Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

К ВОПРОСУ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ПРЯМОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

В. К. Белякова

(Москва)

Задача об устойчивости движения вязкой жидкости в прямой круглой трубе с применением метода малых колебаний была рассмотрена Секслем[1]. Он пришел к выводу о том, что движение устойчиво по отношению к возмущениям достаточно малой амплитуды. Решение, данное им, предполагает выполнение граничных условий, которые в действительности не имеют места. Ниже приводится решение задачи при выполнении точных граничных условий.

Будем пользоваться цилиндрической системой координат с осью z, направленной по оси трубы. В качестве основного потока рассмотрим течение, для которого компоненты скорости равны:

$$v_r = v_\theta = 0, \qquad v_z = A + Br^2 = W(r)$$

Пусть на это течение накладывается возмущение в виде волны достаточно малой амплитуды, так что составляющие скорости возмущенного движения будут

$$v_r = v_{r1}, \qquad v_\theta = 0, \qquad v_z = W(r) + v_{z1}.$$

Введем функцию тока

$$\psi = -\int rW\,dr + \psi_1$$

При этом

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad v_z = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \qquad v_{r1} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial z}, \qquad v_{z1} = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_1}{\partial r}$$

Введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{r}{a}, \qquad \zeta = \frac{z}{a}, \qquad \tau = \frac{Rt\nu}{a^2}, \qquad U = \frac{W}{W_{\max}}, \qquad R = \frac{aW_{\max}}{\nu}$$

где a — радиус трубы, ν — коэффициент вязкости.

Тогда, линеаризируя уравнения движения, исключая давление p и положив

$$\psi_1 = \varphi(\xi)\exp[i\alpha(\zeta - c\tau)]$$

получим

$$\xi\frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\xi}y\right) - [\alpha^2 + i\lambda^2(U - c)]\,y = 0 \tag{1}$$

где

$$y = \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} - \alpha^2\varphi, \qquad \lambda^2 = \alpha R \tag{2}$$

Уравнение (1) интегрируется при следующих условиях:

$$\varphi = 0, \qquad \frac{d\varphi}{d\xi} = 0 \qquad \text{при} \quad \xi = 1 \tag{3}$$

$$\frac{\varphi}{\xi} = 0, \qquad \frac{1}{\xi}\frac{d\varphi}{d\xi} = Q \qquad \text{при} \quad \xi = 0 \tag{4}$$

где Q — конечная величина.

Вместо точных граничных условий Сексль использует условия

$$\frac{1}{\xi} y = 0, \qquad \frac{1}{\xi}\frac{dy}{d\xi} = 0 \qquad \text{при} \quad \xi = 0$$

где y согласно (2).

Задача состоит в том, чтобы при заданном числе Рейнольдса R основного течения определить по заданной длине волны возмущения $2\pi / \alpha$ значение $c = c_r + ic_i$ и этим при $c_i > 0$ увеличение возмущений с течением времени, а при $c_i < 0$ их затухание. Будем предполагать число R достаточно большим.

Прежде всего покажем, что $0 < c_r < 1$.

Рассмотрим уравнение (1) и уравнение, которому удовлетворяет функция $\bar{\varphi}$, сопряженная с φ, представив их в виде

$$(U - c)\, D\varphi = -\frac{i}{\lambda^2} DD\varphi, \qquad (U - \bar{c})\, D\bar{\varphi} = \frac{i}{\lambda^2} DD\bar{\varphi} \tag{5}$$

где оператор D имеет вид:

$$D = \frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} - \alpha^2$$

Умножим первое уравнение (5) на $(\bar{\varphi} / \xi)\, d\xi$, а второе на $(\varphi / \xi)\, d\xi$; затем сложим результаты и проинтегрируем в пределах от 0 до 1. Тогда, принимая во внимание граничные условия, получим

$$\int_0^1 (U - c_r)\,[D(\varphi)\bar{\varphi} + D(\bar{\varphi})\varphi] \frac{d\xi}{\xi} - ic_i \int_0^1 [D(\varphi)\bar{\varphi} - D(\bar{\varphi})\varphi] \frac{d\xi}{\xi} +$$

$$+ \frac{i}{\lambda^2}\int_0^1 [DD(\varphi)\bar{\varphi} - DD(\bar{\varphi})\varphi] \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

Интегралы, входящие в это уравнение, соответственно равны:

$$-2\int_0^1 (U - c_r)(\varphi'\bar{\varphi}' + \alpha^2\varphi\bar{\varphi}) \frac{d\xi}{\xi}, \qquad 0, \qquad \left[\frac{\varphi''\bar{\varphi}' - \varphi'\bar{\varphi}''}{\xi}\right]_{\xi=0} \tag{6}$$

Здесь последнее выражение оказывается равным нулю, так как ниже решение будет выбрано в виде $\varphi = \xi^4 (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots)$.

Таким образом, уравнение (5) примет вид:

$$\int_0^1 (U - c_r)(\varphi'\bar{\varphi}' + \alpha^2\varphi\bar{\varphi}) \frac{d\xi}{\xi} = 0$$

Это соотношение может выполняться лишь в том случае, если

$$U_{\min} < c_r < U_{\max}, \quad \text{или} \quad 0 < c_r < 1$$

В дальнейшем, желая определить границу, отделяющую область устойчивости движения от областей неустойчивости, будем рассматривать лишь действительные значения параметра c, т. е. будем полагать $c = c_r$.

Введем новое независимое переменное t и новую функцию u по формулам

$$\frac{dt}{d\xi} = \frac{g^2}{h^2}, \qquad u = ghy \qquad \left(g^4 = -\frac{i(U - c)}{\xi}, \quad h^4 = \frac{1}{\xi}\right) \tag{7}$$

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{gh}\frac{d^2 gh}{dt^2} - \frac{\alpha^2 h^4}{g^4}\right) u = 0 \tag{8}$$

При этом зависимость между t и ξ дается формулой

$$t = e^{3\pi i/4}(1-c)\int\limits_{-1}^{x}\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{2} \qquad \left(x=\frac{\xi}{\sqrt{1-c}}\right)$$

Уравнение (8) в окрестности точки $t=0$ имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\left(\lambda^2+\frac{5}{36}\frac{1}{t^2}\right)u = F(t)\,u \tag{9}$$

где

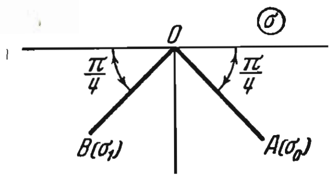
$$F(t)=\frac{5}{36}\frac{1}{t^2}+\frac{1}{gh}\frac{d^2gh}{dt^2}+\frac{i\alpha^2}{U-c}$$

Интеграл уравнения (9) удовлетворяет соотношению

$$u = C_1\sqrt{\sigma}H^{(1)}_{1/3}(\sigma)+C_2\sqrt{\sigma}H^{(2)}_{1/3}(\sigma)+$$
$$+\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\sqrt{\sigma\omega}\left[H^{(2)}_{1/3}(\sigma)\,H^{(1)}_{1/3}(\omega)-H^{(1)}_{1/3}(\sigma)\,H^{(2)}_{1/3}(\omega)\right]u(\omega)\,F(\omega)\,d\omega \tag{10}$$

в котором $\sigma=\lambda t$ и $H^{(1)}_{1/3}$, $H^{(2)}_{1/3}$ — функции Ганкеля. Переменное σ изменяется (фиг. 1) вдоль ломаной AOB. Покажем, что интеграл, входящий в формулу (10), есть ограниченная функция переменого x, причем

$$0\leqslant x\leqslant 1/\sqrt{1-c}.$$



Фиг. 1

Для этого исследуем подинтегральную функцию для значений $\omega=0$ и $\omega=\sigma_0$, что соответствует значениям $x=1$ и $x=0$. При $\omega=0$ функция $F(\omega)$ имеет порядок $\omega^{-2/3}$, функция $u=ghy$ в этой точке особенностью не обладает. Рассмотрим $F(\omega)$ и u в окрестности точки $\omega=\sigma_0$. Функция F переменного x в окрестности точки $x=0$ имеет порядок x^{-2}. Чтобы установить порядок u, обратимся к уравнению (1), являющемуся уравнением класса Фукса, согласно теории уравнений которого ищем решение его в виде $\varphi=\xi^r(a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\ldots)$. Для r получим четыре значения: $r_1=4$, $r_2=r_3=2$ и $r_4=0$.

Существует голоморфный интеграл уравненения (1), соответствующий $r_1=4$. При определении функции $y=D\varphi$ берем именно этот интеграл, что обусловлено граничными условиями задачи.

Тогда y как функция переменного x в окрестности точки $x=0$ имеет порядок x^2.

На основании вышесказанного и свойств функций Ганкеля можно установить, что интеграл формулы (9) есть функция, ограниченная при всех изменениях (фиг. 1) переменного σ вдоль ломаной AOB.

Пусть при всех этих изменениях

$$\left|\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma}\sqrt{\sigma\omega}\left[H^{(2)}_{1/3}(\sigma)\,H^{(1)}_{1/3}(\omega)-H^{(1)}_{1/3}(\sigma)\,H^{(2)}_{1/3}(\omega)\right]F(\omega)\,u(\omega)\,d\omega\right|<M$$

где M — некоторое положительное число.

Тогда для достаточно больших значений λ получим

$$u(\sigma)=C_1\sqrt{\sigma}H^{(1)}_{1/3}(\sigma)+C_2\sqrt{\sigma}H^{(2)}_{1/3}(\sigma)+O(1/\lambda)$$

Чтобы определить φ, нужно согласно (2) и (7) решить уравнение

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}-\frac{1}{\xi}\frac{d\varphi}{d\xi}-\alpha^2\varphi=\frac{u}{gh}$$

Решение его, как известно, имеет следующий вид:

$$\varphi = C_3\xi I_1(\alpha\xi) + C_4\xi K_1(\alpha\xi) + \int\limits_0^{\xi} \xi[K_1(\alpha\xi) I_1(\alpha\rho) - I_1(\alpha\xi) K_1(\alpha\rho)] \frac{u}{gh}\, d\rho$$

где I_1, K_1 — функции Бесселя.

В области изменения σ будет $\operatorname{Im}(\sigma) < 0$ и, следовательно, при неограниченном увеличении параметра λ модуль функции $H^{(1)}_{1/3}(\sigma)$ будет стремиться к бесконечности. Так как согласно (4) ищется ограниченное решение φ, то следует положить $C_1=0$. Для определения постоянных C_2, C_3 и C_4 остающиеся условия (3) и (4) дают систему трех однородных уравнений. Приравнивая нулю определитель этой системы, после преобразований, пренебрегая величинами порядка λ^{-1}, получим уравнение для определения c:

$$\int\limits_0^1 I_1(\alpha\rho) \frac{\sqrt{\rho}}{gh} H^{(2)}_{1/3}(\rho)\, d\rho = 0$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$\int\limits_0^k I_1(\beta x) \frac{\sqrt{xz}}{(1-x^2)^{1/4}} H^{(2)}_{1/3}(\mu z)\, dx = 0$$

где

$$x = \frac{\rho}{\sqrt{1-c}}, \quad \beta = \alpha\sqrt{1-c}, \quad \mu = \lambda\,(1-c), \quad k = \frac{1}{\sqrt{1-c}}$$

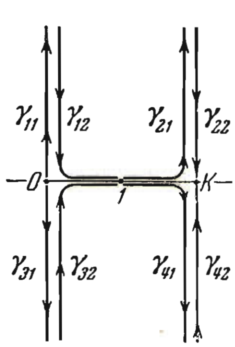
$$z = \left(\int\limits_{-1}^{x} \sqrt{1-x^2}\, dx - \frac{\pi}{2}\right) \exp\frac{3\pi i}{4}$$

Разбивая последний интеграл на два в пределах от 0 до 1 и от 1 до k, представим в каждом из них функцию $H^{(2)}_{1/3}$ контурным интегралом. После некоторых преобразований последнее уравнение принимает вид:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{d\tau}{[\tau(\tau+2i)]^{1/6}} \int\limits_0^1 I_1(\beta x) \frac{\sqrt{xz}}{(1-x^2)^{1/4}} e^{-\mu z(\tau+i)} dx +$$

$$+ \int\limits_0^{\infty} \frac{d\tau}{[\tau(\tau-2i)]^{1/6}} \int\limits_1^k I_1(\beta x) \frac{\sqrt{xz}}{(1-x^2)^{1/4}} e^{\mu z(\tau-i)} dx = 0$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде



Фиг. 2

$$\int\limits_0^1 \left(\frac{J_{11}+J_{12}}{[\tau(\tau+2i)]^{1/6}} + \frac{J_{21}+J_{22}}{[\tau(\tau-2i)]^{1/6}}\right) d\tau +$$

$$+ \int\limits_1^{\infty} \left(\frac{J_{31}+J_{32}}{[\tau(\tau+2i)]^{1/6}} + \frac{J_{41}+J_{42}}{[\tau(\tau-2i)]^{1/6}}\right) d\tau = 0 \qquad (11)$$

где

$$J_{lm} = \int\limits_{\gamma_{lm}} I_1(\beta x) \frac{\sqrt{x}\sqrt[6]{z^5}}{(1-x^2)^{1/4}} e^{-\mu z(\tau+i)} dx$$

$$J_{nm} = \int\limits_{\gamma_{nm}} I_1(\beta x) \frac{\sqrt{x}\sqrt[6]{z^5}}{(1-x^2)^{1/4}} e^{\mu z(\tau-i)} dx \qquad \left(\begin{matrix} l = 1,3 \\ n = 2,4 \\ m = 1,3 \end{matrix}\right) \qquad (12)$$

Контуры интегрирования для интегралов (12) приведены на фиг. 2.

Можно показать, что интегралы J_{lm} и J_{nm} являются сходящимися. Применяя метод вычисления интегралов по контурам, проходящим через «точку перевала»[2] (в рассматриваемом случае точка $x = 1$), найдем их асимптотические выражения. При этом окажется, что

$$J_{11} = J_{31} = O\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^{5/2}}\right), \qquad J_{22} = J_{42} = 0\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^{5/2}}\right)$$

$$J_{12} = J_{13} = \frac{M\exp(7\pi i/6)}{(\tau+i)^{4/3}}\left\{I_1(\beta)\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) + \left[\frac{I_1(\beta)}{2} + \frac{dI_1(\beta x)}{dx}\bigg|_{x=1}\right]\frac{N\exp(\pi i/6)}{[\mu(\tau+i)]^{2/3}}\right\}$$

$$J_{21} = J_{41} = \frac{M\exp(-\pi i/6)}{(\tau-i)^{4/3}}\left\{I_1(\beta)\,\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) + \left[\frac{I_1(\beta)}{2} + \frac{dI_1(\beta x)}{dx}\bigg|_{x=1}\right]\frac{N\exp(-\pi i/6)}{[\mu(\tau-i)]^{2/3}}\right\}$$

Здесь M и N — некоторые постоянные числа.

Подставляя найденные выражения в уравнение (11) и пренебрегая малыми порядка λ^{-1} и более высокого, для определения c получим уравнение в виде

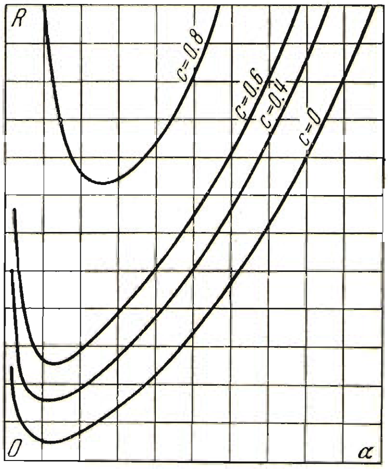
$$(L\mu)^{2/3} = \beta\frac{I_0(\beta)}{I_1(\beta)} - \frac{1}{2} \tag{13}$$

причем L — некоторое постоянное положительное число.

Для значений c, близких к единице, будет выполняться приближенное соотношение

$$\alpha R = \frac{C}{(1-c)^2} \qquad (C = \text{const})$$

Давая значения параметру c, получим семейство кривых, изображающих связь между α и R. Фиг. 3 показывает, что выше кривой семейства, соответствующей значению $c = 0$, осуществляются возмущения, не возрастающие и не затухающие с течением времени. Это есть область устойчивости движения жидкости. Ниже кривой $c = 0$ возмущения такие, что $c_i \neq 0$.



Фиг. 3

Определение знака c_i в этой области выходит за пределы рассматриваемой приближенной теории, в которой не учитываются малые порядка λ^{-1}. Но естественно предположить, что здесь $c_i < 0$, так как для малых чисел R поток вязкой жидкости в трубе устойчив по отношению к достаточно малым возмущениям. Эта область и будет областью, где заключены малые значения R.

Таким образом, метод малых колебаний приводит к выводу: поток вязкой жидкости в трубе устойчив по отношению к достаточно малым возмущениям вида $\varphi(\xi)\exp[i\alpha(\zeta - c\tau)]$.

Лин[3], исследовавший устойчивость плоско-параллельного потока, установил неустойчивость потока Пуазейля для достаточно больших, но конечных чисел R. При этом основное уравнение, определяющее функцию $\varphi(\xi)$, связанную с функцией тока возмущающего движения $\psi = \varphi(\xi)\exp[i\alpha(\zeta - c\tau)]$, имеет вид:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha R}(\varphi^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \tag{14}$$

Устойчивость потока Куэтта, для которого $U = A\xi$, Лин не рассматривал. Но Хопф[4] показал, что такое течение устойчиво по отношению к возмущениям достаточно малой амплитуды. Для неустойчивости плоско-параллельного потока оказывается важным присутствие в уравнении (14) члена, содержащего U''.

В случае осесимметричного течения уравнение, аналогичное (11), будет

$$(U-c)\left(\varphi''-\frac{1}{\xi}\varphi'-\alpha^2\varphi\right)-\left(U''-\frac{1}{\xi}U'\right)\varphi=$$

$$=-\frac{i}{\alpha R}\left[\varphi^{IV}-\frac{2}{\xi}\varphi'''+\frac{3}{\xi^2}\varphi''-\frac{3}{\xi^3}\varphi'-\alpha^2\left(2\varphi''-\frac{2}{\xi}\varphi'-\alpha^2\varphi\right)\right]$$

которое при $U=1-\xi^2$ переходит в уравнение (1).

По аналогии с плоско-параллельным течением можно предположить, что и для этого случая выражение $U''-U'/\xi$ играет важную роль в появлении неустойчивости.

В заключение отметим, что при определении критического значения числа R Рейнольдс предполагал существующими в потоке произвольные по величине возмущения. В то же время экспериментально установлено, что с уменьшением величины возмущений в потоке вязкой жидкости в трубе критическое значение числа R неограниченно растет, и нет основания считать, что существует для него верхняя граница.

Поступила в редакцию
5 VII 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Sexl Th. Über dreidimensionale Störungen der Poiseuillesche Strömung. Annalen der Physik. 1927. Bd. 84.
2. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть II. ОНТИ. 1937.
3. Lin C. C. On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows. Quarterly of Applied Mathematics. 1945. Vol. III. No. 2.
4. Hopf L. Der Verlauf kleiner Schwingungen au l einer Strömung reibender Flüssigkeit. Annalen der Physik. 1914. Bd. 44.
5. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. ОНТИ. 1935.