 \sin t + b k_2 \cos \xi, -a_1 k_1 \sin t - a_2 k_1 \cos t - b k_2 \omega_2 \sin \xi)$$

§ 2. Уравнения движения механической системы с гироскопическим стабилизатором. В качестве конкретного примера рассмотрим однорельсовый вагон с гироскопической стабилизацией. Предположим, что на вагон действует внешняя синусоидальная сила $Q' \sin qt$ (q — частота внешней силы). При отсутствии сервомомента, ускоряющего прецессию рамы гироскопа, такая механическая система неустойчива [9]. Для получения устойчивых режимов вводят специальный сервомомент.

Уравнения движения такой механической системы будут

$$\begin{aligned} A_0 \frac{d^2 x}{dt^2} - C\omega \frac{dy}{dt} - ph_1 x &= -\gamma'' \frac{dx}{dt} + M_x \left(x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right) \\ I_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + C\omega \frac{dx}{dt} - Ph_2 y &= -\gamma' \frac{dy}{dt} + Q' \sin qt \end{aligned} \quad (2.1)$$

где x — угол поворота рамы гироскопа, y — угол отклонения вагона от вертикали, M_x — стабилизирующий сервомомент¹. Вводим обозначения

$$x_1 = \frac{C\omega}{A_0}, \quad x_2 = \frac{C\omega}{I_0}, \quad n_1^2 = \frac{ph_1}{A_0}, \quad n_2^2 = \frac{ph_2}{I_0}, \quad \tau_1 = qt$$

и аппроксимируем сервомомент M_x кубической параболой^[1]

$$M_x = \left[\alpha' - \beta' \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] \frac{dx}{dt} = \left[\alpha' - \beta' q^2 \left(\frac{dx}{d\tau_1} \right)^2 \right] q \frac{dx}{d\tau_1} \quad (\alpha' > 0, \beta' > 0)$$

Уравнения (2.7) теперь примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\tau_1^2} - \frac{x_1}{q} \frac{dy}{d\tau_1} - \frac{n_1^2}{q^2} x &= -\frac{\gamma''}{A_0 q} \frac{dx}{d\tau_1} + \frac{1}{A_0 q} \left[\alpha' - \beta' q^2 \left(\frac{dx}{d\tau_1} \right)^2 \right] \frac{dx}{d\tau_1} \\ \frac{d^2 y}{d\tau_1^2} + \frac{x_2}{q} \frac{dx}{d\tau_1} - \frac{n_2^2}{q^2} y &= -\frac{\gamma'}{I_0 q} \frac{dy}{d\tau_1} + \frac{Q'}{I_0 q^2} \sin \tau_1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹ Смысл остальных величин, входящих в уравнения, указан в работе [1].

Предположим, что рассматриваемая система близка к линейной консервативной, т. е. предположим, что безразмерные величины

$$\frac{\gamma''}{A_0 q} \ll 1, \quad \frac{\gamma'}{I_0 q} \ll 1, \quad \frac{\alpha'}{A_0 q} \ll 1, \quad \frac{\beta' q}{A_0} \ll 1$$

т. е. затухание, а также сервомомент достаточно малы по сравнению с моментами сил инерции при парциальных колебаниях. Предположим, что амплитуда внешней силы имеет порядок μ , т. е. $Q' = \mu Q''$.

Уравнения (2.2) окончательно будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{a^2 x}{d\tau_1^2} - \frac{\kappa_1}{q} \frac{dy}{d\tau_1} - \frac{n_1^2}{q^2} x &= \mu \frac{n_1}{q} \left[\frac{dx}{a\tau_1} - \beta \left(\frac{dx}{d\tau_1} \right)^3 \right] \\ \frac{a^2 y}{d\tau_1^2} + \frac{\kappa_2}{q} \frac{dx}{d\tau_1} - \frac{n_2^2}{q^2} y &= \mu \frac{n_1}{q} \left(-\lambda \frac{dy}{d\tau_1} \right) + \mu Q \sin \tau_1 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь

$$\mu = \frac{\alpha' - \gamma''}{A_0 n_1}, \quad \beta = \frac{\beta'}{\alpha' - \gamma''} q^2, \quad \lambda = \frac{A_0 \gamma'}{I_0 (\alpha' - \gamma'')}, \quad Q = \frac{Q''}{I_0 q^2}$$

При этом принимаем, что $\alpha' > \gamma''$.

Уравнения (2.3) имеют вид уравнений (1.1), причем

$$f\left(x, \frac{dx}{d\tau_1}, y, \frac{dy}{d\tau_1}\right) = \frac{n_1}{q} \left[\frac{dx}{a\tau_1} - \beta \left(\frac{dx}{d\tau_1} \right)^3 \right], \quad g\left(x, \frac{dx}{d\tau_1}, y, \frac{dy}{d\tau_1}\right) = \frac{n_1}{q} \left(-\lambda \frac{dy}{d\tau_1} \right)$$

§ 3. Случай $\omega_2^2 = q^2$. Решение уравнений (2.3) будем искать в виде (1.4). Вычисляя по формулам (1.9) значения $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$ и подставляя их в уравнения (1.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= Au [b_0 + u^2 + v^2 + 2w] + Q^* \\ \frac{dv}{d\tau} &= Av [b_0 + u^2 + v^2 + 2w] \quad (\psi = \text{const}) \\ \frac{dw}{d\tau} &= Bw [a_0 - (2u^2 + 2v^2 + w)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$\begin{aligned} u &= b_1, & A &= \frac{3\beta}{4} > 0, & \tau &= \frac{\mu (q^2 + n_2^2) n_1}{2 (\omega_1^2 - q^2)} t \\ v &= b_2, & B &= \frac{3\beta}{2} \frac{\omega_1^2 + n_2^2}{q^2 + n_2^2} > 0, & a_0 &= \frac{4}{3\beta} \left(1 - \lambda k_1^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \\ w &= a^2 \frac{\omega_1^2}{q^2}, & Q^* &= k_2 \frac{q}{n_1} \frac{\kappa_1}{\kappa_2} Q, & b_0 &= -\frac{4}{3\beta} \left(1 - \lambda k_2^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \end{aligned}$$

При этом частоты ω_1 и $\omega_2 = q$ определяются как корни уравнения

$$\omega^4 + (n_1^2 + n_2^2 - \kappa_1 \kappa_2) \omega^2 + n_1^2 n_2^2 = 0 \quad (3.2)$$

Особые точки системы (3.1) найдем из уравнения

$$Au (b_0 + u^2 + v^2 + 2w) + Q^* = 0$$

$$v (b_0 + u^2 + v^2 + 2w) = 0, \quad w [a_0 - (2u^2 + 2v^2 + w)] = 0 \quad (3.3)$$

Рассмотрим случай $Q^* = 0$. Вводя $\rho = u^2 + v^2$, получим следующие особые точки и линии [1].

Точка $P_1 (u_1 = 0, v_1 = 0, w_1 = 0)$, которая согласно (1.3) соответствует состоянию равновесия механической системы.

Точка $P_2 (u_2 = 0, v_2 = 0, w_2 = a_0)$, которая соответствует гармоническому движению механической системы с частотой ω_1 .

Линия $\rho_3 = -b_0, w_3 = 0$, точки которой соответствуют гармоническому движению системы с частотой $\omega_2 = q$.

Линия $\rho_4 = 1/3(2a_0 + b_0), w_4 = -1/3(2b_0 + a_0)$, точки которой соответствуют бигармоническому движению с частотами ω_1 и $\omega_2 = q$.

Приведем условия устойчивости этих особых точек и линий [4, 10].

Точка P_1 будет устойчивой при $a_0 < 0$ и $b_0 < 0$.

Точка P_2 будет устойчивой при $a_0 > 0, b_0 < 0$ и $2a_0 < -b_0$.

Линия $\rho_3 = -b_0, w_3 = 0$ будет устойчивой при $b_0 > 0$ и $2b_0 + a_0 < 0$, но при этом условии линия не существует, так как $\rho_3 = -b_0 > 0$. Следовательно, при $Q^* = 0$ гармоническое движение с частотой $\omega_2 = q$ всегда неустойчиво.

Для линии $\rho_4 = 1/3(2a_0 + b_0), w_4 = -1/3(2b_0 + a_0)$ условием устойчивости будет $Bw_4 - 2A\rho_4 > 0$, т. е.

$$a_0 < -b_0 \frac{1 + 2\alpha}{2 + \alpha} \quad \left(\alpha = \frac{B}{2A} = \frac{\omega_1^2 + n_2^2}{q^2 + n_2^2} > 1 \right)$$

Перейдем к исследованию особых течек и линий системы уравнений (3.1) при $Q^* \neq 0$. На основании (3.3) будем иметь

$$\begin{aligned} \rho = u^2, & \quad \rho(b_0 + \rho + 2w)^2 = Q_0^2 \\ v = 0, & \quad w[a_0 - (2\rho + w)] = 0 \end{aligned} \quad \left(Q_0^2 = \frac{Q^{*2}}{A^2} \right) \quad (3.4)$$

Рассмотрим особые точки на плоскости $uv (w = 0)$. На основании (3.4) особые точки будут определяться уравнением

$$\rho(b_0 + \rho)^2 = Q_0^2 \quad (3.5)$$

Таким образом, все особые точки плоскости uv лежат на оси u . Уравнение (3.5) дает одновременно и амплитудную кривую периодических движений с частотой $\omega_2 = q$. В самом деле, обозначая через $R^2 = \rho(Q_0)$, будем иметь

$$R^2(b_0 + R^2)^2 = Q_0^2 \quad (3.6)$$

Характеристическое уравнение для особых точек на оси u будет

$$[A(b_0 + 3R^2) - S][A(b_0 + R^2) - S][B(a_0 - 2R^2) - S] = 0$$

Точки будут устойчивы при выполнении условий

$$a_0/2 < R^2 < -b_0/3 \quad (3.7)$$

Как видно из уравнений (3.4), особых точек на оси w не существует, т. е. при $Q_0 \neq 0$ периодические движения с частотой ω_1 невозможны.

Особые точки, соответствующие бигармоническому движению с частотами ω_1 и $\omega_2 = q$, определим из уравнений

$$\begin{aligned} \rho = u^2, & \quad \rho(b_0 + \rho + 2w)^2 = Q_0^2 \\ v = 0, & \quad a_0 - 2\rho - w = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Введем в рассмотрение величину $R^2 = \rho + \omega$, тогда на основании (3.8) получим

$$\rho = a_0 - R^2, \quad \omega = 2R^2 - a_0 \quad (3.9)$$

и, следовательно, уравнение

$$(a_0 - R^2)(b_0 - a_0 + 3R^2)^2 = Q_0^2 \quad (3.10)$$

будет определять значения R^2 , соответствующие бигармоническим движениям. В силу (3.9) область существования уравнения (3.10) ограничена условием

$$a_0 / 2 < R^2 < a_0 \quad (3.11)$$

Условия устойчивости бигармонических режимов найдем из характеристического уравнения

$$[A(b_0 - a_0 + 3R^2) - S] \{S^2 - S[A(b_0 + a_0 + R^2) + B(a_0 - 2R^2)] + AB(2R^2 - a_0)(7a_0 - b_0 - 9R^2)\} = 0$$

Условиями устойчивости, очевидно, будут

$$R^2 < \frac{a_0 - b_0}{3}, \quad R^2 < \frac{7a_0 - b_0}{9}$$

а также

$$A(b_0 + a_0 + R^2) + B(a_0 - 2R^2) < 0$$

или

$$R^2 > R_0^2 \quad (R_0^2 = a_0(1 + 2\alpha) + b_0 / (4\alpha - 1))$$

Таким образом, существование и устойчивость особых точек зависит от значений a_0 и b_0 , т. е. от значений параметров механической системы. Будем менять какой-либо один параметр системы, оставляя другие постоянными. Например, можно менять момент инерции вагона (см. [11]), при этом будет меняться только величина I_0 . В качестве величины, характеризующей это изменение одного из параметров, возьмем отношение парциальных частот $\zeta = n_2^2 / n_1^2$. Используя решение ω_1^2 и ω_2^2 уравнения (3.2), выразим величины a_0 и b_0 в следующем виде:

$$a_0 = \frac{4}{3\beta} [1 - \lambda_0 M(\zeta)], \quad b_0 = -\frac{4}{3\beta} [1 - \lambda_0 N(\zeta)] \quad (3.12)$$

где

$$M(\zeta) = \zeta \frac{\zeta(\sigma_0 - 1) + 1 + V[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}{\zeta(\sigma_0 + 1) - 1 + V[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}, \quad \sigma_0 = \frac{C^2 \omega^2}{A_0 P h_2}$$

$$N(\zeta) = \zeta \frac{\zeta(\sigma_0 - 1) + 1 - V[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}{(\sigma_0 + 1)\zeta - 1 - V[\zeta(\sigma_0 - 1) - 1]^2 - 4\zeta}, \quad \lambda_0 = \frac{\gamma'}{\alpha' - \gamma''} \frac{ph_1}{Ph_2}$$

Мы будем рассматривать только такие значения параметров системы, при которых линейная консервативная система стабилизирована гироскопом ($\omega_1^2 > 0$, $\omega_2^2 > 0$). Для рассматриваемого случая это будет при

$$\zeta > \zeta_0 = \frac{\sigma_0 + 1 + 2V\sigma_0}{(\sigma_0 - 1)^2}$$

На фиг. 1 (для $\lambda_0 < 1$) и фиг. 2 (для $\lambda_0 > 1$) построены графики для величин $a_0 = a_0(\zeta)$ и $b_0 = b_0(\zeta)$ при фиксированных значениях параметров σ_0 и λ_0 . При изменении σ_0 качественный вид графиков не меняется. Меняются лишь значения $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \dots$. Возможные соотношения между a_0 и b_0 при различных ζ приведены в табл. 1.

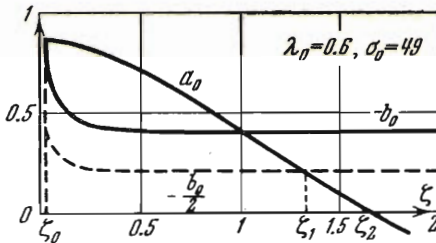
Перейдем теперь к исследованию движения механической системы при изменении амплитуды внешней силы Q_0 .

Предварительно отметим, что на плоскости $Q_0^2 R^2$ кривая (3.6) будет иметь вертикальные касательные в точках

$$(R^2 = -b_0, Q_0^2 = 0), \quad (R^2 = -\frac{b_0}{3}, Q_1^2 = -4\left(\frac{b_0}{3}\right)^3)$$

а кривая (3.10) в точках

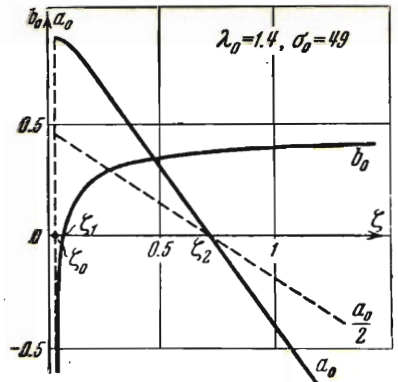
$$(R^2 = \frac{a_0 - b_0}{3}, Q_0^2 = 0), \quad (R^2 = \frac{7a_0 - b_0}{9}, Q_2^2 = \frac{4}{81}[2a_0 + b_0]^3)$$



Фиг. 1

Кривые (3.6) и (3.10) при $a_0 > 0$ всегда пересекаются в точке

$$(R^2 = \frac{a_0}{2}, Q_3^2 = \frac{a_0}{8}(2b_0 + a_0)^2)$$



Фиг. 2

Рассмотрим различные возможные случаи, указанные в табл. 1.

1. Если

$$a_0 < \frac{(1 + 2\alpha)}{2 + \alpha} |b_0|$$

то при $Q_0 = 0$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами $\omega_1, \omega_2 = q$ (в работе^[1] этот случай не отмечен). При $0 < Q_0^2 < Q_4^2$ имеет место устойчивое бигармоническое движение. При $Q_0^2 > Q_4^2$ система не имеет устойчивых гармонических и бигармонических движений (Q_4^2 — абсцисса точки пересечения кривой (3.10) и прямой $R^2 = R_0^2$). Если

$$a_0 > \frac{1 + 2\alpha}{2 + \alpha} |b_0|$$

то как при $Q_0 = 0$, так и при $Q_0 \neq 0$ система не имеет устойчивых гармонических и бигармонических движений.

2. При $Q_0 = 0$ будет устойчиво бигармоническое движение с частотами ω_1 и $\omega_2 = q$. При $Q_0 \neq 0$ возможны два подслучая.

Таблица 1

$\lambda_0 < 1$				$\lambda_0 > 1$	
1	2	3	4	5	6
$\zeta_0 < \zeta < 1$	$1 < \zeta < \zeta_1$	$\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$	$\zeta > \zeta_2$	$\zeta_1 < \zeta < \zeta_2$	$\zeta > \zeta_2$
$a_0 > 0$	$a_0 > 0$	$a_0 > 0$	$a_0 < 0$	$a_0 > 0$	$b_0 > 0$
$b_0 < 0$	$b_0 < 0$	$b_0 < 0$	$b_0 < 0$	$b_0 > 0$	$a_0 < 0$
$a_0 > b_0 $	$a_0 < b_0 $	$2a_0 < b_0 $			
$a_0 < 2 b_0 $	$2a_0 > b_0 $				

Если $2|b_0| < 3a_0$, то при $0 < Q_0^2 < Q_4^2$ устойчиво бигармоническое движение с частотами ω_1 и $\omega_2 = q$; при $Q_0^2 > Q_4^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

Если $2|b_0| > 3a_0$, то при $0 < Q_0^2 < Q_3^2$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами ω_1 и $\omega_2 = q$; при $Q_3^2 < Q_0^2 < Q_1^2$ система будет совершать устойчивое гармоническое движение с частотой $\omega_2 = q$; при $Q_0^2 > Q_1^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

3. При $Q_0 = 0$ система совершает устойчивое гармоническое движение с частотой ω_1 . При $0 < Q_0^2 < Q_3^2$ устойчиво бигармоническое движение с частотами ω_1 и $\omega_2 = q$. При $Q_3^2 < Q_0^2 < Q_1^2$ устойчиво гармоническое движение с частотой $\omega_2 = q$. При $Q_0^2 > Q_1^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

4. При $Q_0 = 0$ система находится в состоянии устойчивого равновесия. При $0 < Q_0^2 < Q_1^2$ система совершает гармоническое движение с частотой $\omega_2 = q$. При $Q_0^2 > Q_1^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

В случаях 5 и 6 система устойчивых гармонических и бигармонических движений не имеет.

§ 4. Случай $\omega_1^2 = q^2$. Решение уравнений (2.3) будем искать в виде (1.11). Вычисляя по формулам (1.9) значения $A_{1, 2, 3, 4}$ и $B_{1, 2, 3, 4}$ и подставляя их в уравнения (1.12) получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= Au [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - Q^* \\ \frac{dv}{d\tau} &= Av [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] \quad (\psi = \text{const}) \\ \frac{dw}{d\tau} &= Bw [b_0 + 2u^2 + 2v^2 + w] \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} u &= a_1, & A &= \frac{3\beta}{4} > 0, & \tau &= \frac{\mu(q^2 + n_2^2)n_1 t}{2(q^2 - \omega_2^2)} \\ v &= a_2, & B &= \frac{3\beta}{2} \frac{\omega_2^2 + n_2^2}{q^2 + n_2^2} > 0, & a_0 &= \frac{4}{3\beta} \left(1 - k_1^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \lambda\right) \\ w &= b^2 \frac{\omega_2^2}{q^2}, & Q^* &= k_1 \frac{q \kappa_1}{n_1 \kappa_2} Q, & b_0 &= -\frac{4}{3\beta} \left(1 - k_2^2 \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \lambda\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

т. е. a_0 и b_0 такие же, как и в § 3.

Особые точки и линии системы уравнений (4.1) определяются из уравнений

$$\begin{aligned} Au [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] - Q^* &= 0 \\ v [a_0 - (u^2 + v^2 + 2w)] &= 0 \\ w [b_0 + 2u^2 + 2v^2 + w] &= 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

При $Q^* = 0$ особые точки и линии будут:

Точка $P_1(u_1 = 0, v_1 = 0, w_1 = 0)$, которая соответствует состоянию покоя механической системы.

Точка $P_2(u_2 = 0, v_2 = 0, w_2 = -b_0)$, которая соответствует гармоническому движению системы с частотой ω_2 .

Линия $\rho_3 = a_0, w_3 = 0$, точки которой соответствуют гармоническим колебаниям с частотой $\omega_1 = q$.

Линия $\rho_4 = -1/3(2b_0 + a_0), w_4 = 1/3(2a_0 + b_0)$, точки которой соответствуют бигармоническим движениям системы с частотами $\omega_1 = q$ и ω_2 .

Точка P_1 будет устойчивой при $a_0 < 0$ и $b_0 < 0$.

Точка P_2 будет устойчивой при $b_0 > 0$ и $a_0 < -2b_0$; так как $w_4 = -b_0 > 0$, то точка P_2 будет всегда неустойчивой.

Точки линии $\rho_3 = a_0, w_3 = 0$ будут устойчивы при $a_0 > 0, b_0 < 0$ и $2a_0 < -b_0$.

Точки линии $\rho_4 = -1/3(2b_0 + a_0), w_4 = 1/3(2a_0 + b_0)$ будут устойчивы при $2A\rho_4 - Bw_4 > 0$.

Перейдем к исследованию особых точек и линий системы (4.1) при $Q^* \neq 0$. Из (4.3) следует

$$\begin{aligned} \rho = u^2, \quad \rho(a_0 - \rho - 2w)^2 = Q_0^2 \\ v = 0, \quad w(b_0 + 2\rho + w) = 0 \end{aligned} \quad \left(Q_0 = \frac{Q^*}{A}\right) \quad (4.4)$$

Найдем сначала особые точки на плоскости $w = 0$. Из уравнений (4.4) следует

$$\rho = u^2, \quad v = 0, \quad \rho(a_0 - \rho)^2 = Q_0^2$$

т. е. особые точки, соответствующие гармоническим движениям с частотой $\omega_1 = q$, расположены на оси u . Амплитудную кривую этих движений получим, заменяя ρ на R^2 :

$$R^2(a_0 - R^2)^2 = Q_0^2 \quad (4.5)$$

Характеристическое уравнение для особых точек на оси u будет

$$[A(a_0 - 3R^2) - S][A(a_0 - R^2) - S][B(b_0 + 2R^2) - S] = 0$$

Следовательно, условия устойчивости этих точек будут

$$a_0 < R^2 < -b_0/2$$

Особых точек на оси w нет, т. е. при $Q_0 \neq 0$ гармонические движения с частотой ω_2 невозможны. Перейдем к особым точкам вне осей u, v, w . Особые точки, определяемые уравнениями (4.4), соответствуют бигармоническим движениям системы с частотами $\omega_1 = q$ и ω_2 .

Введем в рассмотрение величину $R^2 = \rho + \omega$. Тогда на основании (4.4) получим

$$\rho = -(b_0 + R^2), \quad \omega = b_0 + 2R^2 \quad (4.6)$$

и, следовательно, уравнение

$$-(b_0 + R^2)(a_0 - b_0 - 3R^2)^2 = Q_0^2 \quad (4.7)$$

будет определять значения R^2 , соответствующие бигармоническим движениям. В силу (4.6) область существования уравнения (4.7) ограничена условием

$$-b_0/2 < R^2 < -b_0$$

Условия устойчивости бигармонических режимов найдем из характеристического уравнения

$$[A(a_0 - b_0 - 3R^2) - S] \{S^2 - S[A(a_0 + b_0 - R^2) + B(b_0 + 2R^2)] + AB(2R^2 + b_0)(a_0 - 7b_0 - 9R^2)\} = 0$$

Условия устойчивости, очевидно, будут

$$R^2 > \frac{a_0 - b_0}{3}, \quad R^2 < \frac{a_0 - 7b_0}{9}$$

а также

$$A(a_0 + b_0 - R^2) + B(b_0 + 2R^2) < 0$$

Отметим, что в плоскости $R^2 Q_0^2$ кривая (4.5) имеет вертикальные касательные в точках

$$(R^2 = a_0, Q_0^2 = 0), \quad (R^2 = \frac{a_0}{3}, Q_1^2 = 4(\frac{a_0}{3})^3)$$

кривая (4.7) — в точках

$$(R^2 = \frac{a_0 - b_0}{3}, Q_0^2 = 0), \quad (R^2 = \frac{a_0 - 7b_0}{9}, Q_2^2 = -\frac{4}{81}(2b_0 + a_0)^3)$$

Кривые (4.5) и (4.7) всегда пересекаются в точке

$$(R^2 = -\frac{b_0}{2}, Q_3^2 = -\frac{b_0}{8}(2a_0 + b_0)^2)$$

Перейдем теперь к исследованию движений механической системы при изменении Q_0 . Рассмотрим различные случаи, приведенные в табл. 1.

1. Если

$$a_0 < \frac{1 + 2\gamma}{2 + \gamma} |b_0| \quad (\gamma = \frac{2A}{B})$$

то при $0 \leq Q_0^2 < Q_2^2$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами $\omega_1 = q$, ω_2 . При $Q_0^2 > Q_2^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

Если

$$a_0 > \frac{1 + 2\gamma}{2 + \gamma} |b_0|$$

то как при $Q_0 = 0$, так и при $Q_0 \neq 0$ система устойчивых гармонических и бигармонических движений не имеет.

2. При $Q_0 = 0$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами $\omega_1 = q$ и ω_2 . При $0 < Q_0^2 < Q_2^2$ система совершает устойчивое бигармоническое движение с частотами $\omega_1 = q$, ω_2 . При $Q_0^2 > Q_2^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

3. При $Q_0 = 0$ система совершает гармоническое движение с частотой $\omega_1 = q$. При $0 < Q_0^2 < Q_3^2$ система совершает гармоническое движение с частотой $\omega_1 = q$. При $Q_3^2 < Q_0^2 < Q_2^3$ система совершает бигармоническое движение с частотами $\omega_1 = q$, ω_2 . При $Q_0^2 > Q_2^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

4. При $Q_0 = 0$ механическая система находится в состоянии равновесия. При $Q_0 \neq 0$ возможны два подслучая.

Если $2|a_0| > 5|b_0|$, то при $0 < Q_0^2 < Q_3^2$ система совершает гармоническое движение с частотой $\omega_1 = q$; при $Q_0^2 > Q_3^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

Если $2|a_0| < 5|b_0|$, то при $0 < Q_0^2 < Q_3^2$ система совершает гармоническое движение с частотой $\omega_1 = q$; при $Q_3^2 < Q_0^2 < Q_2^2$ система совершает бигармоническое движение с частотами $\omega_1 = q$ и ω_2 ; при $Q_0^2 > Q_2^2$ устойчивых гармонических и бигармонических движений нет.

В случаях 5 и 6 система не имеет устойчивых гармонических и бигармонических движений.

Поступило в редакцию
24 X 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Бутенин Н. В. К теории вынужденных колебаний в нелинейной механической системе с двумя степенями свободы. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 4
2. Майер А. Г. К теории вынужденных колебаний в сложном генераторе. Ученые записки Горьковского университета. 1937. Вып. 6.
3. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. Об обосновании одного метода приближенного решения дифференциальных уравнений. ЖЭТФ. 1934. Т. 4. стр. 147.
4. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Изд. АН СССР. 1945.
5. Булгаков Б. В. О применении метода Ван-дер-Поля к псевдолинейным колебательным системам со многими степенями свободы. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 6.
6. Теодорчик К. Ф. Автоколебательные системы. Гостехиздат. 1948.
7. Бутенин Н. В. Об одной задаче Кельвина, относящейся к теории часов. ЖЭТФ. 1940. Т. X. Вып. 11.
8. Бутенин Н. В. Механические автоколебательные системы с гироскопическими силами. ПММ. 1942. Т. VI. Вып. 5.
9. Лойдянский Л. Г., Лурье А. И. Теоретическая механика. ГТТИ. 1934. Ч. 3. Стр. 576.
10. Андронов А. А., Хайкин С. З. Теория колебаний. ОНТИ. 1937. Стр. 259.