Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ЗАМЕТКИ

К ОДНОЙ ФОРМУЛЕ КРИТИЧЕСКОГО НАПРЯЖЕНИЯ БЕЗМОМЕНТНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. А. Алумяэ

(Таллин)

Критическое напряжение начального безмоментного напряженного состояния: 1) замкнутой сферической оболочки, находящейся под действием равномерно распределенного по поверхности нормального давления, 2) центрально сжатой кругоцилиндрической трубы, 3) центрально сжатой конической оболочки вращения, выражается, как известно [1], формулой

$$\sigma_{kp} = \frac{Et}{\sqrt{3(1-\nu^2)}\,R} \tag{1}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, t — толщина оболочки, R — меньший радиус кривизны срединной поверхности в точке, где определяется σ_{kp}.

Ниже указывается вид начального напряженного состояния произвольной оболочки, при котором критическая нагрузка определяется формулой, аналогичной (1), и которая в трех упомянутых выше случаях дает формулу (1). При этом используется метод, изложенный В. З. Власовым в монографии [2].

Введем следующие обозначения для дифференциальных инвариантов:

$$a^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta \equiv \nabla^2, \qquad c^{\alpha\gamma}c^{\beta\rho}b_{\alpha\beta}\nabla_\gamma\nabla_\rho \equiv \nabla_k^{\ 2} \tag{2}$$

где a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} — компоненты первого и второго метрических и дискриминантного тензоров. Тогда уравнения для определения критического значения начального безмоментного напряженного состояния $T_{(c)}{}^{ij}$ принимают вид[3]

$$\begin{gathered} B'\nabla^2\nabla^2 F - \nabla_k^2 W = 0 \\ \nabla_k^2 F - T_{(c)}{}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta W + D\nabla^2\nabla^2 W = 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь предполагается, что состояние равновесия в послекритической стадии будет типа «местной потери устойчивости». В уравнениях (3) F и W — неизвестные скалярные функции, $B' = 1/Et$, $D = Et^3/12(1-\nu^2)$.

Следуя Галеркину, введем в рассмотрение новую функцию Φ:

$$W = \nabla^2\nabla^2\Phi, \quad B'F = \nabla_k^2\Phi \tag{4}$$

Тогда первое из уравнений (3) удовлетворяется тождественно (B' ведет себя по сравнению с Φ как константа), а второе получает вид:

$$\frac{1}{B'}\nabla_k^2\nabla_k^2\Phi - T_{(c)}{}^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\nabla^2\nabla^2\Phi + D\nabla^2\nabla^2\nabla^2\nabla^2\Phi = 0 \tag{5}$$

Пусть тензор тангенциальных сил начального напряженного состояния T^{ij} удовлетворяет условию

$$T^{ij} = T\sqrt{\frac{D}{B'}}\,c^{i\alpha}c^{j\beta}b_{\alpha\beta} \tag{6}$$

где T — постоянная величина.

Тогда критическое значение $T_{(c)}$, очевидно, определяется из уравнения

$$\nabla_k^2 \nabla_k^2 \Phi - T_{(c)} \lambda \nabla_k^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \lambda^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \qquad (\lambda^2 = B' D) \qquad (7)$$

Функция φ, удовлетворяющая уравнению

$$\lambda \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \chi \nabla_k^2 \varphi = 0 \qquad (\chi = \mathrm{const}) \qquad (8)$$

удовлетворяет также уравнению (7), если

$$1 - T_{(c)} \chi + \chi^2 = 0 \qquad (9)$$

Абсолютное значение $T_{(c)}$ будет наименьшим как при $\chi = 1$, так и при $\chi = -1$; в этих случаях соответственно будет

$$T_{(c)} = +2, \qquad T_{(c)} = -2$$

Таким образом, если начальное напряженное состояние T^{ij} удовлетворяет условию (6), то

$$\min \left| T^{ij}_{(c)} \right| = \frac{Et^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} c^{i\alpha} c^{i\beta} b_{\alpha\beta} \qquad (10)$$

При этом мы вправе пользоваться только решениями, которые действительно будут типа «местной потери устойчивости».

В уравнении (8) первый член, содержавший частные производные до четвертого порядка, имеет множитель малую величину λ, второй член, содержавший частные производные лишь до второго порядка, имеет множитель χ порядка единицы. Так как ни $\nabla^2 \nabla^2 \varphi$, ни $\nabla_k^2 \varphi$ не могут обращаться в нуль, то дифференцирование увеличивает порядок функции φ в $\lambda^{-0.5}$ раз. Это свойственно периодическим функциям. Таким образом, φ представляет собой волнистую поверхность, причем длина волны может быть сделана сколь угодно малой путем уменьшения λ; при этом размеры срединной поверхности оболочки не влияют существенным образом ни на длины волн, ни на критическую нагрузку, если только оболочка не очень пологая (т. е. наименьшее простирание срединной поверхности будет величиной порядка наименьшего радиуса кривизны поверхности).

На основании вышесказанного мы вправе провести анализ устойчивости равновесия в бесконечно малой области, где метрику срединной поверхности оболочки можно считать еще евклидовой. Тем самым мы установим асимптотические свойства тонкостенных оболочек при $\lambda \to 0$.

В окрестности некоторой точки, где примем $k_2 = 1$, $|k_1| < k_2$, уравнение (8) можно представить в виде (при $\chi = \pm 1$)

$$\lambda (\varphi,_{1111} + 2\varphi,_{1122} + \varphi,_{2222}) \pm (\varphi,_{11} + k_1 \varphi,_{22}) = 0 \qquad (11)$$

Это уравнение допускает периодическое решение

$$\varphi = A \cos m x^1 \cos n x^2 \qquad (12)$$

если

$$\lambda (m^2 + n^2)^2 \pm (m^2 + k_1 n^2) = 0 \qquad (13)$$

Отсюда следует, что оболочки с положительной и нулевой гауссовой кривизной допускают периодические решения лишь при значениях $-T_{(c)} \geqslant 2$, оболочки же с отрицательной гауссовой кривизной как при значениях $-T_{(c)} \geqslant 2$, так и при $T_{(c)} \geqslant 2$.

Интересно отметить, что в условии (13) одна из величин m, n остается произвольной. Поэтому мы можем представить решение φ в бесконечно малой области в виде

$$\varphi = \sum_i A_i \cos m_i x^1 \cos n_i x^2 \qquad (14)$$

где каждая пара m_i, n_i, удовлетворяет условию (13). Сами величины m_i будут определены лишь при анализе состояния равновесия в послекритической стадии.

Вместе с тем нетрудно выбрать такую совокупность m_i, при которой потенциальная энергия оболочки в начальной части послекритической стадии не будет отличаться от потенциальной энергии начального безмоментного состояния равновесия в докритической стадии[4]. А именно, в работе [4] показано, что для этого необходимо выполнение условия

$$\iint_G c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} W \nabla_\alpha \nabla_\beta W \nabla_\gamma \nabla_\rho F \sqrt{a}\, dx^1 dx^2 \neq 0 \tag{15}$$

где G — область интегрирования распространяется на всю срединную поверхность оболочки, a — дискриминант первой квадратичной формы.

Рассматривая в данном случае безмоментного начального напряженного состояния (6) в качестве области интегрирования G поверхность оболочки, соответствующую одной волне выпученной стенки

$$0 \leqslant x^1 \leqslant 2\pi / m_1, \qquad 0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi / n_1 \tag{16}$$

можно после элементарных выкладок установить, что условие (15) соблюдается на участке каждой волны, а следовательно, и по всей срединной поверхности, если

$$m_1 + m_2 = m_3, \qquad n_1 + n_2 = n_3 \tag{17}$$

При этом m_2 и m_3 должны быть кратными m_1 а n_2 и n_3 кратными n_1, иначе поле перемещений не будет периодическим относительно x^1, x^2 с периодом $2\pi / m_1$, $2\pi / n_1$. Эта задача разрешима и притом неоднозначно (это обстоятельство здесь нас не интересует), так как для определения шести неизвестных $m_1, \ldots, n_3$ имеем только пять уравнений — три уравнения (13) и два уравнения (17). Таким образом, оболочки с начальным состоянием (6) поведут себя в послекритической стадии, как, например, сжатая осевой силой кругоцилиндрическая труба[5].

Следует добавить, что приведенные выше выводы имеют качественный характер и не могут рассматриваться как точное решение. Так, если координатные линии будут линиями кривизны, то решение в бесконечно малой области вида (14) можно, очевидно, продолжать на конечную область, если контур срединной поверхности оболочки совпадает с линиями кривизны. Тем не менее, в послекритической стадии потенциальная энергия оболочки, сопровождающая деформации вида (14), (17), имеет наименьшее возможное значение, и поэтому истинная картина деформации, повидимому, будет отличаться незначительно от приведенной выше и при других видах контура срединной поверхности.

Наконец, заметим, что для создания начального напряженного состояния (6) требуется, кроме приложенных на контуре срединной поверхности усилий, еще нормальная поверхностная нагрузка

$$X = -T \sqrt{\frac{D}{B'}}\, c^{\alpha\gamma} c^{\beta\rho} b_{\alpha\beta} b_{\gamma\rho} = -2Tk \sqrt{\frac{D}{B'}} \tag{18}$$

где k — гауссова кривизна срединной поверхности оболочки.

Поступила в редакцию
13 X 1949

Институт механики АН СССР.
Институт строительства и архитектуры АН ЭССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Штаерман И. Я., Пиковский А. А. Основы теории устойчивости строительных конструкций. М.— Л. 1939.
2. Власов В. З. Общая теория оболочек. М.—Л. 1949.
3. Власов. В. З. Основные дифференциальные уравнения общей теории упругих оболочек. ПММ. 1944. т. VIII. Вып. 2.
4. Алумяэ Н. А. Исследование послекритической стадии тонкостенных упругих оболочек методом разложения по степеням малого параметра. Исследования и обзоры АН Эстонской ССР. 1949. Вып. 3.
5. Tsien H., Kármán Th. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. Journ. Aeronautical Sciences. 1941. Vol. 8. N 8.