Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ СО СТЕПЕННЫМ УПРОЧНЕНИЕМ МАТЕРИАЛА

В. В. Соколовский

(Москва)

В этой статье приведены две задачи теории пластичности, которые при наличии степенного закона упрочнения материала решаются в замкнутом виде.

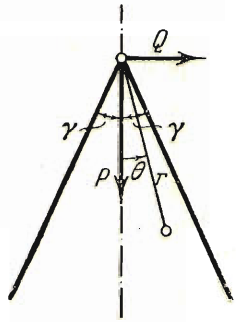
§ 1. Изгиб плоского клина силой, приложенной к его вершине. Рассмотрим изгиб плоского клина с центральным углом 2γ под действием силы, приложенной к его вершине; компоненты этой силы P и Q заданы (фиг. 1).

Примем цилиндрическую систему координат $r\theta z$, начало которой совпадает с вершиной.

Компоненты напряжения σ_r, σ_θ, σ_z, $\tau_{r\theta}$ и компоненты деформации ε_r, ε_θ, ε_z, $\gamma_{r\theta}$, которыми определяется напряженное состояние клина, суть функции от r и θ.

Основные зависимости между компонентами напряжения и деформации принимаются в обычной форме [1]

$$\varepsilon_r = \frac{E}{2S}(\sigma_r - \sigma), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{E}{2S}(\sigma_\theta - \sigma)$$
$$\varepsilon_z = \frac{E}{2S}(\sigma_z - \sigma), \qquad \gamma_{r\theta} = \frac{E}{S}\tau_{r\theta} \tag{1.1}$$



Фиг. 1

где

$$3\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z$$

написанной в предположении о несжимаемости пластического материала

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \tag{1.2}$$

В зависимостях (1.1) через S обозначена интенсивность напряжения сдвига

$$S = \frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 6\tau_{r\theta}^2}$$

а через E — интенсивность деформации сдвига

$$E = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta)^2 + \frac{3}{2}\gamma_{r\theta}^2}$$

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде степенной зависимости между S и E

$$S = KE^\mu \tag{1.3}$$

где K, μ — физические константы.

Будем искать точное решение поставленной задачи, предполагая, что компоненты напряжения σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ имеют следующий вид

$$\sigma_r = \sigma_r(r, \theta), \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$$

Компоненты деформации ε_r, ε_θ и $\gamma_{r\theta}$, соответствующие этим напряжениям, выражаются через компоненты смещения u_r и u_θ так

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right), \qquad \varepsilon = 0$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0 \tag{1.4}$$

Отсюда следует уравнение совместной деформации

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + r\frac{\partial}{\partial r}(\varepsilon_\theta - \varepsilon_r) = 0 \tag{1.5}$$

Интенсивности напряжения и деформации принимают вид

$$S = \frac{1}{2}|\sigma_r|, \qquad E = 2|\varepsilon_r|$$

Дифференциальные уравнения равновесия дают одно уравнение

$$r\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \sigma_r = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r\sigma_r) = 0 \tag{1.6}$$

Отсюда ясно, что $r\sigma_r$ есть функция только от одной независимой переменной θ. Компонента напряжения, следовательно, может быть представлена так:

$$\sigma_r = \varkappa\, 2K\frac{t(\theta)}{\rho}, \qquad \varkappa = \operatorname{sign}\sigma_r \tag{1.7}$$

где $\rho = r/l$, а l — какая-нибудь длина.

Интенсивность касательного напряжения и интенсивность деформации сдвига будут

$$S = K\frac{t(\theta)}{\rho}, \qquad E = \frac{g(\theta)}{\rho^{1/\mu}}, \qquad t = g^\mu \tag{1.8}$$

Компоненты деформации принимают вид

$$\varepsilon_r = -\varepsilon_\theta = \varkappa\frac{g(\theta)}{2\rho^{1/\mu}} \tag{1.9}$$

Уравнение совместности деформации (1.7) после подстановки ε_r и ε_θ имеет вид

$$\frac{d^2 g}{d\theta^2} + \frac{2\mu - 1}{\mu^2}g = 0$$

Решение этого уравнения в зависимости от величины μ будет трех видов:

$$\begin{aligned} g &= C\cos(p\theta + \delta) && (\mu > 1/2) \\ g &= C(1 + \delta\theta) && (\mu = 1/2) \\ g &= C\operatorname{ch}(q\theta + \delta) && (\mu < 1/2) \end{aligned} \tag{1.10}$$

Здесь C и δ — произвольные постоянные, а p и q определены так:

$$p^2 = \frac{2\mu - 1}{\mu^2}, \qquad q^2 = \frac{1 - 2\mu}{\mu^2}$$

На боковых гранях клина при $\theta = \pm\gamma$ напряжения должны отсутствовать, т. е. $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$; эти условия выполняются, так как везде $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$.

Компоненты P и Q силы, приложенной в вершине клина, будут

$$P = -\int_{-\gamma}^{+\gamma} \sigma_r \cos\theta\, r\, d\theta, \qquad Q = -\int_{-\gamma}^{+\gamma} \sigma_r \sin\theta\, r\, d\theta$$

Внося сюда σ_r, определенное формулами (1.7), (1.8) и (1.10), получим равенства, дающие связь между произвольными постоянными C, δ и компонентами P, Q; при $Q=0$ постоянная $\delta = 0$.

Отметим, что рассмотренная задача родственна задаче об упруго-пластическом равновесии полуплоскости под действием силы, решенной К. Н. Шевченко [2].

§ 2. Кручение круглого конического стержня. Рассмотрим кручение круглого конического стержня с углом конусности 2γ, закрепленного одним концом под действием пары сил, приложенной на другом конце.

Примем сферическую систему координат $r\theta\varphi$, центр которой перемещен в вершине конуса.

Компоненты напряжения $\tau_{r\varphi}$, $\tau_{\theta\varphi}$ и компоненты деформации $\gamma_{r\varphi}$, $\gamma_{\theta\varphi}$, которыми описывается напряженное состояние конуса, суть функции только от r и θ.

Основные зависимости между компонентами напряжения и деформации принимаем в обычной форме [1]

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{E}{S}\tau_{r\varphi}, \qquad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{E}{S}\tau_{\theta\varphi} \tag{2.1}$$

Через S и E обозначены интенсивности напряжения и деформации сдвига

$$S = \sqrt{\tau_{r\varphi}^2 + \tau_{\theta\varphi}^2}, \qquad E = \sqrt{\gamma_{r\varphi}^2 + \gamma_{\theta\varphi}^2} \tag{2.2}$$

Условие пластичности с упрочнением материала принимается в виде степенной зависимости между S и E

$$S = KE^{\mu} \tag{2.3}$$

где K и μ — физические константы.

Будем искать точное решение, принимая компоненты напряжения $\tau_{r\varphi}$ и $\tau_{\theta\varphi}$ в следующем виде:

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{r\varphi}(r, \theta), \qquad \tau_{\theta\varphi} = 0$$

Компоненты деформации $\gamma_{r\varphi}$ и $\gamma_{\theta\varphi}$, соответствующие этим напряжениям, выражаются через компоненту смещения u_φ так

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}, \qquad \gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial\theta} - u_\varphi \operatorname{ctg}\theta\right) = 0 \tag{2.4}$$

Отсюда следует уравнение совместных деформаций

$$\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial\theta} = \gamma_{r\varphi}\operatorname{ctg}\theta \tag{2.5}$$

Интенсивности напряжения и деформации принимают вид

$$S = |\tau_{r\varphi}|, \qquad E = |\gamma_{r\varphi}|$$

Дифференциальные уравнения равновесия дают одно уравнение

$$r\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 3\tau_{r\varphi} = 0 \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\varphi}) = 0 \tag{2.6}$$

Следовательно, $r^3\tau_{r\varphi}$ есть функция только одной независимой переменной θ.

Компонента напряжения $\tau_{r\varphi}$, таким образом, может быть представлена в виде

$$\tau_{r\varphi} = \varkappa K \frac{t(\theta)}{\rho^3}, \qquad \varkappa = \operatorname{sign} \tau_{r\varphi} \tag{2.7}$$

где $\rho = r / l$, а l — какая-нибудь длина.

Интенсивность напряжения S и интенсивность деформации E будут

$$S = K \frac{t(\theta)}{\rho^3}, \qquad E = \frac{g(\theta)}{\rho^{3/\mu}}, \qquad t = g^\mu \tag{2.8}$$

Компонента деформации $\gamma_{r\varphi}$ принимает вид

$$\gamma_{r\varphi} = \varkappa \frac{g(\theta)}{\rho^{3/\mu}} \tag{2.9}$$

Уравнение совместности деформаций (2.5) после внесения $\gamma_{r\varphi}$ и интегрирования дает

$$g = C \sin\theta, \quad (C > 0)$$

где C — произвольная постоянная.

Следовательно, t будет

$$t = C^\mu \sin^\mu\theta \tag{2.10}$$

На боковой поверхности конуса при $\theta = \gamma$ напряжения должны отсутствовать, т. е. $\tau_{\theta\varphi} = 0$; это условие выполнено, так как везде $\tau_{\theta\varphi} = 0$.

Момент пары M, закручивающей стержень, дается равенством

$$M = 2\pi \int_0^\gamma \tau_{r\varphi} \sin^2\theta \, r^3 \, d\theta$$

Вносся сюда $\tau_{r\varphi}$, данное формулами (2.7) и (2.10), получим равенство, выражающее произвольную постоянную C через крутящий момент M.

Поступила в редакцию
20 X 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколовский В. В. Теория пластичности. Изд. АН СССР. 1946.
2. Шевченко К. Н. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 4.