Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ

Л. А. Галин

(Москва)

Упруго-пластические задачи, в частности упруго-пластическое кручение призматических стержней, принадлежат к новым задачам математической физики. В них необходимо найти неизвестную границу между упругой и пластической областями на основании двух условий, данных на этой границе, которые касаются гармонической функции, определяемой в области, заключенной внутри этой границы. Для упруго-пластического кручения существует аналогия, предложенная А. Надаи[1]. Она заключается в следующем: строится поверхность, соответствующая функции напряжений в пластической области, которая может быть найдена на основании условий, заданных на контуре. К этой поверхности прижимается мембрана, находящаяся под действием внутреннего давления. Функция, которая соответствует форме, принимаемой мембраной, удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция напряжений в упругой области. Участки поверхности, к которым будет прижиматься мембрана, будут соответствовать пластическим областям. На границе этих участков будут равны первые производные от функций напряжений в обеих областях, что является следствием непрерывности компонент напряжений.

Таким образом, существование решения упруго-пластической задачи кручения призматического стержня становится физически очевидным. Однако физическая убедительность не может служить строгим доказательством существования решения данной задачи.

Автором в статье[2] предложена аналогия для решения плоской упруго-пластической задачи. При этом упругая пластинка прижимается к двум симметричным поверхностям, которые строятся на основании функции напряжений в пластических областях. Эта аналогия также делает физически убедительным существование решения плоской упруго-пластической задачи, во всяком случае тогда, когда поверхность, соответствующая функции напряжений, будет всюду выпуклой.

В настоящей работе устанавливается ряд признаков, необходимых для существования решения задачи об упруго-пластическом кручении призматических стержней. Заметим еще раз, что указанная задача принадлежит к числу задач, которым иногда дается название обратных задач Дирихле или Неймана, и существование ее решения не является очевидным. Можно указать ряд случадв, когда подобные задачи заведомо не будут иметь решения.

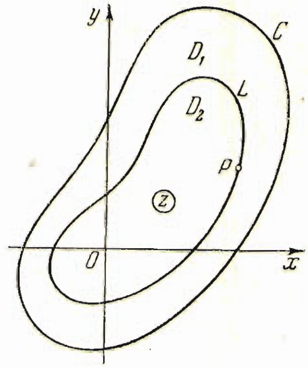
В дальнейшем будут рассматриваться такие случаи упруго-пластического кручения, когда пластическая область всюду граничит с внешним контуром сечения стержня.

В пластической области функция напряжений $\varphi_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2=k^2 \tag{1}$$

и граничному условию $\varphi_1=0$ на контуре C (фиг. 1). При этом внутри контура функция $\varphi_1<0$.

Будем полагать, что контур C является достаточно гладким, так что функция $\varphi_1(x, y)$ в рассматриваемой нами области будет непрерывна вместе со своими первыми производными по координатам x и y.



Фиг. 1

В упругой области функция напряжений φ_2 удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2} = -2G\vartheta \tag{2}$$

гдд ϑ — угол закручивания, а G — модуль сдвига.

При этом будем иметь

$$\varphi_2 = \psi - \frac{G\vartheta}{2}(x^2 + y^2) \tag{3}$$

Здесь ψ — функция гармоническая.

На контуре L, разделяющем упругую и пластическую области, должно иметь место

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x}, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial y} \tag{4}$$

Это условие является следствием непрерывности компонент тангенциального напряжения τ_{xz} и τ_{yz}.

Следствием (4) будут являться следующие условия на контуре L:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} \tag{5}$$

Здесь производная берется на нормали к контуру L.

Образуем функцию

$$F(x, y) = \varphi_1(x, y) + \frac{G\vartheta}{2}(x^2 + y^2) \tag{6}$$

Тогда из (3) и (5) следует, что функция $F(x, y)$ на контуре L будет совпадать со значениями гармонической функции ψ, регулярной внутри области D_2, которая ограничена контуром L. Производная от функции $F(x, y)$ по нормали к контуру L также будет совпадать с $\partial\psi / \partial n$.

Итак, контур L необходимо найти на основании двух условий, касающихся функции, гармонической и регулярной внутри данного контура.

1. Допустим, что такой контур существует. Докажем, что подобное утверждение не является противоречивым.

В точке P контура L даны значения гармонической функции $\psi = F = g_0$ и ее производных по нормали к контуру $\partial\psi / \partial n = \partial F / \partial n = f_0$. Пусть существует некоторая функция $z = \omega(\zeta)$, отображающая область, ограниченную контуром L, на единичный круг.

В точке P_1, расположенной на контуре единичного круга, которая соответствует точке P, будет иметь место

$$\psi = g_0(\theta), \qquad |\zeta| < 1, \qquad \zeta = re^{i\theta}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial n}\left|\frac{dz}{d\zeta}\right| = f_0(\theta)\,|\omega'(\zeta)|, \qquad |\zeta| < 1 \tag{7}$$

Первое из условий позволяет, применяя интеграл Пуассона, определить функцию ψ. Она будет равна:

$$\psi(r, \theta) = \int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1 - r^2)\,d\alpha}{1 - 2r\cos(\alpha - \theta) + r^2} \tag{8}$$

На основании второго из условий (7) получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right] = f_0(\theta)\mid\omega'(\zeta)\mid_{\zeta=e^{i\theta}}$$

Или отсюда

$$\mid\omega'(\zeta)\mid_{\zeta=e^{i\theta}} = \frac{1}{f_0(\theta)}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right] \tag{9}$$

На основании этого получаем

$$\lg\mid\omega'(\zeta)\mid_{\zeta=e^{i\theta}} = \lg\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right]\right\} - \lg f_0(\theta)$$

Замечая, что

$$[\lg\mid\omega'(\zeta)\mid]_{\zeta=e^{i\theta}} = \operatorname{Re}[\lg\omega'(\zeta)]_{\zeta=e^{i\theta}}$$

находим действительную часть функции $\lg\omega'(\zeta)$, заданную на контуре единичного круга:

$$\operatorname{Re}[\lg\omega'(\zeta)]_{\zeta=e^{i\theta}} = \lg\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right]\right\} - \lg f_0(\theta) \tag{10}$$

Применяя формулу Шварца, определим функцию $\lg\omega'(\zeta)$:

$$\lg\omega'(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\lg\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right]\right\} - \lg f_0(\theta)\right\}\frac{e^{i\omega}+\zeta}{e^{i\omega}-\zeta}\,d\omega \tag{11}$$

Отсюда находим

$$\omega'(\zeta) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\lg\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right]\right\} - \lg f_0(\theta)\right\}\frac{e^{i\omega}+\zeta}{e^{i\omega}-\zeta}\,d\omega\right\} \tag{12}$$

Функция, находящаяся в правой части равенства (11), ограничена во всяком случае при любом ζ, находящемся внутри единичного круга. Поэтому на основании (12) $\omega'(\zeta)$ отлична от нуля внутри единичного круга.

Следовательно, функция $\omega(\zeta)$ отображает некоторую однолистную область на единичный круг. На основании (12) эта функция будет такой:

$$\omega(\zeta) = \int \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\lg\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_0(\alpha)\frac{(1-r^2)\,d\alpha}{1-2r\cos(\alpha-\theta)+r^2}\right] - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \lg f_0(\theta)\right\}\frac{e^{i\omega}+\zeta}{e^{i\omega}-\zeta}\,d\omega\right\}d\zeta \tag{13}$$

Итак, может существовать контур L, ограничивающий некоторую однолистную область, на котором одновременно заданы значения некоторой гармонической функции и ее нормальной производной. Условием, необходимым для этого, является положительность выражения (9). Некоторые результаты, касающиеся вопросов существования и единственности решений задач, подобных рассматриваемой здесь, содержатся в книге Демченко [4].

2. При отыскании функции ψ приходится решать одновременно задачу Дирихле и задачу Неймана для некоторой области, ограниченной контуром, подлежащим определению.

Одно из условий для функции ψ таково· на контуре L должно быть $\partial\psi / \partial n = \partial F / \partial n = f_0$. Однако для того, чтобы эта задача имела решение, необходимо, чтобы имело место следующее равенство:

$$\int_L \frac{\partial F}{\partial n} ds = 0 \tag{14}$$

Установим, какой должна быть функция $F(x, y)$, чтобы условие (14) выполнялось, следовательно, поставленная задача об упруго-пластическом кручении призматического стержня имела решение. Нетрудно доказать следующее положение: если в некоторой области функция $F(x, y)$ непрерывна вместе со своей первой производной, то при непрерывном изменении контура Γ интеграл

$$J = \int_\Gamma \frac{\partial F}{\partial n} ds$$

меняется непрерывно.

Пусть координаты точки контура Γ в параметрической форме задаются следующим образом: $x = \alpha(\theta)$, $y = \beta(\theta)$. Координаты точки близкого контура Γ_1 будут такими: $x = \alpha(\theta) + \lambda\alpha_1(\theta)$, $y = \beta(\theta) + \lambda\beta_1(\theta)$. Здесь λ — некоторая величина, которая может быть сделана как угодно малой. Параметр θ, соответствующий единичному кругу, меняется в следующих пределах: $-\pi < \theta < +\pi$.

Обозначая единичный вектор нормали к кривой Γ через $\mathbf{n}$, будем иметь

$$\mathbf{n}\, ds = [-\beta'(\theta)\,\mathbf{i} + \alpha'(\theta)\,\mathbf{j}]\, d\theta$$

В таком случае

$$J = \int_\Gamma \frac{\partial F}{\partial n} ds = \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{grad} F(x, y)] \cdot [-\beta'(\theta)\,\mathbf{i} + \alpha'(\theta)\,\mathbf{j}]\, d\theta \tag{15}$$

Здесь $x = \alpha(\theta)$, $y = \beta(\theta)$. Для близкой кривой Γ_1 будем иметь

$$J_1 = \int_{\Gamma_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds = \int_{-\pi}^{\pi} [\operatorname{grad} F(x, y)] \cdot [(-\beta'(\theta) - \lambda\beta_1'(\theta))\,\mathbf{i} + (\alpha(\theta) + \lambda\alpha_1(\theta))\,\mathbf{j}]\, d\theta$$

Здесь (16)

$$x = \alpha(\theta) + \lambda\alpha_1(\theta), \qquad y = \beta(\theta) + \lambda\beta_1(\theta)$$

Нетрудно показать, что при выполнении условий, которыми обладает функция $F(x, y)$ (непрерывность вместе с первой производной), будет иметь место

$$J_1 - J \to 0 \qquad \text{при } \lambda \to 0 \tag{17}$$

Таким образом, при непрерывном изменении контура Γ интеграл J меняется непрерывно.

Для некоторого контура Γ будет выполняться условие

$$\int_\Gamma \frac{\partial F}{\partial n} ds = 0 \tag{18}$$

в случае, если функция $F(x, y)$ будет обладать указанными ниже свойствами

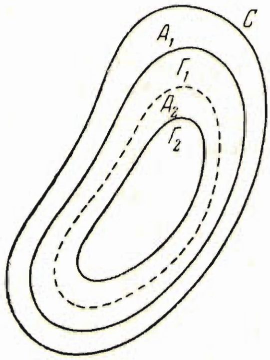
а) Пусть в полосе, примыкающей к контуру C (фиг. 2), поверхность, соответствующая функции $F(x, y)$, будет выпуклой.

б) Пусть внутри этой полосы может находиться кривая Γ_1, которой соответствует уравнение $F(x, y) = k_1$ (линия равных высот).

в) Кроме того, функция $F(x, y)$ должна быть такой, чтобы в некоторой подобласти, которая находится внутри области, ограниченной контуром C (ее граница показана на фиг. 2 пунктиром), поверхность, соответствующая функции $F(x, y)$, была вогнутой.

г) Пусть внутри этой подобласти также может находиться линия равных высот Γ_2, которой соответствует уравнение $F\ (x, y) = k_2$.

Функция $F(x, y)$ убывает по направлению внешней нормали к области, ограниченной контуром Γ_1. Поэтому в каждой точке линии Γ_1 производная $\partial F / \partial n$ будет отрицательна.



Фиг. 2

Следовательно,

$$J_1 = \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial F}{\partial n} ds < 0 \tag{19}$$

По направлению внешней нормали к области, ограниченной линией Γ_2, функция $F(x, y)$, наоборот, возрастает. Поэтому в каждой точке линии Γ_2 производная $\partial \varphi / \partial n$ будет положительна.

Отсюда следует, что

$$J_2 = \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial F}{\partial n} ds > 0 \tag{20}$$

Путем непрерывной деформации из контура Γ_1 может быть получен контур Γ_2, причем в процессе этой деформации может быть получен любой промежуточный контур. Величина

$$J = \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial F}{dn} ds$$

при непрерывном изменении контура от Γ_1 до Γ_2 будет, как это было доказано выше, меняться непрерывно от величины, меньшей нуля, до величины, большей нуля. Следовательно, неизбежно встретится такая форма контура, при которой это выражение будет равно нулю. Таким образом, будет выполнено условие, необходимое для существования решения задачи об упруго-пластическом кручении призматического стержня.

Итак, признаки а), б) в) и г) дают условия, необходимые для существования решения упруго-пластической задачи о кручении призматического стержня.

Заметим, что в статье автора [3] показано, что задача об упруго-пластическом кручении призматических стержней может быть приведена к нелинейному интегральному уравнению (29) для определения функции $\psi(\tau)$.

Вопрос о существовании и единственности решения упруго-пластической задачи может быть решен также посредством анализа приведенного в этой статье интегрального уравнения.

Поступила в редакцию
18 X 1949

Институт механики
АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Надаи А. Пластичность. ОНТИ. М. 1936.
2. Галин Л. А. Аналогия для плоской упруго-пластической задачи. ПММ. 1948. Т. XII. Вып. 6.
3. Галин Л. А. Упруго-пластическое кручение призматических стержней. ПММ. 1949. Т. XIII. Вып. 3.
4. Demtchenko B. Problèmes mixtes harmoniques en hydrodynamique des fluides parfaits. Paris. 1933.