Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIV, 1950

ТЕПЛОПЕРЕДАЧА В ЛАМИНАРНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

М. Е. Швец

(Ленинград)

Настоящая заметка посвящена приближенному расчету теплопередачи в ламинарном пограничном слое на теле вращения с тупой передней частью.

Пусть U' — скорость невозмущенного потока, направленная вдоль оси симметрии тела вращения, x' и y' — координаты, отсчитываемые соответственно вдоль обвода меридионального сечения тела и по нормали к обводу, $r = r_0(x')$ — расстояние от точек обвода сечения до оси вращения тела, u' и v' — проекции скорости соответственно на оси x' и y', ν — кинематическая вязкость, k — коэффициент температуропроводности; тогда приближенные уравнения установившегося движения, неразрывности и притока тепла будут иметь вид:

$$u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} - U'\frac{\partial U'}{\partial x'} = \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{u'}{r_0}\frac{\partial r_0}{\partial x'} = 0, \qquad u'\frac{\partial T}{\partial x'} + v'\frac{\partial T}{\partial y'} = k\frac{\partial^2 T}{\partial y'^2}$$

Введем безразмерные величины по формулам

$$u' = U_0 u, \quad U' = U_0 U, \quad y' = \frac{l}{\sqrt{R}}\,y, \quad x' = \frac{l}{\sqrt{R}}\,x, \quad \vartheta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}$$

где U_0 — характерная скорость, l — характерный размер, R — число Рейнольдса, $T_1(x)$ — температура обтекаемой поверхности и $T_0 = \mathrm{const}$ — температура на бесконечности. Тогда, исключая нормальную составляющую скорости v, приходим к следующим безразмерным уравнениям ($P = \nu / k$):

$$\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{d\ln r_0}{dx}\int_0^y u\,dy - U\frac{dU}{dx} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ u\frac{\partial \vartheta}{\partial x} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy - \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\frac{d\ln r_0}{dx}\int_0^y u\,dy + u(\vartheta - 1)\frac{d\ln(T_1 - T_0)}{dx} = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \end{gathered} \tag{2}$$

Граничные условия для u и ϑ будут

$$u = 0, \quad \vartheta = 0 \quad \text{при } y = 0$$

$$u = U, \quad \vartheta = 1 \quad \text{при } y = \infty$$

Будем решать уравнения (2) методом последовательных приближений (см. [1]), введя в рассмотрение толщину скоростного пограничного слоя δ, толщину температурного пограничного слоя δ_* и записывая условия на бесконечности как условия при δ_* и δ.

Нулевые приближения для ϑ и u, получающиеся в результате приравнивания левых частей уравнений (2) нулю, имеют следующий вид:

$$u = U\xi, \qquad \vartheta = \eta \qquad \left(\xi = \frac{y}{\delta}, \quad \eta = \frac{y}{\delta_*}\right)$$

Подставляя найденные значения u и ϑ в левые части уравнений (2), находим следующее приближение, ограничиваясь которым, имеем

$$\begin{aligned} \frac{u}{U} &= \xi + \frac{\delta^2 U}{2}\left[\frac{1}{12}(\xi^4 - \xi)\frac{d}{dx}\ln\frac{U}{\delta r_0} - (\xi^2 - \xi)\frac{d\ln U}{dx}\right] \\ \vartheta &= \eta - \frac{U\delta_*^3 Pr}{2\delta}\left[\frac{\eta^4 - \eta}{12}\frac{d}{dx}\ln\frac{\delta_*^2 U r_0}{\delta(T_1 - T_0)^2} + \frac{\eta^3 - \eta}{3}\frac{d}{dx}\ln(T_1 - T_0)\right] \end{aligned} \tag{3}$$

Из условий

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)_{\xi=1} = \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} = 0$$

для определения δ и δ_* получаем линейные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\delta^2 + \delta^2\frac{\partial}{\partial x}[\ln U^6 r_0^2] &= \frac{16}{U} \\ \frac{d}{dx}\delta_*^3 + \delta_*^3\frac{\partial}{\partial x}\ln\left[\left(\frac{U r_0}{\delta}\right)^{3/2}(T_1 - T_0)\right] &= \frac{12\,\delta}{UPr} \end{aligned} \tag{4}$$

Если считать, что $\delta(0) = \delta_*(0) = 0$, то решение этих уравнений будут

$$\delta^2 = 16U^{-6}r_0^{-2}\int_0^x U^5 r_0^2\,dx \tag{5}$$

$$\delta_*^3 = \frac{12}{Pr}\left(\frac{\delta}{U r_0}\right)^{3/2}\frac{1}{T_1 - T_0}\int_0^x (T_1 - T_0)\,r_0\sqrt{\frac{U r_0}{\delta}}\,dx \tag{6}$$

Скорость теплоотдачи, приходящейся на единицу поверхности в точке x, равна:

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{\delta_*}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{1}{\delta_*}\left[\frac{4}{3} + \frac{U\delta_*^3 Pr}{18\,\delta}\frac{d}{dx}\ln(T_1 - T_0)\right] \tag{7}$$

Полученные результаты справедливы, строго говоря, при условии, что $\delta_* < \delta$ причем они будут тем точнее, чем меньше толщина температурного пограничного слоя по сравнению с толщиной скоростного слоя.

Чтобы получить формулы для плоского случая, следует только всюду положить величину $r_0 = \text{const}$.

В виде примера рассмотрим случай, в котором

$$U = x^m, \quad T_1 = T_0 + Bx^\beta$$

где m, B, β — постоянные (плоская задача).

Согласно (5) имеем для толщины скоростного пограничного слоя

$$\delta = \alpha x^{\frac{1}{2}(1-m)}, \quad \alpha = \frac{4}{\sqrt{1 + 5m}}$$

Согласно (6) для толщины температурного пограничного слоя имеем

$$\delta_* = \sqrt[3]{\frac{48\alpha}{Pr\,[3(m + 1) + 4\beta]}}\,x^{\frac{1}{2}(1-m)} \tag{8}$$

Согласно (7) для скорости теплоотдачи получим

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_0 = \frac{3}{2}\left[1 + \frac{2\beta Pr}{[3(m+1)+4\beta]}\right]\sqrt[3]{\frac{3(m+1)+4\beta}{6\alpha} Pr\, x^{\frac{1}{2}(m-1)}} \qquad (9)$$

Этот случай рассмотрели Фэдж и Фокнер[2]. Они численно проинтегрировали уравнение для ϑ при некоторых значениях m и β и $P = 0.77$ (воздух).

Таблица 1

m	β	$(\partial\vartheta/\partial y)\, x^{(1-m)/2}$	
		по формуле (8)	по Фэджу и Фокнеру
0	0.5	0.421	0.425
	0.4	0.397	0.406
	0.3	0.377	0.386
	0.2	0.356	0.363
	0.0	0.305	0.310
1	0.0	0.524	0.521

Полученные ими значения для скорости теплоотдачи приведены в табл. 1; здесь же для сравнения даны значения $(\partial\vartheta/\partial y)_0$, рассчитанные по формуле (8).

Можно предполагать, что значения, полученные Фэджем и Фокнером, являются несколько завышенными.

Так, для плоской пластины при постоянной температуре ($m = \beta = 0$) по их методу получается

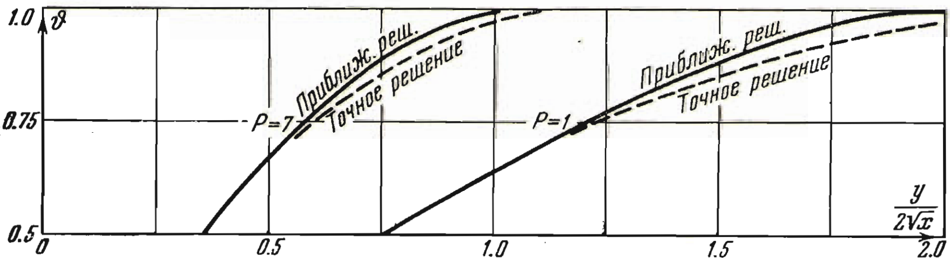
$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial y}\right)_0 \sqrt{x} = 0.310$$

вместо точного значения 0.303.

Для плоской пластинки согласно (3) и (5) имеем

$$\vartheta = \frac{4}{3}\eta - \frac{1}{3}\eta^4 \qquad \left(\eta = \frac{y}{\delta_*},\ \delta_* = \frac{4}{P^{1/3}}\sqrt{x}\right) \qquad (9)$$

На фиг. 1 приводятся графики распределения температуры над плоской пластиной, вычисленные по формуле (9) для некоторых значений чисел P; здесь же для



Фиг. 1

сравнения даны графики ϑ, полученные из известного точного решения[3].

Поступила в редакцию
1 VII 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Швец М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.
2. Fage A., Falkner V. ARC Reports and Memoranda. 1931. No. 1408.
3. Pohlhausen. ZAMM. 1921. Nr. 1.