Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБ ОДНОЙ СЧЕТНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

К. П. Персидский

(Алма-Ата)

§ 1. Постановка задачи и некоторые замечания. 1. Рассмотрим счетную систему уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\partial z_r}{\partial x_s} \left[\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk} x_k + L_s(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots)\right] = \sum_{g=1}^{\infty} q_{rg} z_g + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{rk} x_k + N_r(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

где L_s и N_r — вещественные и непрерывные функции в вещественной счетномерной области H:

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant R \quad (s = 1, 2, \ldots), \qquad |z_r| \leqslant R \quad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1.2}$$

а p_{sk}, q_{rg}, ω_{rk} суть вещественные и непрерывные функции от $t \geqslant 0$, причем $L_s \equiv 0$ и $N_r \equiv 0$, когда все x_s и z_r равны нулю.

Будем полагать, что в H функции L_s и N_r имеют непрерывные частные производные первого порядка по величинам $x_1, \ldots, z_1, \ldots$, которые тождественно равны нулю, когда все x_k, z_g равны нулю.

Допустим, что для любых двух точек $(t, x_1', x_2', \ldots, z_1', z_2', \ldots)$ и $(t, x_1'', x_2'', \ldots, z_1'', z_2'', \ldots)$ области H имеет место неравенство

$$|f(t, x_1', x_2', \ldots, z_1', z_2', \ldots) - f(t, x_1'', x_2'', \ldots, z_1'', z_2'', \ldots)| \leqslant A u^{1+\delta} \Delta u$$

где

$$u = \sup[|x_1'|, |x_1''|, \ldots, |z_1'|, |z_1''|, \ldots] \tag{1.3}$$

$$\Delta u = \sup[|x_1' - x_1''|, \ldots, |z_1' - z_1''|, \ldots]$$

величины A и $\delta \geqslant 0$ — некоторые постоянные, а $f(t, x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots)$ означает любую функцию L_s и N_r.

Пусть $x_1(\alpha), x_2(\alpha), \ldots, z_1(\alpha), z_2(\alpha), \ldots$ — система вещественных и непрерывных функций вещественного параметра α, удовлетворяющих условию

$$|x_s(\alpha + \Delta\alpha) - x_s(\alpha)| \leqslant D|\Delta\alpha|, \qquad |z_r(\alpha + \Delta\alpha) - z_r(\alpha)| \leqslant D|\Delta\alpha| \tag{1.4}$$

где D — любая заданная постоянная, и имеющих непрерывные производные первого порядка, причем

$$\sup[|x_1(\alpha)|, |x_2(\alpha)|, \ldots, |z_1(\alpha)|, |z_2(\alpha)|, \ldots] \leqslant R \tag{1.5}$$

Будем полагать, что тогда существует производная f_α', удовлетворяющая соотношению

$$f_\alpha' = \lim_{\Delta\alpha\to 0} \frac{f(t, x_1(\alpha+\Delta\alpha), \ldots, z_1(\alpha+\Delta\alpha), \ldots) - f(t, x_1(\alpha), \ldots z_1(\alpha), \ldots)}{\Delta\alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{dx_k(\alpha)}{d\alpha} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial z_g} \frac{dz_g(\alpha)}{d\alpha} \tag{1.6}$$

причем ряды эти сходятся. В дальнейшем функции L_s и N_r, удовлетворяющие условию (1.6), будем называть дифференцируемыми.

Пусть

$$x_1'(\alpha), x_2'(\alpha), \ldots, z_1'(\alpha), z_2'(\alpha), \ldots; x_1''(\alpha), x_2''(\alpha), \ldots, z_1''(\alpha), z_2''(\alpha), \ldots$$

— две системы вещественных и непрерывных функций вещественного параметра α, удовлетворяющих всем условиям, указанным в (1.4) и (1.5).

Будем полагать, что тогда имеет место неравенство (1.7)

$$\left| \frac{\partial f(t, x_1'(\alpha), \ldots, z_1'(\alpha), \ldots)}{\partial\alpha} - \frac{\partial f(t, x_1''(\alpha), \ldots, z_1''(\alpha), \ldots}{\partial\alpha} \right| \leqslant Au^\delta (u\Delta w + w\Delta u)$$

где

$$u = \sup[|x_1'(\alpha)|, |x_1''(\alpha)|, \ldots, |z_1'(\alpha)|, |z_1''(\alpha)|, \ldots]$$

$$\Delta u = \sup[|x_1'(\alpha) - x_1''(\alpha)|, \ldots, |z_1'(\alpha) - z_1''(\alpha)|, \ldots]$$

$$w = \sup\left[\left|\frac{dx_1'}{d\alpha}\right|, \left|\frac{dx_1''}{d\alpha}\right|, \ldots, \left|\frac{dz_1'}{d\alpha}\right|, \left|\frac{dz_1''}{d\alpha}\right|, \ldots\right]$$

$$\Delta w = \sup\left[\left|\frac{dx_1'}{d\alpha} - \frac{dx_1''}{d\alpha}\right|, \ldots, \left|\frac{dz_1'}{d\alpha} - \frac{dz_1''}{d\alpha}\right|, \ldots\right]$$

Относительно функций p_{sk} будем полагать, что при любом $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|p_{s1}| + |p_{s2}| + \cdots \leqslant p(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.8}$$

где функция $p(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$; причем, если обозначим через $x_s = x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ ограниченное решение системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.9}$$

проходящее через точку $(t_0, c_1, c_2, \ldots)$ области H, то при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots,)| \leqslant cBe^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.10}$$

где $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots]$, а $B \geqslant 1$ и $\alpha > 0$ — некоторые постоянные, которые не зависят от выбора $t_0 \geqslant 0$ и от выбора $c_1, c_2, \ldots$

Замечание: решение $x_1, x_2, \ldots$ системы уравнений (1.9) называем ограниченными [1], если для любого заданного сегмента $[0, a]$ найдется такое число $N_a < \infty$, что при любом $t \subset [0, a]$ имеет место неравенство

$$\sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] \leqslant N_a$$

Относительно функций q_{rg} будем полагать, что при любом $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|q_{r1}| + |q_{r2}| + \cdots \leqslant q(t) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

где функция $q(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$; причем, если обозначим через $y_r = y_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ ограниченное решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_r}{dt} = q_{r1}y_1 + q_{r2}y_2 + \cdots \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

проходящее через точку $(t_0, c_1, c_2, \ldots)$ области H, то при любом $t_0 \geqslant t \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|y_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant cP(t_0 - t) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1.13}$$

где $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots]$, а $P(\tau)$ есть полином некоторой степени $p \geqslant 0$ с положительными коэффициентами; причем этот полином не зависит от выбора $t_0 \geqslant 0$ и от выбора $c_1, c_2, \ldots$.

Относительно функций ω_{rk} будем полагать, что при любом $t \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|\omega_{r1}| + |\omega_{r2}| + \cdots \leqslant \omega \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{1.14}$$

где ω — некоторая постоянная.

В данной статье доказывается, что при соблюдении указанных условий относительно функций L_r, N_r, p_{sh}, q_{rg}, ω_{rk} найдется такое число $\nu > 0$, что при всех значениях $t \geqslant 0$, $|x_s| \leqslant \nu$ $(s = 1, 2, \ldots)$ существует такая счетная система ограниченных и дифференцируемых функций $z_r = z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$, которая является решением системы уравнений (1.1); причем при $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ функции $z_1, z_2, \ldots$ тождественно равны нулю.

2. Отметим некоторые следствия тех условий, которым удовлетворяют функции L_s и N_r.

Если в неравенстве (1.3) положить $x_1'' = x_2'' = \cdots = z_1'' = z_2'' = \cdots = 0$, $x_1' = x_1, x_2' = x_2, \ldots, z_1' = z_1, z_2' = z_2, \ldots$, то будем иметь

$$|f(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots)| \leqslant Au^{2+\delta} \qquad (u = \sup[|x_1|, \ldots, |z_1|, \ldots]) \tag{1.15}$$

Пусть $(t, x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots)$ есть наперед заданная точка области H. В неравенстве (1.7) функции $x_k'(\alpha)$, $x_k''(\alpha)$, $z_g'(\alpha)$, $z_g''(\alpha)$ всегда можно так подобрать, что при некотором значении α (например, при $\alpha = 0$) будут иметь место равенства

$$x_1'(\alpha) = x_1, \quad x_2'(\alpha) = x_2, \ldots, z_1'(\alpha) = z_1, \quad z_2'(\alpha) = z_2, \ldots$$
$$x_1''(\alpha) = 0, \quad x_2''(\alpha) = 0, \ldots, z_1''(\alpha) = 0, \quad z_2''(\alpha) = 0, \ldots$$

$$\frac{dx_k'(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dx_k''(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} +1, & \text{если } \partial f / \partial x_k \geqslant 0 \\ -1, & \text{если } \partial f / \partial x_k < 0 \end{cases}$$

$$\frac{dz_g'(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dz_g''(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} +1, & \text{если } \partial f / \partial z_g \geqslant 0 \\ -1, & \text{если } \partial f / \partial z_g < 0 \end{cases}$$

Тогда на основании (1.7) и (1.6) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| + \sum_{g=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial z_g}\right| \leqslant Au^{1+\delta} \qquad (u = \sup[|x_1|, \ldots, |z_1|, \ldots]) \qquad (1.16)$$

Пусть $(t, x_1', \ldots, z_1', \ldots)$ и $(t, x_1'', \ldots, z_1'', \ldots)$ — две наперед заданные точки области H. В неравенстве (1.7) функции $x_k'(\alpha)$, $x_k''(\alpha)$, $z_g'(\alpha)$, $z_g''(\alpha)$ всегда можно так подобрать, что при некотором значении α (например, при $\alpha = 0$) будут иметь место равенства

$$x_1'(\alpha) = x_1', \quad x_2'(\alpha) = x_2', \ldots, z_1'(\alpha) = z_1', \quad z_2'(\alpha) = z_2', \ldots$$

$$x_1''(\alpha) = x_1'', \quad x_2''(\alpha) = x_2'', \ldots, z_1''(\alpha) = z_1'', \quad z_2''(\alpha) = z_2'', \ldots$$

$$\frac{dx_k'(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dx_k''(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} +1, & \text{если } \partial f/\partial x_k' - \partial f/\partial x_k'' \geqslant 0 \\ -1, & \text{если } \partial f/\partial x_k' - \partial f/\partial x_k'' < 0 \end{cases}$$

$$\frac{dz_g'(\alpha)}{d\alpha} = \frac{dz_g''(\alpha)}{d\alpha} = \begin{cases} +1, & \text{если } \partial f/\partial z_g' - \partial f/\partial z_g'' \geqslant 0 \\ -1, & \text{если } \partial f/\partial z_g' - \partial f/\partial z_g'' < 0 \end{cases}$$

Тогда на основании (1.7) и (1.6) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k'} - \frac{\partial f}{\partial x_k''}\right| + \sum_{g=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial z_g'} - \frac{\partial f}{\partial z_g''}\right| \leqslant Au^{\delta}\Delta u \qquad (1.17)$$

где $u = \sup[|x_1'|, \ldots, |z_1'|, \ldots]$, а $\Delta u = \sup[|x_1' - x_1''|, \ldots, |z_1' - z_1''|, \ldots]$

Заметим, что неравенство (1.7) можно заменить неравенством (1.17). Действительно, из (1.17) получается неравенство (1.16), а отсюда на основании (1.6) получаем

$$y = \frac{\partial f(t, x_1'(\alpha), \ldots, z_1'(\alpha), \ldots)}{\partial \alpha} - \frac{\partial f(t, x_1''(\alpha), \ldots, z_1''(\alpha), \ldots)}{\partial \alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k'}\frac{dx_k'}{d\alpha} + \sum_{g=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial z_g'}\frac{dz_g'}{d\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k''}\frac{dx_k''}{d\alpha} - \sum_{g=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial z_g''}\frac{dz_g''}{d\alpha}$$

Следовательно,

$$|y| \leqslant Au^{\delta}w\,\Delta u + Au^{1+\delta}\,\Delta w = Au^{\delta}(u\,\Delta w + w\,\Delta u)$$

Условия (1.3), (1.6) и (1.7) можно заменить условием (1.17) и следующим условием: при любом $m = 1, 2, \ldots$ и для любых двух точек

$$(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, \quad x_m', \quad x_{m+1}', \ldots, \quad z_1, \ldots, \quad z_{m-1}, \quad z_m', \quad z_{m+1}', \ldots)$$

$$(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, \quad x_m'', \quad x_{m+1}'', \ldots, \quad z_1, \ldots, \quad z_{m-1}, \quad z_m'', \quad z_{m+1}'', \ldots)$$

области H имеет место неравенство

$$|f(t, x_1, \ldots, x_m', \ldots, z_1, \ldots, z_m', \ldots) -$$
$$- f(t, x_1, \ldots, x_m'', \ldots, z_1, \ldots, z_m'', \ldots)| \leqslant \Delta u\, \varepsilon_m(t) \qquad (1.18)$$

где $\Delta u = \sup[|x_m' - x_m''|, \ldots, |z_m' - z_m''|, \ldots]$, а $\varepsilon_m(t)$ при фиксированном значении t монотонно стремится к нулю при $m \to \infty$.

Действительно, пусть $(t, x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots)$ есть наперед заданная точка области H; причем

$$\sup[|x_1|, |x_2|, \ldots, |z_1|, \ldots, |z_m|, \ldots] < R$$

Пусть

$$\beta_k = +1, \quad \text{если} \quad \partial f / \partial x_k \geqslant 0, \qquad \gamma_g = +1, \quad \text{если} \quad \partial f / \partial z_g \geqslant 0$$
$$\beta_k = -1, \quad \text{если} \quad \partial f / \partial x_k < 0, \qquad \gamma_g = -1, \quad \text{если} \quad \partial f / \partial z_g < 0$$

Тогда при достаточно малом значении α будем иметь

$$I = f(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m + \alpha\beta_m, \ldots, x_{m+n} + \alpha\beta_{m+n}, x_{m+n+1}, \ldots, z_1, \ldots$$
$$\ldots, z_{m-1}, z_m + \alpha\gamma_m, \ldots, z_{m+n} + \alpha\gamma_{m+n}, z_{m+n+1}, \ldots) -$$
$$- f(t, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}, \ldots, z_1, \ldots, z_{m-1}, z_m, z_{m+1}, \ldots) =$$
$$= \alpha\,[(df/dx_m)\beta_m + \cdots + (df/dx_{m+n})\beta_{m+n} + \cdots$$
$$\ldots + (df/dz_m)\gamma_m + \cdots + (df/dz_{m+n})\gamma_{m+n}]$$

Отсюда на основании (1.18) будем иметь

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x_m}\right)\beta_m + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}}\right)\beta_{m+n} + \left(\frac{\partial f}{\partial z_m}\right)\gamma_m + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial z_{m+n}}\right)\gamma_{m+n}\right| \leqslant \varepsilon_m(t)$$

так как в данном случае $|\alpha| = \Delta u$. Взяв предел при $\alpha \to 0$, будем иметь

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\beta_m + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_{m+n}}\beta_{m+n} + \frac{\partial f}{\partial z_m}\gamma_m + \cdots + \frac{\partial f}{\partial z_{m+n}}\gamma_{m+n}\right| =$$
$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x_m}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}}\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial z_m}\right| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial z_{m+n}}\right| \leqslant \varepsilon_m(t)$$

При этом, на основании непрерывности частных производных это неравенство не нарушается и при $\sup[|x_1|, \ldots, |z_1|, \ldots] = R$.

Отсюда следует, что в любой точке $(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots)$ области H имеет место неравенство

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right| + \sum_{g=m}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial z_g}\right| \leqslant \varepsilon_m(t) \tag{1.19}$$

Положим, что $x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots$ — любые вещественные и непрерывные функции вещественного параметра α, удовлетворяющие всем условиям, указанным в (1.4) и (1.5). Пусть

$$\Delta f = f(t, x_1(\alpha + \Delta\alpha), \ldots, z_1(\alpha + \Delta\alpha), \ldots) - f(t, x_1(\alpha), \ldots, z_1(\alpha), \ldots) =$$
$$= \Delta f_m + \varepsilon\,\Delta x$$

где

$$\Delta x = \sup[|x_1(\alpha + \Delta\alpha) - x_1(\alpha)|, \ldots, |z_1(\alpha + \Delta\alpha) - z_1(\alpha)|, \ldots] \leqslant D\,|\alpha\Delta$$

$$\varepsilon\,\Delta x = f(t, x_1(\alpha + \Delta\alpha), \ldots, x_m(\alpha + \Delta\alpha), \ldots, z_1(\alpha + \Delta\alpha), \ldots$$
$$\ldots, z_m(\alpha + \Delta\alpha), \ldots) - f(t, x_1(\alpha + \Delta\alpha), \ldots, x_m(\alpha), \ldots$$
$$\ldots, z_1(\alpha + \Delta\alpha), \ldots, z_m(\alpha), \ldots)$$

и, следовательно, на основании (1.18)

$$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_m(t)$$

$$\Delta f_m = f(t,\ x_1(\alpha+\Delta\alpha),\ \ldots,\ x_m(\alpha),\ \ldots,\ z_1(\alpha+\Delta\alpha),\ \ldots,\ z_m(\alpha),\ \ldots) -$$
$$- f(t,\ x_1(\alpha),\ \ldots,\ x_m(\alpha),\ \ldots,\ z_1(\alpha),\ \ldots,\ z_m(\alpha),\ \ldots) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\Delta x_k + \sum_{g=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial z_g}\right)\Delta z_g$$

и где

$$\Delta x_k = x_k(\alpha+\Delta\alpha) - x_k(\alpha), \qquad \Delta z_g = z_g(\alpha+\Delta\alpha) - z_g(\alpha)$$

Пусть $\delta > 0$ — наперед заданное число. Пусть число m выбрано так, что при фиксированном значении t имеет место неравенство

$$\varepsilon_m(t) \leqslant \min\left(\frac{\delta}{3},\ \frac{\delta}{3D}\right)$$

Пусть $h = h(\delta) > 0$ выбрано так, что при $|\Delta\alpha| \leqslant h$ имеет место

$$\left|\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\frac{\Delta x_k}{\Delta\alpha} + \sum_{g=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial z_g}\right)\frac{\Delta z_g}{\Delta\alpha} - \sum_{k=1}^{m-1}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_{g=1}^{m-1}\frac{\partial f}{\partial z_g}\frac{dz_g}{d\alpha}\right| < \frac{\delta}{3}$$

На основании (1.19 имеем

$$\sum_{k=m}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial x^k}\right|\left|\frac{dx_k}{d\alpha}\right| + \sum_{g=m}^{\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial z_g}\right|\left|\frac{dz_g}{d\alpha}\right| \leqslant D\varepsilon_m(t) \leqslant \frac{\delta}{3}$$

На основании полученных неравенств при **любом** $|\Delta\alpha| \leqslant h$ имеем

$$\left|\frac{\Delta f}{\Delta\alpha} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{d\alpha} - \sum_{g=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial z_g}\frac{dz_g}{d\alpha}\right| \leqslant \delta$$

Следовательно,

$$f_\alpha' = \lim_{\Delta\alpha\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial x_k}\frac{dx_k}{d\alpha} + \sum_{g=1}^{\infty}\frac{\partial f}{\partial z_g}\frac{dz_g}{d\alpha}$$

т. е. выполняется условие (1.6) (условие дифференцируемости).

Ранее было показано, что неравенство (1.7) можно заменить неравенством (1.17). Пусть $(t,\ x_1',\ldots,z_1',\ldots)$ и $(t,\ x_1'',\ldots,z_1'',\ldots)$ — любые две точки области H. Положим

$$\Delta f = f(t, x_1', \ldots, z_1', \ldots) - f(t, x_1'', \ldots, z_1'', \ldots)$$

Имеем

$$\Delta f = \Delta f_m + \Delta f_\infty + \varepsilon\,\Delta u + \beta\,\Delta u$$

Здесь

1) $$\Delta f_m = f(t, x_1', \ldots, x_m', \ldots, z_1', \ldots, z_m', \ldots) -$$
$$- f(t, x_1'', \ldots, x_m', \ldots, z_1'', \ldots, z_m', \ldots) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_k' - x_k'') + \sum_{g=1}^{m-1}\left(\frac{\partial f}{\partial z_g}\right)(z_g' - z_g'')$$

2) $$\Delta f_\infty = -\beta\Delta u = \sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)(x_k' - x_k'') + \sum_{g=m}^{\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial z_g}\right)(z_g' - z_g'')$$

При этом, так как на основании (1.19) имеем $|\beta| \leqslant \varepsilon_m(t)$, то $|\Delta f_\infty| \leqslant \Delta u\, \varepsilon_m(t)$, где $\Delta u = \sup[|x_1' - x_1''|, \ldots, |z_1' - z_1''|, \ldots]$; заметим, что частные производные в выражениях Δf_m и Δf_∞ берутся для одной и той же промежуточной точки;

3) $$\varepsilon \Delta u = f(t, x_1'', \ldots, x_m', \ldots, z_1'', \ldots, z_m', \ldots) - f(t, x_1'', \ldots, x_m'', \ldots, z_1'', \ldots, z_m'', \ldots)$$

и, следовательно, на основании (1.18)

$$|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_m(t)$$

На основании (1.16) имеем

$$|\Delta f_m + \Delta f_\infty| \leqslant Au^{1+\delta}\Delta u \qquad (u = \sup[|x_1'|, |x_1''|, \ldots, |z_1'|, |z_1''|, \ldots])$$

Следовательно,

$$|\Delta f| \leqslant Au^{1+\delta}\Delta u + 2\Delta u\, \varepsilon_m(t)$$

Но $|\Delta f|$ не зависит от выбора числа m, т. е. от $\varepsilon_m(t) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда получаем

$$|\Delta f| = |f(t, x_1', \ldots, z_1', \ldots) - f(t, x_1'', \ldots, z_1'', \ldots)| \leqslant Au^{1+\delta}\Delta u$$

т. е. имеет место условие (1.3).

Тем самым доказано, что при выполнении условий (1.17) и (1.18) имеют место условия (1.3), (1.6) и (1.7).

Заметим, что если функция $f(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots)$ в области H имеет непрерывную частную производную первого порядка по t, а параметр α, входящий в (1.6), равен t, то тогда на основании (1.6) будем иметь

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial x}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \sum_{g=1}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial z_g}\frac{dz_g}{dt} \tag{1.20}$$

3. Сделаем замечания относительно условий (1.10) и (1.13). Пусть дана счетная система линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_s}{dt} = r_{s1}x_1 + r_{s2}x_2 + \cdots \qquad (s = 1, 2 \ldots,) \tag{1.21}$$

где $r_{sk} = r_{sk}(t)$ $(s, k = 1, 2, \ldots)$ — вещественные или комплексные функции, непрерывные при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющие неравенству

$$|r_{s1}| + |r_{s2}| + \cdots \leqslant r(t) \qquad (s = 1, 2 \ldots)$$

где $r(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$.

Пусть $(t_0, c_1, c_2, \ldots)$ — наперед заданная точка, в которой $t \geqslant 0$, а c_1, $c_2, \ldots$ — любые вещественные или комплексные числа, удовлетворяющие условию $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots] < \infty$.

Тогда можно показать [1], что при любом $t \geqslant 0$ у системы (1.21) существует (и притом единственное) ограниченное решение

$$x_s = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{1.22}$$

проходящее через указанную точку $(t_0, c_1, c_2, \ldots)$; причем при любом

$t \geqslant t_0 \geqslant 0$ решение (1.22) будет удовлетворять неравенству

$$c \exp - \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, d\tau \leqslant x(t) \leqslant c \exp \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, d\tau \tag{1.23}$$

где $x(t) = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots]$.

Пусть $x_{sk}(t, t_0)$ $(s, k = 1, 2, \ldots)$ есть система ограниченных решений системы уравнений (1.21); причем $x_{sk}(t_0, t_0) = 0$ при $s \neq k$ и $x_{kk}(t_0, t_0) = 1$. Тогда легко показать [2, 3], что решение (1.22) можно записать в виде

$$x_s = c_1 x_{s1}(t, t_0) + c_2 x_{s2}(t, t_0) + \cdots \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

причем эти ряды можно почленно дифференцировать, и при любом $t \geqslant t_0$ будут иметь место неравенства

$$|c_1||x_{s1}(t, t_0)| + |c_2||x_{s2}(t, t_0)| + \cdots \leqslant \exp \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, d(\tau) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

На основании (1.23) будем иметь

$$|f_s(t'', t_0, c_1, c_2, \ldots) - f_s(t', t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{t'}^{t''} r(t)\, c \exp \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, d\tau\, dt \right| \leqslant cL\, |t'' - t'| \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

где L означает наибольшее значение функции

$$J(t) = r(t) \exp \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, d\tau$$

на произвольно выбранном сегменте, содержащем точки t_0, t', t''.

Как частный случай предыдущего получаем

$$|f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) - f_s(t_0, t_0, c_1, c_2, \ldots)| = |f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) - c_s| \leqslant$$

$$\leqslant c \left| \int_{t_0}^{t} r(t) \exp \int_{t_0}^{t} r(\tau)\, d\tau\, dt \right| \leqslant cL\, |t - t_0| \tag{1.24}$$

$$\left| \frac{\partial f_s(t, t_0, c_1, c_2 \ldots)}{\partial t} \right| \leqslant cL \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

где L означает наибольшее значение функции $J(t)$ на произвольно выбранном сегменте, содержащем точки t_0 и t.

Так как аргументы величин $c_1, c_2, \ldots$ произвольны, то на основании (1.24) легко получить

$$\begin{gathered} |c_1||x_{s1}(t, t_0)| + |c_2||x_{s2}(t, t_0)| + \ldots \leqslant cL\, |t - t_0| \\ |c_1||x_{s1}'(t, t_0)| + |c_2||x_{s2}'(t, t_0)| + \cdots \leqslant cL \end{gathered} \tag{1.25}$$

Известно [4], что условие (1.10) есть необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости по первому приближению.

Легко показать, что условие (1.10) эквивалентно неравенству

$$|c_1||x_{s1}(t, t_0)| + |c_2||x_{s2}(t, t_0)| + \cdots \leqslant cBe^{-\alpha(t-t_0)} \tag{1.26}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$.

Так же легко показать, что условие (1.13) эквивалентно неравенству

$$|c_1||y_{r1}(t, t_0)| + |c_2||y_{r2}(t, t_0)| + \ldots \leqslant cP(t_0 - t) \tag{1.27}$$

$$(r = 1, 2, \ldots)$$

при любых значениях $t_0 \geqslant t \geqslant 0$; здесь y_{rk} $(r, k = 1, 2, \ldots)$ означает систему решений системы уравнений (1.12); причем $y_{rk}(t_0, t_0) = 0$ при $r \neq k$ и $y_{kk}(t_0, t_0) = 1$.

Заметим, что если система (1.12) была бы конечной и приводимой, а ее характеристичные числа были бы не более нуля, то условие (1.13) заведомо имело бы место.

В дальнейшем будем полагать, что величина B, входящая в условие (1.10), взята настолько большой, что

$$\int_t^\infty P(\tau - t)\, e^{-\alpha(\tau - t)}\, d\tau = \int_0^\infty P(z)\, e^{-\alpha z}\, dz \leqslant \frac{1}{\alpha} B \tag{1.28}$$

§ 2. Решение одной счетной системы интегральных уравнений.

1. Пусть число $\rho \geqslant 1$ выбрано так, что $4B\omega \leqslant \rho\alpha$, где ω есть величина, входящая в неравенство (1.14). Будем полагать, что величины $c_1, c_2, \ldots$ численно столь малы, что

$$2\rho c B \leqslant R, \quad 4c^{1+\delta} A r^{2+\delta} B^{2+\delta} \rho^{2+\delta} \leqslant \alpha \tag{2.1}$$

где $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots]$; причем наименьшее значение величины c, удовлетворяющее неравенствам (2.1), обозначим через 2ν.

Положим $\rho\gamma_{rk} = \omega_{rk}$ $(r, k = 1, 2, \ldots)$ и рассмотрим систему уравнений

$$x_s(t) = x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) + \int_{t_0}^t x_s[t, \tau, L_1(\tau, x_1(\tau), \ldots, \rho z_1(\tau), \ldots), \ldots$$

$$\ldots L_j(\tau, x_1(\tau), \ldots, \rho z_1(\tau), \ldots), \ldots]\, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

$$z_r(t) = \int_\infty^t y_r[t, \tau, \gamma_{11}x_1(\tau) + \gamma_{12}x_2(\tau) + \cdots, \gamma_{21}x_1(\tau) + \gamma_{22}x_2(\tau) +$$

$$+ \ldots, \ldots]\, d\tau + \int_\infty^t y_r\left[t, \tau, \frac{1}{\rho} N_1(\tau, x_1(\tau), \ldots, \rho z_1(\tau), \ldots), \ldots\right.$$

$$\left.\ldots, \frac{1}{\rho} N_j(\tau, x_1(\tau), \ldots, \rho z_1(\tau), \ldots,), \ldots\right] d\tau \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

где $x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ есть решение системы (1.9), удовлетворяющее условию (1.10), а $y_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ есть решение системы (1.12), удовлетворяющее условию (1.13).

Систему уравнений (2.2) будем решать обычным методом последовательных приближений, положив

$$x_s^\circ(t) = x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots), \qquad z_r^\circ(t) = 0$$

Очевидно, что при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|x_s^\circ(t)| \leqslant cBe^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Докажем, что при $m = 1, 2, \ldots$ для любого $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|x_s^{(m)}(t)| \leqslant 2cBe^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad |z_r(t)| \leqslant 2cBe^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.3}$$

Действительно, имеем

$$|x_s^{(m)}(t)| \leqslant cBe^{-\alpha(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} Be^{-\alpha(t-\tau)} A(\rho 2cB)^{2+\delta} e^{-2\alpha(\tau-t_0)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant cBe^{-\alpha(t-t_0)}\left(1 + Ac^{1+\delta}\frac{(2\rho B)^{2+\delta}}{\alpha}\right) < 2cBe^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$|z_r^{(m)}(t)| \leqslant \int_t^\infty P(\tau - t)\frac{\omega}{\rho} 2cBe^{-\alpha(\tau-t_0)} d\tau +$$

$$+ \int_t^\infty P(\tau - t) A(\rho 2cB)^{2+\delta} e^{-2\alpha(\tau-t_0)} d\tau < 2cBe^{-\alpha(t-t_0)}$$

Аналогично предыдущему найдем, что при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$

$$|x_s^{(1)}(t) - x_s^{(0)}(t)| \leqslant \frac{1}{2} cBe^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad |z_r^{(1)}(s) - z_r^{(0)}(t)| \leqslant \frac{1}{2} cBe^{-\alpha(t-t_0)}$$

Докажем, что при любом $m = 1, 2, \ldots$ для любого $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$|x_s^{(m)}(t) - x_s^{(m-1)}(t)| \leqslant \frac{c}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$|z_r^{(m)}(t) - z_r^{(m-1)}(t)| \leqslant \frac{c}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.4}$$

Действительно, имеем

$$|x_s^{(m)}(t) - x_s^{(m-1)}(t)| \leqslant \int_{t_0}^{t} Be^{-\alpha(t-\tau)} A(2cB\rho)^{1+\delta} e^{-\alpha(\tau-t_0)} \frac{c}{2^{m-1}} \rho Be^{-\alpha(\tau-t_0)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)} c^{1+\delta} A(2B\rho)^{2+\delta} \leqslant \frac{c}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$|z_r^{(m)}(t) - z_r^{(m-1)}(t)| \leqslant \int_t^\infty P(\tau - t)\frac{\omega}{\rho}\frac{c}{2^{m-1}} Be^{-\alpha(\tau-t_0)} d\tau +$$

$$+ \int_t^\infty P(\tau - t) A(2cB\rho)^{1+\delta} e^{-\alpha(\tau-t_0)} \frac{c}{2^{m-1}} \rho Be^{-\alpha(\tau-t_0)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) < \frac{c}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

Следовательно, при $m \to \infty$ существуют пределы

$$\lim_{m\to\infty} x_s^{(m)}(t) = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) =$$

$$= x_s^{(0)}(t) + (x_s^{(1)}(t) - x_s^{(0)}(t)) + \cdots + (x_s^{(m)}(t) - x_s^{(m-1)}(t)) + \cdots \quad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$\lim_{m\to\infty} z_r^{(m)}(t) = \psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) = \tag{2.5}$$

$$= z_r^{(0)}(t) + (z_r^{(1)}(t) - z_r^{(0)}(t)) + \cdots + (z_r^{(m)}(t) - (z_r^{(m-1)}(t)) + \cdots \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

если только $c \leqslant 2\nu$, причем эти ряды сходятся абсолютно и равномерно (относительно t, t_0 и c), а так как легко показать, что функции $x_s^{(m)}(t)$ и $z_r^{(m)}(t)$ непрерывны относительно t и $c_1, c_2, \ldots$, то f_s и ψ_r суть непрерывные функции от t и $c_1, c_2, \ldots$.

Очевидно, что при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant 2cBe^{-\alpha(t-t_0)}, \quad |\psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant 2cBe^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.6}$$

которые получаются из (2.3) с помощью предельного перехода.

Легко проверить, что

$$x_s(t) = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots), \qquad z_r(t) = \psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \quad (s, r = 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

есть решение системы интегральных уравнений (2.2); причем легко видеть, что система (2.2) не может иметь более одного решения, удовлетворяющего (2.6). Следовательно, функции f_s и ψ_r однозначно определяются заданием $t_0 \geqslant 0$ и $c_1, c_2, \ldots$, где $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots] \leqslant 2\nu$.

С помощью дифференцирования легко проверить [2, 3], что (2.7) есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + L_s(t, x_1, \ldots, \rho z_1, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{dz_r}{dt} = q_{r1}z_r + q_{r2}z_2 + \cdots + \frac{1}{\rho}(\omega_{r1}x_1 + \omega_{r2}x_2 + \cdots) +$$

$$+ \frac{1}{\rho}N_r(t, x_1, \ldots, \rho z_1, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

Следовательно, если положить

$$\varphi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) = \rho\psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{2.8}$$

то тогда система функций

$$x_s = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$y_r = \varphi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{2.9}$$

определит решение системы уравнений (2.10)

$$\frac{dx_s}{dt} = p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \cdots + L_s(t, x_1, \ldots, y_1, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$\frac{dy_r}{dt} = q_{r1}y_1 + q_{r2}y_2 + \cdots + \omega_{r1}x_1 + \omega_{r2}x_2 + \cdots + N_r(t, x_1, \ldots, y_1, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

причем при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & |f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant 2cBe^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \\ & |\varphi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant 2\rho cBe^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (r = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{2.11}$$

где $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots] \leqslant 2\nu$.

Легко проверить, что при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеет место неравенство

$$|x_s^\circ(t, t_0, c_1', c_2', \ldots) - x_s^\circ(t, t_0, c_1'', c_2'', \ldots)| \leqslant \Delta cBe^{-\alpha(t-t_0)}$$

где

$$\Delta c = \sup[|c_1' - c_1''|, |c_2' - c_2''|, \ldots]$$

Отсюда легко доказать, что при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ и при любом $m = 1, 2, \ldots$ имеют место неравенства

$$\begin{aligned} & |x_s^{(m)}(t, t_0, c_1', c_2', \ldots) - x_s^{(m)}(t, t_0, c_1'', c_2'', \ldots)| \leqslant 2\Delta c Be^{-\alpha(t-t_0)} \\ & |z_r^{(m)}(t, t_0, c_1', c_2', \ldots) - z_r^{(m)}(t, t_0, c_1'', c_2'', \ldots)| \leqslant 2\Delta cBe^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Отсюда, на основании равномерной сходимости, при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеем

$$\begin{aligned} & |f_s(t, t_0, c_1', c_2', \ldots) - f_s(t, t_0, c_1'', c_2'', \ldots)| \leqslant 2\Delta cBe^{-\alpha(t-t_0)} \\ & |\psi_r(t, t_0, c_1', c_2', \ldots) - \psi_r(t, t_0, c_1'', c_2'', \ldots)| \leqslant 2\Delta cBe^{-\alpha(t-t_0)} \end{aligned} \tag{2.13}$$

2. Будем рассматривать величины $c_1, c_2, \ldots$ как некоторые вещественные и непрерывные функции вещественного параметра α, имеющие непрерывные производные $dc_1/d\alpha$, $dc_2/d\alpha, \ldots$ и удовлетворяющие условиям

$$|c_s(\alpha)| \leqslant 2\nu, \qquad |c_s(\alpha + \Delta\alpha) - c_s(\alpha)| \leqslant |\Delta\alpha| D \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

где D — некоторая постоянная.

Легко проверить, что функции $x_s^\circ(t)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ дифференцируемы по α, т. е.

$$\frac{\partial x_s^\circ(t)}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial x_s^\circ(t)}{\partial c_k} \frac{dc_k}{d\alpha}$$

и ясно, что

$$\frac{\partial z_r^\circ(t)}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial z_r^\circ(t)}{\partial c_k} \frac{\partial c_k}{d\alpha} \equiv 0$$

Очевидно, что

$$\left|\frac{\partial x_s^\circ(t)}{\partial\alpha}\right| \leqslant c_\alpha Be^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.14}$$

где

$$c_\alpha = \sup\left[\left|\frac{dc_1}{d\alpha}\right|, \left|\frac{dc_2}{d\alpha}\right|, \ldots\right] \leqslant D$$

Легко проверить, что при любом $m = 1, 2, \ldots$ функции $x_s^{(m)}$ и $z_s^{(m)}(t)$ дифференцируемы по α и при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial x_s^{(m)} t}{\partial\alpha}\right| \leqslant 2c_\alpha Be^{-\alpha(t-t_0)}, \quad \left|\frac{\partial z_r^{(m)}(t)}{\partial\alpha}\right| \leqslant 2c_\alpha Be^{-\alpha(t-t_0)} \quad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots \\ r = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Действительно, на основании (1.16) имеем

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial L_s}{\partial x_k^{(m-1)}} \frac{dx_k^{(m-1)}}{d\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial L_s}{d\rho z_k^{(m-1)}} \rho \frac{dz_k^{(m-1)}}{d\alpha} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial L_s}{\partial x_k^{(m-1)}} \right| \left| \frac{dx_k^{(m-1)}}{d\alpha} \right| + \rho \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial L_s}{\partial \rho z_k^{(m-1)}} \right| \left| \frac{dz_k^{(m-1)}}{d\alpha} \right| \leqslant$$
$$\leqslant Ac^{1+\delta}\, 2^{1+\delta} \rho^{2+\delta} B^{2+\delta} e^{-\alpha\,(1+\delta)\,(\tau-t_0)}\, 2c_\alpha e^{-\alpha\,(\tau-t_0)}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial N_r}{\partial x_k^{(m-1)}} \frac{dx_k^{(m-1)}}{d\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial N_r}{\partial \rho z_k^{(m-1)}} \rho \frac{dz_k^{(m-1)}}{d\alpha} \right| \leqslant \tag{2.16}$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial N_r}{\partial x_k^{(m-1)}} \right| \left| \frac{dx_k^{(m-1)}}{d\alpha} \right| + \rho \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial N_r}{\partial \rho z_k^{(m-1)}} \right| \left| \frac{dz_k^{(m-1)}}{d\alpha} \right| \leqslant$$
$$\leqslant Ac^{1+\delta}\, 2^{1+\delta} \rho^{2+\delta} B^{2+\delta}\, e^{-\alpha\,(1+\delta)\,(\tau-t_0)}\, 2c_\alpha e^{-\alpha\,(\tau-t_0)}$$

Отсюда на основании (2.2) будем иметь

$$\left| \frac{dx_s^{(m)}(t)}{d\alpha} \right| \leqslant c_\alpha B e^{-\alpha\,(t-t_0)} + Ac^{1+\delta} \rho^{2+\delta}\, 2^{2+\delta} \frac{1}{\alpha} c_\alpha B e^{-\alpha\,(t-t_0)} \leqslant$$
$$\leqslant c_\alpha B e^{-\alpha\,(t-t_0)} \left(1 + \frac{1}{4}\right) < 2c_\alpha B e^{-\alpha\,(t-t_0)} \tag{2.17}$$

$$\left| \frac{dz_r^{(m)}(t)}{d\alpha} \right| \leqslant \int_t^{\infty} P(\tau - t) \left[\frac{2\omega}{\rho} c_\alpha B e^{-\alpha\,(\tau-t_0)} + Ac^{1+\delta} (2B\rho)^{2+\delta} c_\alpha e^{-\alpha\,(\tau-t_0)} \right] d\tau \leqslant$$
$$\leqslant c_\alpha B e^{-\alpha\,(t-t_0)} \left[\frac{2\omega}{\rho\alpha} B + Ac^{1+\delta} (2B\rho)^{2+\delta} \frac{1}{\alpha} \right] < 2c_\alpha B e^{-\alpha\,(t-t_0)}$$

Легко показать, что при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\partial x_s^{(m)}(t)}{\partial c_i} \right| \leqslant 2Be^{-\alpha\,(t-t_0)}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{\partial z_r^{(m)}(t)}{\partial c_i} \right| \leqslant 2Be^{-\alpha\,(t-t_0)} \quad \begin{pmatrix} s = 1, 2, \ldots \\ r = 1, 2, \ldots \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Действительно, неравенства (2.18) получаются из неравенств, отличающихся от (2.16) и (2.17) лишь тем, что вместо $|dx_k^{(m-1)} / d\alpha|$, $|dz_k^{(m-1)} / d\alpha|$ будут стоять под знаком сумм выражения $|dx_k^{(m-1)}/dc_i|$ и $|dz_k^{(m-1)} / dc_i|$, которые затем заменяются величиной $2Be^{-\alpha\,(\tau-t_0)}$. Если в (2.16) подставить значения

$$\frac{dx_s^{(m)}}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{d\alpha}, \qquad \frac{dz_r^{(m-1)}}{d\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial z_r^{(m-1)}}{\partial c_k} \frac{dc_k}{d\alpha}$$

то получим двойные ряды, которые на основании (2.18) будут сходиться абсолютно и, следовательно, можно будет изменить порядок суммирования; но тогда получаем, что

$$\frac{dx_s^{(m)}(t)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial x_s^{(m)}(t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{d\alpha}, \qquad \frac{dz_r^{(m)}(t)}{d\alpha} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial z_r^{(m)}(t)}{\partial c_i} \frac{dc_i}{d\alpha} \tag{2.19}$$

т. е. функции $x_s^{(m)}(t)$ и $z_r^{(m)}(t)$ действительно дифференцируемы.

Докажем, что при $m = 1, 2, \ldots$ и при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial x_s^{(m)}(t)}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_s^{(m-1)}(t)}{\partial \alpha}\right| \leqslant \frac{1}{2^m} c_\alpha B e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.20}$$

$$\left|\frac{\partial z_r^{(m)}(t)}{\partial \alpha} - \frac{\partial z_r^{(m-1)}(t)}{\partial \alpha}\right| \leqslant \frac{1}{2^m} c_\alpha B e^{-\alpha(t-t_0)} \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

При $m = 1$ эти неравенства получаются с помощью (2.14).

В общем случае будем иметь

$$\left|\frac{\partial x_s^{(m)}(t)}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_s^{(m-1)}(t)}{\partial \alpha}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_{sk}(t, \tau)| \left|\frac{\partial L_k'(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots)}{\partial \alpha} - \frac{\partial L_k(\tau, x_1^{(m-2)}, \ldots)}{\partial \alpha}\right|\right) d\tau$$

Отсюда на основании (1.7) получаем

$$\left|\frac{\partial x_s^{(m)}(t)}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_s^{(m-1)}(t)}{\partial \alpha}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} B e^{-\alpha(t-\tau)} A (2cB\rho)^\delta e^{-\alpha\delta(\tau-t_0)} \rho^2 \left[2cBe^{-\alpha(\tau-t_0)} \frac{c_\alpha}{2^{m-1}} Be^{-\alpha(\tau-t_0)} + \right.$$

$$\left. + 2c_\alpha B e^{-\alpha(\tau-t_0)} \frac{c}{2^{(m-1)}} Be^{-\alpha(\tau-t_0)}\right] d\tau \leqslant \frac{1}{2^m} c_\alpha B e^{-\alpha(t-t_0)} 2Ac^{1+\delta}(2B\rho)^{2+\delta} \frac{1}{\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^m} c_\alpha B e^{-\alpha(t-t_0)}$$

Аналогичным образом получаем

$$\left|\frac{\partial z_r^{(m)}(t)}{\partial \alpha} - \frac{\partial z_r^{(m-1)}(t)}{\partial \alpha}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[|y_{rk}(t, \tau)| \sum_{s=1}^{\infty} |\gamma_{ks}| \left|\frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial x_s^{(m-2)}}{\partial \alpha}\right|\right]\right) d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left[|y_{rk}(t, (\tau)| \frac{1}{\rho} \left|\frac{\partial N_r(\tau, x_1^{(m-1)}, \ldots)}{\partial \alpha} - \frac{\partial N_r(\tau, x_1^{(m-2)}, \ldots)}{\partial \alpha}\right|\right]\right) d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t}^{\infty} P(\tau - t) \frac{\omega}{\rho} \frac{c_a}{2^{m-1}} Be^{-\alpha(\tau-t_0)} d\tau +$$

$$+ \int_{t}^{\infty} P(\tau - t) A (2cB\rho)^\delta e^{-\alpha\delta(\tau-t_0)} \rho^2 \frac{8c}{2^m} c_\alpha B^2 e^{-2\alpha(\tau-t_0)} d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_a}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)} \left(\frac{2\omega B}{\rho\alpha} + 2Ac^{1+\delta}(2\rho B)^{2+\delta} \frac{1}{\alpha}\right) \leqslant \frac{c_a}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

Отсюда следует, что ряды (2.5) можно почленно дифференцировать, т. е. у функций f_s и ψ_r существуют частные производные $\partial f_s / \partial\alpha$ и $\partial\psi_r / \partial\alpha$.

Из (2.19) и (2.20) следует

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial x_s^{(m)}}{\partial c_k}-\frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial c_k}\right)\frac{dc_k}{d\alpha}\right| \leqslant \frac{c_\alpha}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial z_r^{(m)}}{\partial c_k}-\frac{\partial z_r^{(m-1)}}{\partial c_k}\right)\frac{dc_k}{d\alpha}\right| \leqslant \frac{c_\alpha}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

Отсюда с помощью соответствующего подбора значений функций $c_1, c_2, \ldots, dc_1 / d\alpha, \quad dc_2 / d\alpha, \ldots$ при некотором значении параметра α (например, при $\alpha = 0$) будем иметь для любого $t \geqslant t_0 \geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial x_s^{(m)}}{\partial c_k}-\frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial c_k}\right| \leqslant \frac{1}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial z_r^{(m)}}{\partial c_k}-\frac{\partial z_r^{(m-1)}}{\partial c_k}\right| \leqslant \frac{1}{2^m} Be^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.21}$$

Имеем

$$\frac{\partial f_s}{\partial\alpha} = \frac{\partial x_s^{\circ}}{\partial\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\partial x_s^{(m)}}{\partial\alpha}-\frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial\alpha}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial x_s^{\circ}}{\partial c_k}\frac{dc_k}{d\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\partial x_s^{(m)}}{\partial c_k}-\frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial c_k}\right)\frac{dc_k}{d\alpha} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\partial x_s^{\circ}}{\partial c_k} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\partial x_s^{(m)}}{\partial c_k}-\frac{\partial x_s^{(m-1)}}{\partial c_k}\right)\right]\frac{dc_k}{d\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial f_s}{\partial c_k}\frac{dc_k}{d\alpha}$$

ибо на основании (2.21) можно изменить порядок суммирования; аналогичным методом найдем, что

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\psi_r}{\partial c_k}\frac{dc_k}{d\alpha}$$

Отсюда следует, что функции f_s и ψ_r дифференцируемы и при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial f_s}{\partial\alpha}\right| \leqslant 2c_\alpha Be^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad \left|\frac{\partial\psi_r}{\partial\alpha}\right| \leqslant 2c_\alpha Be^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.22}$$

Отсюда с помощью соответствующего подбора значений функций $c_1, c_2, \ldots, dc_1 / d\alpha, \ldots$ при некотором значении параметра α (например, при $\alpha = 0$) будем иметь для любого значения $t \geqslant t_0 \geqslant 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial f_s}{\partial c_k}\right| \leqslant 2Be^{-\alpha(t-t_0)}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{\partial\psi_r}{\partial c_k}\right| \leqslant 2Be^{-\alpha(t-t_0)} \tag{2.23}$$

§ 3. Доказательство основной теоремы. 1. Докажем, что систему уравнений

$$x_s = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.1}$$

можно разрешить относительно величин $c_1, c_2, \ldots$, если только t, $t \geqslant t_0$ достаточно мало отличается от t_0.

Действительно, систему уравнений (31) можно записать в виде

$$x_s = x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) + \int_{t_0}^{t} x_s[t, \tau, L_1(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1, c_2, \ldots), \ldots), \ldots]\, d\tau$$

$$(s = 1, 2, \ldots) \tag{3.2}$$

или

$$c_s = x_s - c_1 x_{11}(t, t_0) - c_2 x_{s2}(t, t_0) - \cdots - c_s(x_{ss}(t, t_0) - 1) - \cdots -$$

$$- \int_{t_0}^{t} x_s[t, \tau, L_1(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1, c_2, \ldots), \ldots, \rho\psi_1(\tau, t_0, c_1, c_2, \ldots), \ldots), \ldots]\, d\tau$$

Будем полагать, что $x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] \leqslant \nu$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 1$, $8L(t - t_0) < 1$, где $L \geqslant 1$ и не менее наибольшего значения функции

$$p(t) \exp \int_{t_0}^{t} p(\tau)\, d\tau \tag{1.8}$$

на сегменте $[t_0, t_0 + 1]$, где $p(t)$ есть функция из (1.8).

Будем систему (3.2) решать обычным методом последовательных приближений, положив $c_s^\circ = x_s$. В силу (1.15), (1.25) и (2.6) имеем

$$|c_s^{(m)}| \leqslant x + 2xL(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} Be^{-\alpha(t-\tau)} A 2^{2+\delta} (2x)^{2+\delta} (\rho B)^{2+\delta} e^{-2\alpha(\tau - t_0)}\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant x + 2xL(t - t_0) + 2x\frac{1}{4} < 2x \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

Очевидно, что $|c_s^{(1)} - c_s^\circ| < x$; при $m = 2, 3, \ldots$ имеем

$$|c_s^{(m)} - c_s^{(m-1)}| \leqslant \frac{1}{2^{m-2}} xL(t - t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} Be^{-\alpha(t-\tau)} A 2^{1+\delta} (2x)^{1+\delta} B^{1+\delta} \rho^{2+\delta} e^{-\alpha(\tau - t_0)}\, 2Be^{-\alpha(\tau - t_0)} \frac{x\, d\tau}{2^{m-2}} < \frac{x}{2^{m-1}}$$

Следовательно, существует предел при $m \to \infty$

$$\lim_{m \to \infty} c_s^{(m)} = \theta_s(t, t_0, x_1, x_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.4}$$

причем

$$|\theta_s| \leqslant 2x, \qquad \theta_s(t_0, t_0, x_1, x_2 \ldots) = x_s \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Легко видеть, что (3.4) есть решение системы уравнений (3.2), а тем самым и системы (3.1), причем система (3.1) не может иметь более одного решения, удовлетворяющего неравенству $|c_s| \leqslant 2x$.

Ясно, что

$$\frac{dc_s^\circ}{dt} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Имеем

$$\left|\frac{dc_s^{(1)}}{dt}\right| \leqslant x\sum_{k=1}^{\infty}|x'_{sk}(t, t_0)| + |L_s(t, f_1, (t, t_0, x_1, x_2, \ldots), \ldots)| +$$

$$+\int_{t_0}^{t}|x_s'[t, \tau, L_1(\tau, f_1(\tau, t_0, x_1, x_2, \ldots), \ldots), \ldots]|\,d\tau$$

Отсюда на основании (1.15), (1.25) и (2.11) получаем

$$\left|\frac{dc_s^{(1)}}{dt}\right| \leqslant xL + A(2xB\rho)^{2+\delta} + LA(2xB\rho)^{2+\delta}\frac{1}{\alpha} < x\left(L + \frac{\alpha}{4} + \frac{L}{4}\right) < 4Lx$$

если только считать $L \geqslant \alpha$, что вполне возможно. Аналогично найдем, что при любом $m = 2, 3, \ldots$ имеет место неравенство

$$\left|\frac{dc_s^{(m)}}{dt}\right| \leqslant 4Lx\frac{1}{8} + 2x\left(L + \frac{\alpha}{4} + \frac{L}{4}\right) < 4Lx \tag{3.5}$$

Легко видеть, что

$$\left|\frac{dc_s^{(1)}}{dt} - \frac{dc_s^{\circ}}{dt}\right| < 4Lx = 8Lx\frac{1}{2}$$

При любом $m = 1, 2, \ldots$ имеем (3.6)

$$\left|\frac{dc_s^{(m)}}{dt} - \frac{dc_s^{(m-1)}}{dt}\right| \leqslant 8Lx\frac{1}{2^{m-1}}\frac{1}{8} + \frac{x}{2^{m-2}}L + |L_s(t, f_1(t, t_0, c_1^{(m-1)}, \ldots), \ldots) -$$

$$- L_s(t, f_1(t, t_0, c_1^{(m-2)}, \ldots), \ldots)| +$$

$$+\int_{t_0}^{t}|x_s'[t, \tau, L_1(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1^{(m-1)}, c_2^{(m-2)}, \ldots), \ldots), \ldots] -$$

$$- x_s'[t, \tau, L_1(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1^{(m-2)}, c_2^{(m-2)}, \ldots), \ldots), \ldots]|\,d\tau \leqslant$$

$$\leqslant 8Lx\frac{1}{2^{(m-1)}}\frac{1}{8} + \frac{x}{2^{(m-2)}}L + A2^{1+\delta}\rho^{2+\delta}(2xB)^{1+\delta}\frac{x}{2^{(m-2)}} +$$

$$+ A2^{1+\delta}\rho^{2+\delta}(2xB)^{1+\delta}\frac{x}{2^{(m-2)}}L(t - t_0) < 8Lx\frac{1}{2^m}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8}\frac{1}{16}\right) < 8L\frac{x}{2^m}$$

Отсюда следует, что функции $c_s = \theta_s(t, t_0, x_1, x_2, \ldots)$ имеют непрерывные производные по t, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\frac{d\theta_s}{dt}\right| \leqslant 8Lx \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

2. Пусть T_k $(k = 1, 2, \ldots)$ есть счетная система функций, непрерывных и равномерно ограниченных при $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, и пусть $\sigma \geqslant t_0$. Тогда

$$u_s(t) = \int_{t_0}^{\sigma}\sum_{k=1}^{\infty}x_{sk}(t, \tau)\,T_k\,d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

есть решение системы уравнений (1.9)

Действительно,

$$u_s'(t) = \int_{t_0}^{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}'(t,\tau) T_k \, d\tau = \int_{t_0}^{\sigma} \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(t) \sum_{r=1}^{\infty} x_{jr}(t,\tau) T_r \, d\tau =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(t) \int_{t_0}^{\sigma} \sum_{r=1}^{\infty} x_{jr}(t,\tau) T_r \, d\tau = \sum_{j=1}^{\infty} p_{sj}(t) u_j(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

так как эти ряды можно почленно интегрировать. Положим

$$c_s' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{sk}(\sigma, t_0) + \int_{t_0}^{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(\sigma,\tau) L_k(\tau, f_1(\tau, c_1, c_2, \ldots), \ldots) \, d\tau$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{sk}(t, t_0) + \int_{t_0}^{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(t,\tau) L_k(\tau, f_1(\tau, c_1, \ldots), \ldots) \, d\tau =$$

$$= H_s(t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} c_k' x_{sk}(t, \sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.8}$$

Действительно, $H_s(t)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ есть, как сумма решений системы (1.9), также решение этой системы уравнений (1.9). Но при $t = \sigma$ имеем

$$H_s(\sigma) = c_s' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' x_{sk}(\sigma, \sigma) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда на основании единственности ограниченных решений у системы (1.9) следует, что равенства (3.8) имеют место при любом значении $t \geqslant t_0$. Имеем при $t \geqslant \sigma \geqslant t_0$

$$f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x_{sk}(t, t_0) +$$

$$+ \int_{t_0}^{\sigma} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(t,\tau) L_k(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1, \ldots), \ldots) \, d\tau +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(t,\tau) L_k(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1, \ldots), \ldots) \, d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' x_{sk}(t, \sigma) +$$

$$+ \int_{\sigma}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(t,\tau) L_k(\tau, f_1(\tau, t_0, c_1, \ldots), \ldots) \, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

Отсюда следует, что система функций $f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$, $\psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ есть решение интегральных уравнений

$$x_s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k' x_{sk}(t, \sigma) + \int_{\sigma}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(t,\tau) L_k(\tau, x_1(\tau), \ldots) \, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$z_s(t) = \int_{\infty}^{t} \sum_{g=1}^{\infty} y_{rg}(t,\tau) \left[\sum_{h=1}^{\infty} \gamma_{gk} x_k(\tau) + \frac{1}{\rho} N_g(\tau, x_1(\tau), \ldots) \right] d\tau \quad (r = 1, 2, \ldots)$$

где $c_1', c_2', \ldots$ определены с помощью (3.8) (3.9)

Пусть

$$c_s = \theta_s(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{3.10}$$

есть решение системы уравнений $\bar{x}_s = f_s(\sigma, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$

Тогда система функций (3.11)

$$x_s = f_s(t, t_0, \theta_1(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots), \theta_2(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots), \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

будет решением системы уравнений (2.2), если только в последней величины c_1, $c_2, \ldots$ заменить с помощью (3.10).

Так как при $t = \sigma$ из (3.10) следует, что $x_s = \bar{x}_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, то система функций (3.11) есть в силу (3.9) решение системы уравнений

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k' \, x_{sk}(t, \sigma) + \int_{\sigma}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} x_{sk}(t, \tau) \, L_k(\tau, x_1(\tau), \ldots) \, d\tau \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$z_r(t) = \int_{\infty}^{t} \sum_{g=1}^{\infty} y_{rg}(t, \tau) \Big[\sum_{h=1}^{\infty} \gamma_{gk} \, x_k(\tau) + \frac{1}{\rho} N_g(\tau, x_1(\tau), \ldots) \Big] \, d\tau \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

т. е. (3.12)

$$f_s(t, t_0, \theta_1(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots), \ldots) \equiv f_s(t, \sigma, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$\psi_r(t, t_0, \theta_1(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots), \ldots) \equiv \psi_r(t, \sigma, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

и, следовательно, при любом $t \geqslant \sigma \geqslant 0$ будем иметь (3.13)

$$|f_s(t, t_0, \theta_1(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \ldots), \ldots)| = |f_s(t, \sigma, \bar{x}_1, \ldots)| \leqslant 2\bar{x}Be^{-\alpha(t-\sigma)} \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

$$|\psi_r(t, t_0, \theta_1(\sigma, t_0, \bar{x}_1, \ldots), \ldots)| = |\psi_r(t, \sigma, \bar{x}_1, \ldots)| \leqslant 2\bar{x}Be^{-\alpha(t-\sigma)} \qquad (r=1, 2, \ldots)$$

где $\bar{x} = \sup[|\bar{x}_1|, |\bar{x}_2|, \ldots]$.

Положим $\sigma = t$; тогда если $c_s = \theta_s(t, t_0, x_1, x_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ есть решение системы уравнений $x_s = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ то функции $\psi_r(t, t_0, \theta_1(t, t_0, x_1, x_2, \ldots), \ldots) \equiv \psi_r(t, t, x_1, x_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ (3.14)
будут удовлетворять неравенству (3.15)

$$|\psi_r(t, t_0, \theta_1(t, t_0, x_1, \ldots), \ldots)| = |\psi_r(t, t, x_1, \ldots)| \leqslant 2xB \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

при любом $t \geqslant 0$ и $x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] \leqslant \nu$.

Положим

$$z_r(t, x_1, \ldots) = \rho\psi_r(t, t_0, \theta_1(t, t_0, x_1, \ldots), \ldots) \equiv \rho\psi_r(t, t, x_1, \ldots) \tag{3.16}$$

Тогда на основании (3.15) и (2.23) следует, что при любом $t \geqslant 0$ и при $x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] \leqslant \nu$ имеют место неравенства (3.17)

$$|z_r(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant 2x\rho B, \qquad \sum_{s=1}^{\infty} \left| \frac{\partial z_r(t, x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_s} \right| \leqslant 2\rho B \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

и функции $z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ будут дифференцируемы.

Так как функции $\psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ имеют непрерывную относительно $t, c_1, c_2, \ldots$ производную $\partial\psi_r/\partial t$ и дифференцируемы относительно $c_1, c_2, \ldots$, а функции $\theta_k(t, t_0, x_1, x_2, \ldots)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ имеют непрерывные по t производные $\partial\theta_k/\partial t$, удовлетворяющие неравенству (3.7), то у функций $z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ существуют производные

$$\frac{dz_r(t, x_1, x_2, \ldots)}{dt} = \rho\frac{\partial\psi_r(t, t_0, \theta_1, \theta_2, \ldots)}{\partial t} + \rho\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta_k}\frac{\partial\theta_k}{\partial t} \tag{3.18}$$

Докажем, что функции $z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют системе (1.1). С этой целью будем рассматривать величины x_1, x_2 в функциях $z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ замененными функциями $f_1(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$, $f_2(t, t_0, c_1, c_2, \ldots), \ldots$ Тогда $z_r(t, x_1, x_2, \ldots)|_{x_k=f_k} \equiv \varphi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$.

Имеем при $x_s = f_s$

$$\frac{\partial z_r}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\partial z_r}{\partial x_s}\frac{dx_s}{dt} = \frac{\partial z_r}{\partial t} + \sum_{s-1}^{\infty}\frac{\partial z_r}{\partial t}\left[\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}x_k + L_k(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots)\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial\varphi_r}{\partial t} = \sum_{g=1}^{\infty} q_{rg}\varphi_g + \sum_{k=1}^{\infty}\omega_{rk}f_k + N_r(t, f_1, \ldots, \varphi_1, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{3.19}$$

Тождество (3.19) не нарушится, если величины $c_1, c_2, \ldots$ заменим решением системы уравнений $x_s = f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Но тогда $\varphi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) = z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ и $f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) = x_s$ и тождество (3.19) примет вид:

$$\frac{\partial z_r(t, x_1, \ldots)}{\partial t} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{\partial z_r(t, x_1, \ldots)}{\partial x_s}\left[\sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}x_k + L_s(t, x_1 \ldots, z_1, \ldots)\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{g=1}^{\infty} q_{rg}z_g(t, x_1, x_2, \ldots) + \sum_{k=1}^{\infty}\omega_{rk}x_k + N_r(t, x_1, \ldots, z_1, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

Тем самым доказано, что при любом $t \geqslant 0$ и $|x_s| \leqslant \nu$ $(s = 1, 2, \ldots)$ система уравнений (1.1) имеет ограниченное решение $z_r = z_r(t, x_1, x_2, \ldots)$ $(r = 1, 2, \ldots)$:

$$|z_r(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant 2x\rho B, \qquad x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots] \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

которое дифференцируемо, а ряды

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left|\frac{\partial z_r(t, x_1, x_2, \ldots)}{\partial x_s}\right| \leqslant 2\rho B \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

сходятся.

3. Отметим некоторые частные случаи. Допустим, что $p_{sk}, q_{rg}, \omega_{rk}$, L_s и N_r, не зависят от t. Тогда решения системы уравнений (1.9) и (1.12) будут функциями вида $x_s(t - t_0, c_1, c_2, \ldots)$, $y_r(t - t_0, c_1, c_2, \ldots)$. Но тогда из (2.2) легко видеть, что $x_s^{(m)}$ и $z_r^{(m)}$ будут также функциями того же вида. Следовательно, в этом случае решения системы уравнений (2.2) будут вида

$$x_s = f_s(t - t_0, c_1, c_2, \ldots), \qquad z_r = \psi_r(t - t_0, c_1, c_2, \ldots) \tag{3.20}$$

Отсюда на основании (3.16) следует, что

$$z_r(t, x_1, x_2, \ldots) = \rho\psi_r(t - t, x_1, x_2, \ldots) = \rho\psi_r(0, x_1, x_2, \ldots) \tag{3.21}$$

т. е. в этом случае найденное решение системы (1.1) не зависит от t.

Допустим, что p_{sh}, q_{rg}, L_s и N_r суть периодические функции с некоторым вещественным периодом $\beta \neq 0$. Тогда легко убедиться, что решения системы уравнений (1.9) и и (1.12) будут удовлетворять условию

$$x_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2 \ldots) \equiv x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$$

$$y_r(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv y_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$$

Действительно, имеем

$$x_s'(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}(t+\beta) x_k(t+\beta, t_0+\beta, c_1 c_2, \ldots) \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{\infty} p_{sk}(t) x_k(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \qquad (s=1, 2, \ldots)$$

Следовательно, $x_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots)$ $(s=1, 2, \ldots)$ есть решение системы (1.9), Но при $t = t_0$ будем иметь $x_s(t_0+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) = c_s$ $(s=1, 2, \ldots)$. Отсюда на основании единственности ограниченного решения у системы (1.9) следует, что

$$x_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots,) \qquad (s=1, 2, \ldots)$$

Аналогичным образом получим, что

$$y_r(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv y_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) \qquad (r=1, 2, \ldots)$$

Но тогда из (2.2) имеем

$$f_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv x_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) +$$

$$+ \int_{t_0+\beta}^{t+\beta} x_s[t+\beta, \tau, L_1(\tau, f_1(\tau, t_0+\beta, c_1, \ldots), \ldots), \ldots]\, dt \equiv x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} x_s[t+\beta, u+\beta, L_1(u+\beta, f_1(u+\beta, t_0+\beta, c_1, \ldots), \ldots), \ldots]\, du \equiv$$

$$\equiv x_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots) + \int_{t_0}^{t} x_s[t, u, L_1(u, f_1(u+\beta, t_0+\beta, c_1, \ldots), \ldots), \ldots]\, du$$

$$\psi_r(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv$$

$$\equiv \int_{\infty}^{t+\beta} y_r[t+\beta, \tau, \gamma_{11} f_1(\tau, t_0+\beta, c_1, \ldots) + \gamma_{12} f_2(\tau, t_0+\beta, c_1, \ldots) + \ldots, \ldots]\, d\tau +$$

$$+ \int_{\infty}^{t+\beta} y_r\left[t+\beta, \tau, \frac{1}{\rho} N_1(\tau, f_1(\tau, t_0+\beta, c_1, \ldots), \ldots), \ldots\right] d\tau \equiv$$

$$\equiv \int_{\infty} y_r[t, u, \gamma_{11} f_1(u+\beta, t_0+\beta, c_1, \ldots) + \gamma_{12} f_2(u+\beta, t_0+$$

$$+\beta, c_1, \ldots) + \ldots, \ldots]\, du +$$

$$+ \int_{\infty}^{t} y_r\left[t, u, \frac{1}{\rho} N_1(u, f_1(u+\beta, t_0+\beta, c_1, \ldots), \ldots), \ldots\right] du$$

т. е. функции $f_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1 c_2, \ldots)$, $\psi_r(t+\beta, t_0+\beta, c_1 c_2, \ldots)$ также определяют решение системы (2.2). Но при $t = t_0$ получаем

$$f_s(t_0+\beta, t_0+\beta, c_0, c_2, \ldots) = c_s \quad (s = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда на основании ранее доказанной единственности решений системы (2.2) следует, что

$$f_s(t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv f_s(t, t_0, c_1, c_2, \ldots),$$
$$\psi\ (t+\beta, t_0+\beta, c_1, c_2, \ldots) \equiv \psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)$$

Следовательно,

$$z_r(t+\beta, x_1, x_2, \ldots) = \rho\psi_r(t+\beta, t+\beta, x_1, x_2, \ldots) \equiv$$
$$\equiv \rho\psi_r(t, t, x_1, x_2, \ldots) = z_r(t, x_1, x_2, \ldots) \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{3.22}$$

т. е. в данном случае найденное решение системы (1.1) есть периодическое, с периодом β.

Допустим, что $\omega_{rk} \equiv 0$ $(r, k = 1, 2, \ldots)$ и при $z_1 = z_2 = \ldots = 0$ имеем

$$|N_r(t, x_1, x_2, \ldots 0, 0, \ldots)| \leqslant A x^\eta \qquad (r = 1, 2, \ldots)$$

где $x = \sup[|x_1|, |x_2|, \ldots]$, а η — некоторая постоянная, которая на основании (1.15) необходимо удовлетворяет неравенству $\eta \geqslant 2 + \delta$.

Тогда из (2.2) следует, что $|z_r^{(m)}(t)| \leqslant N c^\eta$ $(m = 1, 2, \ldots)$, где N — некоторая постоянная, а $c = \sup[|c_1|, |c_2|, \ldots]$. Отсюда

$$|\psi_r(t, t_0, c_1, c_2, \ldots)| \leqslant N c^\eta \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{3.23}$$

при любом $t \geqslant t_0 \geqslant 0$. На основании (3.23) следует, что

$$|z_r(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant N \rho x^\eta \qquad (r = 1, 2, \ldots) \tag{3.24}$$

т. е. в данном случае найденное решение системы уравнений (1.1) будет порядка малости, не ниже η относительно величин $x_1, x_2, \ldots$

Ясно, что все эти свойства остаются в силе и в том частном случае, когда число величин $x_1, x_1, \ldots, z_1, z_2, \ldots,$ входящих в систему (1.1), есть конечное; причем если функции L_s и N_r голоморфны относительно $x_1, x_2, \ldots, z_1, z_2, \ldots,$ то тогда и найденное решение системы (1.1) будет также голоморфным относительно $x_1, x_2, \ldots$ (ибо в этом случае равномерно сходящиеся ряды (2.5) голоморфных функций суть также голоморфные функции). На основании (3.17) и хорошо известного представления голоморфных функций с помощью криволинейных интегралов (для функций многих переменных эти интегралы будут кратными) можно заключить, что для найденного решения системы уравнений (1.1) существует усиливающая голоморфная функция с постоянными коэффициентами. В этом частном случае полученные результаты мало отличаются от известной теоремы Ляпунова [5].

Поступила в редакцию
29 XI 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Персидский К. П. ДАН. 1948. Т. XIII. № 3.
2. Персидский К. П. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 5.
3. Персидский К. П. Изв. АН КазССР. Серия матем. и механики. 1948. № 2.
4. Персидский К. П. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.
5. Ляпунов А. М. Общая задача устойчивости движения. ОНТИ. 1935.