Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

КОЛЕБАНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С НЕАНАЛИТИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

§ 1. Колебания вдали от резонанса. Рассмотрим периодические колебания системы с одной степенью свободы, описываемой дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \mu F(t, x, \dot{x}) \qquad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt}\right) \tag{1.1}$$

где μ — малый параметр, а функция F по отношению к t непрерывна, периодична с периодом 2π и разлагается в ряд Фурье. Задача заключается в отыскании периодических (периода 2π) решений этого уравнения, обращающихся при $\mu = 0$ в периодические решения порождающей системы

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + k^2x_0 = 0 \tag{1.2}$$

Эта задача полностью разрешена для того случая, когда F по отношению к переменным x и $\dot{x}$ аналитична [1]. Здесь приводится решение этой задачи при значительно более общих предположениях. А именно, предполагается, что функция F допускает в некоторой области G непрерывные частные производные первого порядка по переменным x и $\dot{x}$, удовлетворяющие условиям Коши-Липшитца

$$\begin{aligned} |F_x(t, x_1, \dot{x}_1) - F_x(t, x_2, \dot{x}_2)| &< A(|x_1 - x_2| + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|) \\ |F_{\dot{x}}(t, x_1, \dot{x}_1) - F_{\dot{x}}(t, x_2, \dot{x}_2)| &< A(|x_1 - x_2| + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Так же как и при F аналитической, необходимо рассмотреть два случая: *нерезонансный*, когда число k не является целым и не отличается от него на величину порядка малости μ, и *резонансный*, когда k — или целое число, или отличается от него на величину порядка малости μ.

Рассмотрим сначала первый случай. В этом случае единственным периодическим решением периода 2π порождающего уравнения (1.2) является тривиальное решение $x_0 = 0$. При этом легко показать, что

---

[1] Подробнее см., например, в [1].

существует одно и только одно периодическое решение $x = x(t, \mu)$ полного уравнения (1.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$, т. е. такое, для которого $x(t, 0) \equiv 0$. Доказательство ничем не отличается от доказательства этого предложения для случая, когда F является аналитической.

Для вычисления этого периодического решения применим метод последовательных приближений.

Примем в качестве первого приближения периодическое решение x_1 уравнения

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + k^2x_1 = \mu F(t, 0, 0) \tag{1.4}$$

В качестве m-го приближения $(m = 2, 3, \ldots)$ примем периодическое решение x_m уравнения

$$\frac{d^2x_m}{dt^2} + k^2x_m = \mu F(t, x_{m-1}, \dot{x}_{m-1}) \tag{1.5}$$

Правая часть уравнения (1.4) является известной периодической функцией периода 2π. Так как k отличается от целого числа, то уравнение (1.4) допускает одно и только одно периодическое решение, которое просто вычисляется обычными элементарными методами. Точно так же и уравнение (1.5) допускает одно и только одно периодическое решение для x_m, если только x_{m-1} оказалось периодическим. Таким путем можно просто подсчитать любое число приближений. При достаточно малом μ эти приближения сходятся к искомому периодическому решению.

Доказательство этого предложения не представляет трудностей и здесь не приводится.

§ 2. Колебания при резонансе. Рассмотрим резонансный случай. Допустим, что

$$k^2 - n^2 = \mu a$$

где n — целое число. Тогда, относя член $\mu a x$ к функции μF, можно уравнение (1.1) представить в следующем виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2x = \mu F(t, x, \dot{x}) \tag{2.1}$$

В рассматриваемом случае, порождающее уравнение

$$\frac{d^2x_0}{dt^2} + n^2x_0 = 0$$

допускает периодическое решение

$$x_0 = M_0 \cos t + N_0 \sin nt \tag{2.2}$$

зависящее от двух произвольных постоянных M_0 и N_0. Как показал Пуанкаре, для того чтобы этому решению соответствовало периодическое решение уравнения (2.1), совпадающее с ним при $\mu = 0$, необходимо, чтобы M_0 и N_0 удовлетворяли некоторым уравнениям.

В работе [2] рассмотрен в общем виде вопрос о существовании периодических решений для систем нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр, в случае, когда порождающее решение зависит от некоторого числа произвольных постоянных. Если результат этой работы применить к рассматриваемому случаю, то легко получится, что для того чтобы уравнение (2.1) допускало периодическое решение, обращающееся в (2.2) при $\mu = 0$, необходимо, чтобы M_0 и N_0 удовлетворяли уравнениям

$$P_0(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau)) \cos n\tau \, d\tau = 0$$
$$Q_0(M_0, N_0) = \int_0^{2\pi} F(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau)) \sin n\tau \, d\tau = 0 \tag{2.3}$$

При этом каждому простому решению уравнений (2.3), т. е. такому решению, для которого $\partial(P_0, Q_0) / \partial(M_0, N_0) \neq 0$, действительно отвечает одно и только одно периодическое решение уравнения (2.1), обращающееся в (2.2) при $\mu = 0$.

Для вычисления этого периодического решения воспользуемся, так же как и в нерезонансном случае, методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения примем порождающее решение (2.2). В качестве первого приближения примем периодическое решение уравнения

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + n^2x_1 = \mu F(t, x_0, \dot{x}_0) \tag{2.4}$$

Далее, полагаем

$$\frac{d^2x_m}{dt^2} + n^2x_m = \mu F(t, x_{m-1}, \dot{x}_{m-1})$$

В отличие от уравнения (1.4) уравнение (2.4) или совсем не имеет периодических решений, или, наоборот, все его решения являются периодическими. Для того чтобы имел место последний случай, необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье правой части уравнения (2.4) не содержало членов с $\cos nt$ и $\sin nt$. Приравнивая нулю эти члены, приходим снова к уравнениям (2.3).

Допустим, что M_0 и N_0 действительно выбраны согласно этим уравнениям. Тогда общее решение уравнения (2.4), определяемое формулой

$$x_1 = M_1 \cos nt + N_1 \sin nt + \mu f_1(t)$$

где

$$f_1(t) = \frac{1}{n} \int_0^t F(\tau, x_0(\tau), \dot{x}_0(\tau)) \sin n(t - \tau) \, d\tau$$

а M_1 и N_1 — произвольные постоянные, будет периодическим. Постоянные M_1 и N_1 определяются из условия периодичности второго приближения x_2. Вообще допустим, что все приближения $x_1, x_2, \ldots, x_m$ до

m-го порядка включительно оказались периодическими и лежат в области G. Тогда будем иметь

$$x_m = \xi_m + \mu f_m$$

где

$$\xi_m = M_m \cos nt + N_m \sin nt, \qquad f_m = \frac{1}{n} \int_0^t F(\tau, x_{m-1}, \dot{x}_{m-1}) \sin n(t-\tau)\, d\tau$$

а M_m и N_m — произвольные постоянные. Для определения этих постоянных имеем два уравнения:

$$P_m(M_m, N_m, \mu) = 0, \quad Q_m(M_m, N_m, \mu) = 0 \tag{2.5}$$

выражающие необходимые и достаточные условия периодичности функции x_{m+1}. При этом используются обозначения

$$\begin{aligned} P_j(M, N, \mu) &= \int_0^{2\pi} F(\tau, \xi + \mu f_j, \dot{\xi} + \mu \dot{f}_j) \cos n\tau\, d\tau \\ Q_j(M, N, \mu) &= \int_0^{2\pi} F(\tau, \xi + \mu f_j, \dot{\xi} + \mu \dot{f}_j) \sin n\tau\, d\tau \end{aligned} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2.6}$$

$$\xi(t) = M \cos nt + N \sin nt, \qquad f_0 \equiv 0$$

Допустим, что M_0 и N_0 являются таким решением уравнений (2.3), для которого $\partial(P_0, Q_0) / \partial(M_0, N_0) \neq 0$, и что при этом величины x_0 и $\dot{x}_0$ лежат в области G. В этом случае уравнения (2.5) допускают при $\mu = 0$ решение $M_m = M_0$, $N_m = N_0$, для которого функциональный определитель $\partial(P_m, Q_m) / \partial(M_m, N_m)$, совпадающий, очевидно, с $\partial(P_0, Q_0) / \partial(M_0, N_0)$, отличен от нуля. Следовательно, уравнения (2.5) допускают одно и только одно решение для $M_m(\mu)$ и $N_m(\mu)$, в котором эти величины обращаются в M_0 и N_0 при $\mu = 0$. Исходя из взятого нулевого приближения (2.2) и выбирая таким образом M_m и N_m, получим вполне определенный процесс последовательных приближений. Этот процесс дает возможность подсчитать любое число приближений и дает эти приближения в удобной для практики форме.

§ 3. Доказательство сходимости последовательных приближений. Покажем, что при достаточно малом μ указанный в предыдущем параграфе процесс последовательных приближений сходится к искомому периодическому решению.

Покажем прежде всего, что все величины x_j и $\dot{x}_j$ лежат в области G. Для этого достаточно показать, что этим свойством будут обладать величины x_{m+1} и $\dot{x}_{m+1}$, если только оно справедливо для x_m и $\dot{x}_m$. Допуская последнее, будем прежде всего иметь

$$|f_{m+1}| < \frac{2\pi B}{n}, \qquad |\dot{f}_{m+1}| < 2\pi B \tag{3.1}$$

где B — верхний предел функции F в области G.

Обозначим через $P_{j,M}$, $P_{j,N}$, $P_{j,\mu}$, $Q_{j,M}$, $Q_{j,N}$. $Q_{j,\mu}$ частные производные функции P_j и Q_j по переменным M, N и μ, а через $D_j(M, N, \mu)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ функциональный определитель $\partial(P_j, Q_j) / \partial(M, N)$. Так как по условию величина $D_0(M, N)$ (она не зависит от μ, так как $f_0 \equiv 0$) отлична от нуля при $M = M_0$, $N = N_0$, то найдется такое положительное число h, что при выполнении неравенств

$$|M - M_0| \leqslant h, \qquad |N - N_0| \leqslant h \tag{3.2}$$

будет выполняться также неравенство

$$|D_0(M, N)| > \alpha \tag{3.3}$$

где α — некоторая положительная постоянная.

Выберем число η_{m+1} настолько малым, чтобы при всех значениях μ, удовлетворяющих неравенству

$$|\mu| < \eta_{m+1} \tag{3.4}$$

и при всех значениях M и N, лежащих в области (3.2), величины $\xi + \mu f_{m+1}$ и $\dot\xi + \mu \dot f_{m+1}$ лежали в области G. Это всегда возможно в силу (3.1) и при этом η_{m+1} не будет зависеть от индекса m. Потребуем кроме того, чтобы при выполнении неравенства (3.4) корни M_{m+1} и N_{m+1} уравнений $P_{m+1} = Q_{m+1} = 0$ лежали в области (3.2). Это также возможно, так как $M_{m+1}(0) = M_0$, $N_{m+1}(0) = N_0$. Покажем, что при этом также возможно считать, что число η_{m+1} не зависит от индекса m.

В самом деле, имеем

$$M_{m+1}(\mu) - M_0 = \mu \left(\frac{dM_{m+1}(\mu)}{d\mu}\right)_{\mu=\theta\mu} = \tag{3.5}$$

$$= -\mu \left(\frac{P_{m+1,N}\, Q_{m+1,\mu} - Q_{m+1,N}\, P_{m+1,\mu}}{D_{m+1}(M, N, \mu)}\right)_{M=M_{m+1}(\theta\mu),\; N=N_{m+1}(\theta\mu),\; \mu=\theta\mu}$$

где θ — правильная положительная дробь. Оценим модуль правой части выражения (3.5) при выполнении (3.4). Считая, что μ_1 и μ_2 лежат в области (3.4), а M и N в области (3.2), на основании (1.3) и (3.1) имеем

$$|P_{m+1,M}(M, N, \mu_1) - P_{m+1,M}(M, N, \mu_2)| =$$

$$= \Big| \int_0^{2\pi} \{[F_x(\tau, \xi + \mu_1 f_{m+1}, \dot\xi + \mu_1 \dot f_{m+1}) - F_x(\tau, \xi + \mu_2 f_{m+1}, \dot\xi + \mu_2 \dot f_{m+1})] \cos n\tau -$$

$$- [F_{\dot x}(\tau, \xi + \mu_1 f_{m+1}, \dot\xi + \mu_1 \dot f_{m+1}) -$$

$$- F_{\dot x}(\tau, \xi + \mu_2 f_{m+1}, \dot\xi + \mu_2 \dot f_{u+1})]\, n \sin n\tau\} \sin n\tau \, d\tau \Big| <$$

$$< \frac{4\pi^2 AB\,(n+1)^2}{n} |\mu_1 - \mu_2| = k|\mu_1 - \mu_2|$$

т. е. функция $P_{m+1,M}$ удовлетворяет в области (3.2) и (3.4) по отношению к переменной μ условию Коши-Липшитца с коэффициентом k, не зависящим от m.

То же самое справедливо и для функций $P_{m+1,N}$, $Q_{m+1,M}$, $Q_{m+1,N}$, и поэтому в области, определяемой неравенствами (3.2) и (3.4), выполняется неравенство

$$|D_{m+1}(M, N, \mu_1) - D_{m+1}(M, N, \mu_2)| < L|\mu_1 - \mu_2| \tag{3.6}$$

где L — некоторая независящая от m постоянная. Отсюда находим

$$|D_{m+1}(M, N, \theta\mu) - D_{m+1}(M, N, 0)| \equiv$$
$$\equiv |D_{m+1}(M, N, \theta\mu) - D_0(M, N)| < L\theta\mu \tag{3.7}$$

В той же области изменения переменных M, N и μ справедливо также неравенство

$$|P_{m+1,N}Q_{m+1,\mu} - Q_{m+1,N}P_{m+1,\mu}| < C \tag{3.8}$$

где C — некоторая не зависящая от m постоянная, определяемая верхними пределами модулей производных F_x и $F_{\dot{x}}$ в области G.

Установив это, обозначим через β верхний предел значений $|\mu|$, при которых величины $\xi + \mu f_{m+1}$ и $\dot{\xi} + \mu \dot{f}_{m+1}$ лежат в области G, если величины M и N удовлетворяют неравенствам (3.2). Как указывалось выше, это число не зависит от m. Обозначим далее

$$\eta = \min\left\{\frac{\alpha}{2L\theta}, \frac{h\alpha}{2C}, \beta\right\} \tag{3.9}$$

и покажем, что можно положить $\eta_{m+1} = \eta$ и, следовательно, η_{m+1} не зависит от m. Очевидно, достаточно показать, что при $|\mu| < \eta$ величины $M_{m+1}(\mu)$ и $N_{m+1}(\mu)$ лежат в области (3.2).

При μ достаточно малом будут выполняться неравенства

$$|M_{m+1}(\mu) - M_0| < h, \qquad |N_{m+1}(\mu) - N_0| < h \tag{3.10}$$

Пусть $\mu = \mu^*$ есть первое значение μ, при котором хотя бы одно из неравенств (3.10) переходит в равенство. Достаточно показать, что имеет место $|\mu^*| > \eta$.

Допустим противное, что $|\mu^*| < \eta$. Так как при $|\mu| \leqslant |\mu^*|$ величины M_{m+1} и N_{m+1} еще лежат в области (3.2), то будут справедливы оценки (3.7) и (3.8), если в них положить

$$M = M_{m+1}(\theta\mu^*), \qquad N = N_{m+1}(\theta\mu^*), \qquad \mu = \mu^*$$

Первая из этих оценок дает

$$|D_{m+1}(M_{m+1}(\theta\mu^*), N_{m+1}(\theta\mu^*), \theta\mu^*) - D_0(M_{m+1}(\theta\mu^*), N_{m+1}(\theta\mu^*))| < \frac{\alpha}{2}$$

так как по предположению $|\mu^*|$ меньше величины η, для которой справедливо (3.9). Отсюда получаем

$$|D_{m+1}(M_{m+1}(\theta\mu^*), N_{m+1}(\theta\mu^*), \theta\mu^*)| > \frac{\alpha}{2} \tag{3.11}$$

так как в области (3.2) выполняется неравенство (3.3).

Неравенство (3.11), на основании (3.5) и (3.8) дает

$$|M_{m+1}(\mu^*) - M_0| < \mu^* \frac{C}{\frac{1}{2}\alpha} < \frac{2C}{\alpha}\eta$$

Аналогично можно получить

$$|N_{m+1}(\mu^*) - N_0| < \frac{2C}{\alpha}\eta$$

Тогда на основании (3.9) имеем неравенства

$$|M_{m+1}(\mu^*) - M_0| < h, \qquad |N_{m+1}(\mu^*) - N_0| < h$$

что невозможно, так как по предположению при $\mu = \mu^*$ хотя бы одно из неравенств (3.10) переходит в равенство.

Таким образом доказано, что при

$$|\mu| \leqslant \eta \tag{3.12}$$

для всех значений индекса m выполняются неравенства (3.10) и величины x_{m+1} и $\dot{x}_{m+1}$ лежат в области G.

Оценим теперь величины $|f_{m+1} - f_m|$, $|\dot{f}_{m+1} - \dot{f}_m|$, $|M_{m+1} - M_m|$, $|N_{m+1} - N_m|$. Очевидно, что

$$|f_m - f_{m+1}| < a_m, \qquad |\dot{f}_m - \dot{f}_{m+1}| < na_m$$

$$|M_m - M_{m-1}| < b_m, \qquad |N_m - N_{m-1}| < b_m$$

где a_m и b_m — некоторые постоянные, для которых на основании (3.1) и (3.10) можно назначить некоторые не зависящие от m верхние пределы. Функция F, допуская частные производные по x и $\dot{x}$, необходимо удовлетворяет условию Коши-Липшитца

$$|F(t, x_1, \dot{x}_1) - F(t, x_2, \dot{x}_2)| < H(|x_1 - x_2| + |\dot{x}_1 - \dot{x}_2|)$$

где H — некоторая постоянная. Поэтому имеем

$$|f_{m+1} - f_m| \leqslant \frac{1}{n}\int_0^t |\{F(\tau, \xi_m + \mu f_m, \dot{\xi}_m + \mu\dot{f}_m) -$$

$$- F(\tau, \xi_{m-1} + \mu f_{m-1}, \dot{\xi}_{m-1} + \mu\dot{f}_{m-1})\}|\cdot|\sin n(t-\tau)|\, d\tau <$$

$$< \frac{H}{n}\int_0^{2\pi} \{|(M_m - M_{m-1})\cos n\tau| + |(N_m - N_{m-1})\sin n\tau| + |\mu(f_m - f_{m-1})| +$$

$$+ n|(M_m - M_{m-1})\sin n\tau| + n|(N_m - N_{m-1})\cos n\tau| + |\mu(\dot{f}_m - \dot{f}_{m-1})|\})\, d\tau$$

Следовательно,

$$|f_{m+1} - f_m| < a_{m+1} \tag{3.13}$$

где

$$a_{m+1} = \frac{2\pi(n+1)H}{n}(2b_m + a_m|\mu|) \tag{3.14}$$

Аналогично получаем

$$|\dot{f}_{m+1} - \dot{f}_m| < na_{m+1} \tag{3.15}$$

Переходим к оценке величин $|M_{m+1} - M_m|$ и $|N_{m+1} - N_m|$. Рассмотрим функции

$$P^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu) = \int_0^{2\pi} F(\tau, \xi + \mu f_m + \nu (f_{m+1} - f_m), \dot{\xi} + \mu \dot{f}_m + \\ + \nu (\dot{f}_{m+1} - \dot{f}_m)) \cos n\tau \, d\tau$$

$$Q^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu) = \int_0^{2\pi} F(\tau, \xi + \mu f_m + \nu (f_{m+1} - f_m), \dot{\xi} + \mu \dot{f}_m + \\ + \nu (\dot{f}_{m+1} - \dot{f}_m)) \sin n\tau \, d\tau$$

где переменная ν изменяется в области $|\nu| \leqslant |\mu|$. На основании (3.1) величину η в неравенстве (3.12) можно взять настолько малой и попрежнему не зависящей от m, что величины $\xi + \mu f_m + \nu (f_{m+1} - f_m)$ и $\dot{\xi} + \mu \dot{f}_m + \nu (\dot{f}_{m+1} - \dot{f}_m)$ будут находиться в области G при всех значениях M и N, лежащих в области (3.2). Поэтому при указанных значениях M и N функции P^*_{m+1} и Q^*_{m+1} будут вполне определенными.

Очевидно, имеем

$$P^*_{m+1}(M, N, \mu, \mu) = P_{m+1}(M, N, \mu), \quad Q^*_{m+1}(M, N, \mu, \mu) = Q_{m+1}(M, N, \mu)$$

$$P^*_{m+1}(M, N, \mu, 0) = P_m(M, N, \mu), \quad Q^*_{m+1}(M, N, \mu, 0) = Q_m(M, N, \mu)$$

Поэтому, если $M^*_{m+1}(\mu, \nu)$ и $N^*_{m+1}(\mu, \nu)$ обозначают корни уравнений

$$P^*_{m+1}(M^*_{m+1}, N^*_{m+1}, \mu, \nu) = 0, \qquad Q^*_{m+1}(M^*_{m+1}, N^*_{m+1}, \mu, \nu) = 0$$

то справедливы тождества

$$M^*_{m+1}(\mu, \mu) = M_{m+1}(\mu), \qquad N^*_{m+1}(\mu, \mu) = N_{m+1}(\mu)$$

$$M^*_{m+1}(\mu, 0) = M_m(\mu), \qquad N^*_{m+1}(\mu, \mu) = N_m(\mu)$$

Далее, имеем

$$M_{m+1}(\mu) - M_m(\mu) = M^*_{m+1}(\mu, \mu) - M^*_{m+1}(\mu, 0) =$$

$$= \frac{P^*_{m+1, N} Q^*_{m+1, \nu} - Q^*_{m+1, N} P^*_{m+1, \nu}}{D^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu)} \mu \tag{3.16}$$

где вторые индексы у функций P^* и Q^* обозначают частное дифференцирование по соответствующим переменным, а $D^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu)$ — функциональный определитель $\partial (P^*_{m+1}, Q^*_{m+1}) / \partial (M, N)$. Все производные в правой части равенства (3.16) вычисляются при $M = M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu)$, $N = N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu)$, $\nu = \theta\mu$, где θ — правильная положительная дробь.

Точно так же, как это показано для величин M_{m+1}, N_{m+1}, можно показать, что величины M^*_{m+1} и N^*_{m+1} лежат в области (3.2), если только величина η в неравенстве (3.12) достаточно мала.

Будем предполагать это условие выполненным. При этом величина η попрежнему не будет зависеть от m.

В рассматриваемой области изменения переменных M, N и μ функция $D^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu)$ будет удовлетворять по отношению к переменной ν условию Коши-Липшитца

$$|D^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu_1) - D^*_{m+1}(M, N, \mu, \nu_2)| < L^* |\nu_1 - \nu_2|$$

где L^* — некоторая не зависящая от m положительная постоянная. Вследствие этого будем иметь

$$\begin{aligned} &|D^*_{m+1}(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu, \theta\mu) - \\ &- D^*_{m+1}(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu, 0)| = \\ &= |D^*_{m+1}(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu, \theta\mu) - \\ &- D_m(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu)| < L^*\theta\mu \end{aligned} \tag{3.17}$$

Так как величины $M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu)$ и $N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu)$ лежат в области (3.2) то на основании (3.6)

$$\begin{aligned} D_m(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu) - D_m(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), 0)| \equiv \\ \equiv |D_m(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu) - \\ - D_0(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu))| < L|\mu| \end{aligned}$$

и, следовательно, на основании (3.3)

$$|D_m(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu)| > \frac{\alpha}{2}$$

если только $\eta < \alpha / 2L$, что и будем предполагать.

Принимая во внимание это неравенство, из (3.17) находим

$$|D^*_{m+1}(M^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), N^*_{m+1}(\mu, \theta\mu), \mu, \theta\mu)| > \frac{\alpha}{4} \tag{3.18}$$

если $\eta < \alpha / 4\theta L^*$, что будем также предполагать.

Далее, имеем

$$P^*_{m+1, \nu} = \int_0^{2\pi} \{(f_{m+1} - f_m) F_x + (\dot{f}_{m+1} - \dot{f}_m) F_{\dot{x}}\} \cos n\tau \, d\tau$$

и, следовательно, на основании (3.13) и (3.15)

$$|P^*_{m+1, \nu}| < \frac{4\pi^2 HR (n+1)^2}{n} (2b_m + a_m |\mu|)$$

где R — наибольшее значение величин $|F_x|$ и $|F_{\dot{x}}|$ в области G.

Аналогично находим

$$|Q^*_{m+1, \nu}| < \frac{4\pi^2 HR (n+1)^2}{n} (2b_m + a_m |\mu|)$$

$$|P^*_{m+1, N}| < 2\pi(n+1) R, \qquad |Q^*_{m+1, N}| < 2\pi(n+1) R$$

Поэтому, принимая во внимание (3.16) и (3.18), получаем следующую оценку:

$$| M_{m+1}(\mu) - M_m(\mu) | < b_{m+1}$$

где

$$b_{m+1} = \frac{64\pi^3 (n+1)^3 HR^2}{\alpha n} (2b_m + a_m |\mu|) |\mu| \tag{3.19}$$

Такая же точно оценка справедлива и для $| N_{m+1}(\mu) - N_m(\mu) |$. Из (3.14) и 3.19) находим

$$\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}} = \frac{32\pi^2 (n+1)^2 R^2}{\alpha} |\mu| \tag{3.20}$$

т. е. отношение b_{m+1} / a_{m+1} не зависит от m. Следовательно, можно считать, что b_m / a_m также не зависит от m. Но тогда и отношения

$$\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{64\pi^3 (n+1)^3 HR^2}{\alpha n} \left(2 + \frac{a_m}{b_m} |\mu| \right) |\mu|$$

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \frac{2\pi H (n+1)}{n} \left(2 \frac{b_m}{a_m} + |\mu| \right)$$

не будут зависеть от m. При этом эти последние отношения при достаточно малом μ будут меньше единицы, так как на основании (3.20) можно считать, что b_m / a_m содержит множитель $|\mu|$. Отсюда непосредственно вытекает равномерная сходимость функции f_m к некоторой функции f и постоянных M_m и N_m к некоторым постоянным M и N. Следовательно, функции $x_m = M_m \cos nt + N_m \sin nt + \mu f_m$ также сходятся равномерно к некоторой функции x.

Так как все функции x_m периодические, то и функция x будет также периодической. Обычным для метода последовательных приближений приемом легко показать, что полученная таким образом периодическая функция x действительно удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.1) и, следовательно, представляет искомое периодическое решение.

Поступила в редакцию
15 XI 1949

Уральский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Малкин И. Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат. 1949.