Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. М. Кац

(Ленинград)

Нелинейные дифференциальные уравнения вида

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x})\dot{x} + k^2(x, \dot{x})x = 0 \tag{1}$$

встречающиеся в ряде задач механики и радиотехники, не интегрируются в известных функциях и должны решаться приближенным методом осреднения.

В наиболее распространенном варианте этого метода, предложенном Ван-дер-Полем[1], полагают

$$x = \alpha \sin(\omega t + \varepsilon) \tag{2}$$

где t — время, являющееся независимой переменной в уравнении (1), ω — некоторая постоянная, α и ε — медленно изменяющиеся функции от t, связанные соотношением

$$\dot{\alpha} \sin(\omega t + \varepsilon) + \alpha\dot{\varepsilon}\cos(\omega t + \varepsilon) = 0 \tag{3}$$

Для $\dot{\alpha}$ и $\dot{\varepsilon}$ получают осредненные за период $2\pi/\omega$ «укороченные» уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\,(\alpha\sin u, \alpha\omega\cos u)\cos^2 u\,du \\ \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} k^2\,(\alpha\sin u, \alpha\omega\cos u)\sin^2 u\,du - \frac{\omega}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

Отсюда ε и α находятся квадратурами.

Остановимся на частном случае, когда коэффициенты h и k^2 зависят только от x. Тогда первое уравнение (4), принимающее вид

$$\dot{\alpha} = -\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} h\,(\alpha\sin u)\cos^2 u\,du \tag{5}$$

дает зависимость мгновенной амплитуды α от времени, а второе уравнение (4), представленное в виде

$$\omega + \dot{\varepsilon} = \frac{\omega}{2} + \frac{1}{2\pi\omega}\int_0^{2\pi} k^2(\alpha\sin u)\sin^2 u\,du \tag{6}$$

определяет мгновенную частоту $\omega + \dot{\varepsilon}$.

Если можно так выбрать постоянную ω, чтобы в течение всего рассматриваемого процесса $\dot{\varepsilon}$ оставалось малой величиной по сравнению с ω, то, представляя уравнение (6) в виде

$$\omega^2 + 2\omega\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k^2(\alpha\sin u)\sin^2 u\,du \tag{7}$$

и добавляя к левой части его малую величину второго порядка $\dot{\varepsilon}^2$, получим формулу для квадрата мгновенной частоты

$$(\omega + \dot{\varepsilon})^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} k^2 (\alpha \sin u) \sin^2 u \, du \tag{8}$$

правая часть которой не зависит от выбора постоянной ω.

Если же частота рассматриваемого процесса значительно изменяется с течением времени, то $\dot{\varepsilon}$ становится величиной того же порядка, что ω, и замена формулы (6) формулой (8) теряет основание. Пользование же формулой (6) приводит к физически нелепым следствиям, а именно, мгновенная частота $\omega + \dot{\varepsilon}$ оказывается зависящей от выбора постоянной ω и всегда остается большей, чем $\omega / 2$.

Такие результаты объясняются тем, что если $\dot{\varepsilon}$ перестает быть малой величиной, то ε не может считаться медленно изменяющейся функцией времени, следовательно, нарушается одна из основных предпосылок рассматриваемого метода и он становится непригодным.

Сказанное остается верным и для уточненного варианта метода осреднения, данного Булгаковым[2].

Для процессов, описываемых уравнениями вида (1), но отличающихся тем, что частота их, медленно изменяясь, за достаточно длительное время существенно отклоняется от первоначальной, целесообразно применять следующее новое видоизменение метода осреднения. Положим

$$x = \alpha \sin \left(\int_0^t \omega \, dt + \varepsilon \right) \tag{9}$$

где α, ω и ε суть медленно изменяющиеся функции от времени, причем $\dot{\omega}$ будем также считать медленно изменяющейся функцией времени. Накладывая на эти функции условие

$$\dot{\alpha} \sin \left(\int_0^t \omega \, dt + \varepsilon \right) + \alpha \dot{\varepsilon} \cos \left(\int_0^t \omega \, dt + \varepsilon \right) = 0 \tag{10}$$

и подставляя выражение (9) в уравнение (1), получим

$$\begin{gathered} \alpha \left\{ k^2 [\alpha \sin \tau(t), \alpha\omega \cos \tau(t)] - \omega^2 - \omega\dot{\varepsilon} \right\} \sin \tau(t) + \{ \alpha\dot{\omega} + \dot{\alpha}\omega + \\ + \alpha\omega h [\alpha \sin \tau(t), \alpha\omega \cos \tau(t)] \} \cos \tau(t) = 0, \qquad \tau(t) = \int_0^t \omega \, dt + \varepsilon \end{gathered} \tag{11}$$

Определяя $\dot{\alpha}$ и $\dot{\varepsilon}$ из уравнений (10) и (11) и осредняя полученные формулы за период входящих в них тригонометрических функций, придем к уравнениям

$$\begin{gathered} \dot{\alpha} = -\frac{\alpha\dot{\omega}}{2\omega} - \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} h (\alpha \sin u, \alpha\omega \cos u) \cos^2 u \, du \\ \dot{\varepsilon} = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} k^2 (\alpha \sin u, \alpha\omega \cos u) \sin^2 u \, du - \frac{\omega}{2} \end{gathered} \tag{12}$$

Потребуем теперь, чтобы ω была осредненной за период круговой частотой процесса и, следовательно, чтобы в среднем за период было

$$\dot{\varepsilon} = 0 \tag{13}$$

Тогда из второго уравнения (12) получим

$$\omega^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} k^2(\alpha\sin u,\ \alpha\omega\cos u)\sin^2 u\,du \tag{14}$$

Первое уравнение (12) после замены

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{d\alpha}\dot{\alpha} \tag{15}$$

принимает окончательный вид

$$\dot{\alpha}\left(1 + \frac{\alpha}{2\omega}\frac{d\omega}{d\alpha}\right) = -\frac{\alpha}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\alpha\sin u,\ \alpha\omega\cos u)\cos^2 u\,du \tag{16}$$

После того как из уравнения (14) определена ω в зависимости от α и подставлена в уравнение (16), последнее становится дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными α и t и интегрируется квадратурой. При этом в решение входит одна постоянная интегрирования, а другой является ε.

В качестве примера рассмотрим дифференциальные уравнения одной системы регулирования с нелинейным сервомотором

$$\dot{\varphi} = \xi, \qquad \sigma = -(\varphi + \xi), \qquad T\dot{\xi} = \sigma\sqrt{|\sigma|} \tag{17}$$

Исключая переменные φ и ξ, получаем дифференциальное уравнение для σ:

$$\ddot{\sigma} + \frac{3\sqrt{|\sigma|}}{2T}\dot{\sigma} + \frac{\sqrt{|\sigma|}}{T}\sigma = 0 \tag{18}$$

Формула (14) дает для этого случая

$$\omega^2 = \frac{4\sqrt{\alpha}}{\pi T}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{5/2}u\,du = \frac{2\Gamma(7/4)\Gamma(1/2)}{\pi\Gamma(9/4)}\frac{\sqrt{\alpha}}{T} = \frac{0.916\sqrt{\alpha}}{T} \tag{19}$$

Уравнение (16) приобретает вид: (20)

$$\dot{\alpha}\left(1 + \frac{1}{8}\right) = -\frac{3\alpha^{3/2}}{\pi T}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin^{1/2}u\cos^2 u\,du = -\frac{3\Gamma(3/4)\Gamma(3/2)}{2\pi\Gamma(9/4)}\frac{\alpha^{3/2}}{T} = -\frac{0.458\alpha^{3/2}}{T}$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{4\Gamma(3/4)\Gamma(1/2)}{3\pi\Gamma(9/4)}\frac{t+C}{T} = \frac{0.204(t+C)}{T} \tag{21}$$

где C — постоянная интегрирования.

Подстановка выражения для α в формулу (19) дает

$$\omega = \frac{3}{\sqrt{2(t+C)}} \tag{22}$$

Окончательно получаем по формуле (9)

$$\sigma = \frac{24.2T^2}{(t+C)^2}\sin\left[3\sqrt{2(t+C)} + \varepsilon\right] \tag{23}$$

Переменная σ совершает затухающие колебания, частота которых по мере затухания уменьшается, стремясь к нулю.

Поступила в редакцию
18 X 1949

Ленинградский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Крылов Н. М., Боголюбов Н. Н. Введение в нелинейную механику ГНТИУ. 1937.
2. Булгаков Б. В. Колебания. ГТТИ. 1949. Т. I.