Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ В КВАДРАТУРАХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ С УЧЕТОМ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА

Г. С. Шапиро

(Москва)

В работе показывается, что уравнения плоской одномерной задачи теории пластичности с учетом упрочнения материала как в случае плоского напряженного состояния, так и в случае плоской деформации могут быть проинтегрированы в квадратурах, если принять материал несжимаемым. В первом случае результат получается с помощью приближенных выражений для интенсивности напряжений и деформаций, данных А. А. Ильюшиным в работе[1] «К теории малых угруго пластических деформаций». Небольшое исправление к этой работе, указанно А. А. Ильюшиным, приводится здесь в конце в виде примечания,

1. Плоское напряженное состояние. Уравнения равновесия и неразрывности имеют вид:

$$\sigma_r' = \sigma_\theta' - \sigma_r, \quad \varepsilon_\theta = \varepsilon_r - \varepsilon_\theta \tag{1.1}$$

Штрих означает дифференцирование по $\rho = \ln r$.

Условие совпадения направляющих тензоров напряжений и деформаций приводит к уравнениям[2]

$$\sigma_r - \sigma = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_r, \qquad \sigma_\theta - \sigma = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\varepsilon_\theta \qquad \left(\sigma = \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2}\right) \tag{1.2}$$

где σ_i — интенсивность напряжений, ε_i — интенсивность деформаций.

Из уравнений (1.2) для напряжения σ_r находим

$$\sigma_r = \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(\varepsilon_r + \frac{\varepsilon_\theta}{2}\right) \tag{1.3}$$

Для интенсивности напряжений σ_i и деформации ε_i примем приближенные выражения, данные А. А. Ильюшиным [1].

При этом следует рассмотреть отдельно два случая.

Случай (а):

$$\sigma_i = \alpha(\sigma_\theta - \sigma_r), \quad \alpha = \frac{2+\sqrt{3}}{4}; \qquad \varepsilon_i = \beta(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r), \quad \beta = \frac{2+\sqrt{3}}{6} \tag{1.4}$$

Примем здесь, как и в дальнейшем, что материал имеет линейное упрочнение

$$\sigma_i = E\varepsilon_s + E^*(\varepsilon_i - \varepsilon_s) \tag{1.5}$$

или в безразмерных величинах

$$\bar{\sigma}_i = \lambda\varepsilon_i + (1-\lambda)\varepsilon_s \qquad \left(\lambda = \frac{E^*}{E}\right) \tag{1.6}$$

В дальнейшем значок — опускаем.

Исключая из первых уравнений в (1.1) и (1.4) разность $\sigma_\theta - \sigma_r$, а из вторых уравнений в (1.1) и (1.4) разность $\varepsilon_\theta - \varepsilon_r$, находим

$$\sigma_i = \alpha\sigma_r', \qquad \varepsilon_i = -\beta\varepsilon_\theta' \tag{1.7}$$

Подставляя выражения (1.7) в зависимость (1.6) и производя интегрирование, получаем

$$\varepsilon_\theta = \frac{3}{2\lambda}(-\sigma_r + a\rho + C_1) \qquad \left(a = \frac{1-\lambda}{\alpha}\varepsilon_s\right) \tag{1.8}$$

Исключая из выражения (1.3) с помощью формул (1.4), (1.6) и (1.8) величины ε_r, ε_θ, ε_i, и σ_i, получаем дифференциальное уравнение, содержащее одну неизвестную функцию σ_r:

$$\sigma_r = \rho\varphi(p) + \psi(p) \tag{1.9}$$

где

$$p = \sigma_r', \qquad \varphi(p) = \frac{3ap}{4p-a}, \qquad \psi(p) = \frac{3C_1 + 2a - 2p}{4p-a}\,p$$

Мы пришли к уравнению Лагранжа, которое, как известно, сводится к линейному уравнению. Дифференцируя (1.9) и рассматривая затем ρ как искомую функцию, а p как независимое переменное, приходим к уравнению, интегрируемому в квадратурах:

$$\frac{d\rho}{dp} + \frac{3a^2}{4p(4p^2 - 5ap + a^2)}\,\rho = \frac{-4p(2p-a) + a(3c+2a)}{4p(4p^2 - 5ap + a^2)} \tag{1.10}$$

Решение его будет

$$\rho = C_2\,\omega(p) + \chi(p)$$

Причем, например,

$$\omega(p) = \left(\frac{4p^2 - 5ap + a^2}{p^2}\right)^{\frac{3}{8}} \left|\frac{p-a}{p-a/4}\right|^{\frac{5}{8}}$$

Таким образом, величины σ_r и ρ по (1.9) и (1.10) выражены в функции параметра p.

Заметим, что в рассматриваемом случае ход выкладок не изменяется, если учесть действие стационарной температуры (при этом температура есть логарифмическая функция от радиуса r или линейная функция от ρ).

Случай (b):

$$\sigma_i = \gamma\sigma_\theta, \quad \gamma = \frac{2+\sqrt{3}}{4}, \qquad \varepsilon_i = \delta\left(\varepsilon_\theta + \frac{1}{2}\varepsilon_r\right), \qquad \delta = \frac{2+\sqrt{3}}{3} \tag{1.11}$$

Разделив правую и левую части первого уравнения (1.1) на соответствующие части второго и имея в виду условия (1.2), находим

$$d\sigma_r = -\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\,d\varepsilon_\theta \tag{1.12}$$

Для деформации ε_θ из (1.3) и (1.11) имеем

$$\varepsilon_\theta = \frac{4}{3\delta}\varepsilon_i - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_r$$

Дифференцируя это равенство и учитывая (1.6), получаем

$$d\varepsilon_\theta = \left[\frac{4}{3\delta} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\frac{d\sigma_r}{d\varepsilon_i} - \frac{b\sigma_r}{2\sigma_i^2}\right]d\varepsilon_i \tag{1.13}$$

где обозначено

$$b = (1-\lambda)\,\varepsilon_s$$

Исключая отсюда с помощью (1.12) деформацию ε_θ, приходим к линейному уравнению

$$\frac{d\sigma_r}{d\varepsilon_i} = \frac{b}{(\lambda\varepsilon_i + b)\varepsilon_i}\sigma_r - \frac{8}{3\delta}\left(\lambda + \frac{b}{\varepsilon_i}\right) \tag{1.14}$$

Решение уравнения (1.14) будет

$$\sigma_r = C_1 \varphi(\varepsilon_i) + \psi(\varepsilon_i) \tag{1.15}$$

где

$$\varphi(\varepsilon_i) = \lambda + \frac{b}{\varepsilon_i}$$

$$\psi(\varepsilon_i) = \frac{8\,\varepsilon_i}{3\delta}\left(\lambda + \frac{b}{\varepsilon_i}\right)$$

Исключая из уравнений (1.1), (1.6) и (1.15) величины σ_θ, σ_r и σ_i и производя интегрирование, находим

$$\rho = \int \frac{C_1\varphi'(\varepsilon_i) + \psi'(\varepsilon_i)}{\gamma^{-1}(\lambda\varepsilon_i + b) - C_1\varphi(\varepsilon_i) - \psi(\varepsilon_i)}\,d\varepsilon_i + C_2$$

2. Плоское деформированное состояние. Решение в квадратурах легко получается при любой зависимости $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ и произвольном распределении температуры.

Из условия несжимаемости имеем

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 3\alpha t \tag{2.1}$$

Так как деформации

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z = \text{const}$$

то уравнение (2.1) дает

$$u = \frac{1}{r}\int 3\,\alpha t\, r\, dr + \frac{C_1}{r} - \frac{1}{2}\varepsilon_z r \tag{2.2}$$

Таким образом, нам известна интенсивность деформаций как функция радиуса Из уравнений (1.2) имеем

$$\sigma_\theta - \sigma_r = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = \varphi(r, \varepsilon_z, C_1) \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в уравнение равновесия, окончательно находим

$$\sigma_r = \int \frac{1}{r}\varphi(r, \varepsilon_z, C_1)\,dr + C_2$$

Примечание. А. А. Ильюшин показал [1], что в тех случаях, когда главные оси напряжений или деформаций известны, величины ρ_i и ε_i могут быть (с точностью до 7%) выражены линейно, соответственно через напряжения и деформации, в виде

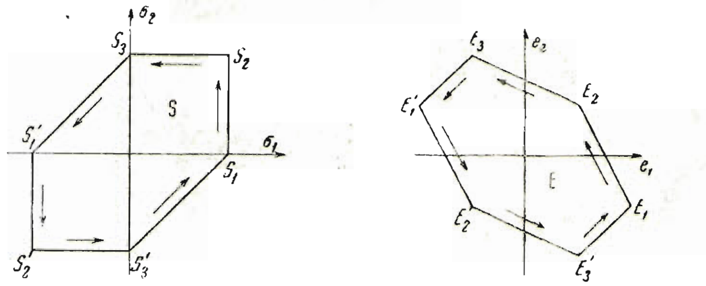
$$\sigma_i = \frac{2+\sqrt{3}}{2}\tau_{\max}, \qquad \varepsilon_i = \frac{2+\sqrt{3}}{6}\gamma_{\max}$$

где $\tau_{\max}$ — максимальное касательное напряжение и $\gamma_{\max}$ — максимальный сдвиг. В плоскостях $\sigma_1\sigma_2$ и $\varepsilon_1\,\varepsilon_2$ шестиугольники напряжений и деформаций имеют вид, показанный на фиг. 1, где буквами S и E с одинаковыми индексами изображены соответствующие друг другу напряженные состояния.

Соответствие устанавливается зависимостью

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_2 - \sigma_1}$$

вытекающей из равенств (1.2). Движению по шестиугольнику S против часовой стрелки соответствует такое же движение против часовой стрелки по шестиугольнику E. Как указал А. А. Ильюшин, соответствующие направления обходов



Фиг. 1

в работе[1] ошибочно указаны не совпадающими. Таблица соответствий значений τ_{max} и γ_{max} имеет следующий вид

S	S_1S_2	S_2S_3	S_3S_1	$S_1'S_2'$	$S_2'S_3'$	$S_3'S_1'$
τ_{max}	$\frac{1}{2}\sigma_1$	$\frac{1}{2}\sigma_2$	$+\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)$	$-\frac{1}{2}\sigma_1$	$-\frac{1}{2}\sigma_2$	$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$
γ_{max}	$2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$	$2\varepsilon_2 + \varepsilon_1$	$\varepsilon_2 - \varepsilon_1$	$-(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	$-(2\varepsilon_2 + \varepsilon_1)$	$\varepsilon_1 - \varepsilon_2$
E	E_1E_2	E_2E_3'	E_3E_1	$E_1'E_2'$	$E_2'E_3'$	$E_3'E_1'$

Поступила в редакцию
5 X 1949

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А. А. К теории малых упруго-пластических деформаций. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 3.
2. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат. М.—Л. 1948.