Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБОБЩЕНИЕ ФОРМУЛЫ ОПЕРАЦИОННОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

А. В. Иванов

(Ленинград)

Пусть известны изображения по Хевисайду-Карсону функций $\varphi(t)$ и $e^{q(t)w}u(t)$:

$$\varphi^*(p) \doteqdot \varphi(t), \qquad \frac{2}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\varphi^*(p)\,dp = \varphi(t) \tag{1}$$

$$\psi(w, p) \doteqdot e^{q(t)w}u(t), \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\psi(w, p)\,dp = e^{q(t)w}u(t) \tag{2}$$

Тогда изображение $f^*(p)$ функции $\varphi(q(t))\,u(t)$

$$f^*(p) \doteqdot \varphi(q(t))\,u(t), \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}f^*(p)\,dp = \varphi(q(t))\,u(t) \tag{3}$$

можно найти по формуле

$$f^*(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\varphi^*(w)}{w}\psi(w, p)\,dw \tag{4}$$

Действительно, на основании (3) и (4) имеем

$$\varphi(q(t))\,u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}f^*(p)dp = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\,dp\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\varphi^*(w)}{w}\psi(w, p)\,dw$$

Предположив абсолютную сходимость последнего двойного интеграла, получим после перемены порядка интегрирования и использования формулы (2)

$$\varphi(q(t))\,u(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\varphi^*(w)}{w}\,dw\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{pt}}{p}\psi(w, p)\,dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{q(t)w}}{w}\varphi^*(w)\,u(t)\,dw$$

Таким образом,

$$\varphi(q(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{q(t)w}}{w}\varphi^*(w)\,dw$$

Отсюда

$$\varphi(t) \doteqdot \varphi^*(p)$$

что и требовалось проверить.

В частности, если положить $q(t)=t$, то мы получим изображение функции $\varphi(t)\,u(t)$ по формуле

$$f^*(p)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\varphi^*(w)}{w}\psi(w,p)\,dw$$

где

$$\psi(w,p)\doteqdot e^{q(t)\,w}u(t)=e^{tw}u(t)$$

Так как

$$u^*p=p\int\limits_0^\infty e^{-pt}u(t)\,dt$$

то подставив сюда вместо p величину $p-w$, найдем

$$u^*(p-w)=(p-w)\int\limits_0^\infty e^{-(p-w)\,t}u(t)\,dt$$

или

$$p\frac{u^*(p-w)}{p-w}=p\int\limits_0^\infty e^{-pt}e^{wt}u(t)\,dt$$

или

$$p\frac{u^*(p-w)}{p-w}\doteqdot e^{wt}u(t)$$

значит, в данном случае

$$\psi(w,p)=p\frac{u^*(p-w)}{p-w}$$

Поэтому изображение $f^*(p)$ произведения двух функций $\varphi(t)$ и $u(t)$ определяется через изображения $\varphi^*(p)$ и $u^*(p)$ функций $\varphi(t)$ и $u(t)$ по формуле

$$f^*(p)=\frac{p}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\varphi^*(w)\,u^*(p-w)}{w\,(p-w)}\,dw$$

Это есть формула, данная Г. А. Гринбергом [1].

Поступила в редакцию
14 V 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Гринберг Г. А. Связь между операционными выражениями двух произвольных функций и операционным представлением их произведения. ДАН СССР. 1943. Т. XI, № 4.