Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ОБ ОЦЕНКЕ ХАРАКТЕРИСТИЧНЫХ ЧИСЕЛ РЕШЕНИЙ ПОЧТИ ДИАГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. Ф. Былов

(Москва)

Теорема. Пусть система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

является правильной и коэффициенты ее непрерывные ограниченные функции t, определенные для всех значений $t \geqslant 0$, удовлетворяют условиям

$$p_{ii} \geqslant p_{i+1,\, i+1} + 2(n-1)\,Q \tag{2}$$

где

$$Q = \max_{ij} |p_{ij}| \quad \text{при } j \neq i \quad (i, i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

Тогда существует нормальная система решений системы (1), характеристичные числа λ_k которых могут быть оценены неравенствами

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t [-p_{kk}(\tau) - (n-1)\,Q(\tau)]\, d\tau \leqslant \lambda_k \leqslant$$

$$\leqslant -\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \int_0^t [p_{kk}(\tau) - (n-1)\,Q(\tau)]\, d\tau \quad (k = 1, \ldots, n)$$

Доказательство. Построим нормальную систему решений $x_{k1}, x_{k2}, \ldots, x_{kn}$ $(k = 1, \ldots, n)$, матрица начальных значений которых имеет вид:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ \alpha_{21} & 1 & \ldots & & . \\ . & . & \ldots & & . \\ . & & \ldots & 1 & 0 \\ \alpha_{n1} & & \ldots & \alpha_{n\,n-1} & 1 \end{matrix} \right\| \tag{4}$$

Существование нормальной системы решений с матрицей такого вида следует из способа построения нормальных систем решений, предложенного Ляпуновым. При таком построении за исходную систему независимых решений достаточно взять систему решений с единичной матрицей для начальных значений.

Покажем, что характеристичное число k-го решения рассматриваемой нормальной системы оценивается неравенствами, указанными в формулировке теоремы.

Умножим правую и левую часть i-го уравнения системы (1) на x_i. Имеем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} x_i^2 = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_j x_i \tag{5}$$

Суммируя равенства (5) по i от 1 до k и используя условия (2), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_jx_i = \sum_{i=1}^{k} p_{ii}x_i^2 + \sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{n} p_{ij}x_jx_i \geqslant$$

$$\geqslant p_{kk}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - Q\sum_{i=1}^{k}\sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}} |x_jx_i| \geqslant p_{kk}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - Q\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\underset{(i\neq j)}{(x_i^2 + x_j^2)}\right)_{ij} =$$

$$= p_{kk}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \frac{Q}{2}\left[(n-1)\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2\right] \qquad (6)$$

Суммирование равенств (5) по i от $k+1$ до n дает

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_jx_i$$

Используя условия (2), имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \leqslant p_{k+1\,k+1}\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 + Q\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underset{(i\neq j)}{|x_jx_i|} \leqslant$$

$$\leqslant [p_{kk} - 2(n-1)Q]\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 + Q\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\underset{(i\neq j)}{(x_i^2 + x_j^2)}\right)_{ij} =$$

$$= [p_{kk} - 2(n-1)Q]\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 + \qquad (7)$$

$$+ \frac{Q}{2}\left[(n-1)\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 + (n-k)\sum_{1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\right]$$

Используя неравенства (6) и (7), получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\right) \geqslant p_{kk}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\right) -$$

$$-\frac{Q}{2}\left[(n-1)\sum_{i=1}^{k} x_i^2 + k\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 4(n-1)\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 +\right.$$

$$\left. + (n-1)\sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 + (n-k)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\right] =$$

$$= p_{kk}\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\right) - Q(n-1)\left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2\right) \qquad (8)$$

Из (4) заключаем [1], что при $t = 0$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_{ki}^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_{ki}^2\right) > 0 \qquad (9)$$

В силу непрерывности функций x_{ki} неравенство будет справедливым и на некотором отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. Для этого отрезка изменения t имеем

$$\sum_{i=1}^{k} x_{ki}^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_{ki}^2 \geqslant C_1 \exp\left\{2\int_0^t [p_{kk}(\tau) - Q(\tau)(n-1)]\,d\tau\right\} \qquad (10)$$

---

[1] Метод оценки подобных сумм проведен в работе Перрона[1].

Используя то, что в правой части неравенства (10) находится функция, отличная от нуля при любом t, легко показать справедливость неравенства (9) и, следовательно, и неравенства (10) для любого $t > 0$.

Теоремы о характеричном числе суммы и произведения функций позволяют сделать оценку характеристичного числа k-го решения

$$X(x^{(k)}) \leqslant -\overline{\lim}\, \frac{1}{t} \int_0^t [p_{kk}(\tau) - Q(\tau)(n-1)]\, d\tau \tag{11}$$

Рассмотрим систему уравнений, присоединенную к системе (1):

$$\frac{dy_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} p_{ji} y_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Подстроим для нее по известному правилу нормальную систему решений

$$y_{ki} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, \ldots, n \\ i = 1, \ldots, n \end{pmatrix} \tag{12}$$

Здесь Δ_{ki} обозначает алгебраическое дополнение элемента x_{ki} матрицы нормальной системы решений системы (1).

Легко видеть, что матрица начальных значений решений будет иметь вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \beta_{12} & \ldots & \beta_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \beta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{Vmatrix}$$

Из условий (2) теоремы имеем

$$-p_{i+1\, i+1} \geqslant -p_{ii} + 2(n-1)Q$$

т. е. для коэффициентов присоединенной системы условие (2) выполнено. Другой порядок индексов, естественно, роли не играет.

Следовательно, аналогично можно произвести оценку выражения

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=k}^{n} y_i^2 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i^2 \right)$$

из которой для k-го решения из нормальной системы решений (12) получим

$$X(y^{(k)}) \leqslant -\overline{\lim}\, \frac{1}{t} \int_0^t [-p_{kk} - (n-1)Q]\, d\tau \tag{13}$$

Так как система (1) по предположению является правильной, то

$$X(y^{(k)}) = -X(x^{(k)})$$

Используя (13), получим

$$X(x^{(k)}) \geqslant \underline{\lim}_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t [-p_{kk} - (n-1)Q]\, d\tau \tag{14}$$

Объединяя (11) и (14), получим требуемую оценку для $\lambda_k = X(x^{(k)})$.

Поступила в редакцию
18 X 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Perron O. Math. Zeitschrift. 1930. Bd. 31.