Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 194 9

К ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПУАНКАРЕ

И. Г. Малкин

(Свердловск)

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n, \mu) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

где X_s — функции времени t, по отношению к которому они непрерывные и периодические с периодом 2π, и переменных $x_1, \ldots, x_n$ и параметра μ, по отношению к которым они допускают непрерывные частные производные первого порядка. При этом переменные $x_1, \ldots, x_n$ изменяются в некоторой области G, а величина μ численно достаточно мала.

Пусть

$$x_s^{(0)} = \varphi_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

—периодическое решение (периода 2π) „порождающей системы"

$$\frac{dx_s^{(0)}}{dt} = X_s^{(0)}(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) \equiv X_s(t, x^\circ_1, \ldots, x_n^\circ, 0) \qquad (s = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

Рассмотрим решение $x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)$ полной системы (1.1), определяемое начальными условиями

$$x_s(0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu) = \varphi_s(0) + \beta_s$$

и положим

$$\psi_s(\beta_1, \ldots, \beta_n, \mu) = [x_s(t, \beta_1, \ldots, \beta_n, \mu)] \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Здесь и в дальнейшем принято обозначение

$$[f(t)] = f(2\pi) - f(0)$$

Тогда, полагая, что функции X_s аналитичны относительно $x_1, \ldots, x_n$ и μ, Пуанкаре показал, что если функциональный определитель

$$D = \left\{ \frac{\partial(\psi_1, \ldots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \ldots, \beta_n)} \right\}_{\beta_1 = \ldots = \beta_n = \mu = 0} \tag{1.5}$$

не обращается в нуль, то существует одно и только одно периодическое решение полной системы (1.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$.

Таким образом, в рассматриваемом случае существует полное соответствие в поведении полной системы (1.1) и упрощенной системы (1.3).

Однако при приложении теории Пуанкаре к нелинейным колебаниям наибольший интерес представляют, как известно, именно те случаи, когда такого однозначного соответствия между упрощенной и полной системой не существует, что возможно только тогда, когда вышеуказанный определитель обращается в нуль. Один из таких случаев, оказавшийся особенно важным для теории нелинейных колебаний, рассмотрел Пуанкаре. А именно, Пуанкаре предположил, что уравнения (1.3) допускают семейство периодических решений, зависящих от некоторого произвольного параметра h, и что рассматриваемое периодическое решение (1.2) принадлежит к этому семейству и соответствует некоторому значению h^* параметра. В этом случае величина (1.5) необходимо обращается в нуль и, следовательно, вопрос о существовании периодического решения полной системы (1.1), обращающегося в порождающее при $\mu = 0$, требует дополнительного исследования. Пуанкаре показал, что, для того чтобы такое решение существовало, необходимо, чтобы h^* удовлетворяло некоторому уравнению вида

$$P(h^*) = 0 \tag{1.6}$$

и, следовательно, только конечному числу из бесчисленного множества порождающих периодических решений могут соответствовать периодические решения полной системы.

Условие (1.6), являясь необходимым для существования периодического решения полной системы, не является, однако, достаточным. Отысканием достаточного условия Пуанкаре не занимался. При практическом применении теории Пуанкаре к нелинейным колебаниям вопрос обычно исследовался в каждом частном случае самостоятельно. При этом приходилось преодолевать значительные вычислительные трудности, так как для этого приходилось вычислять члены второго порядка в разложениях функций ψ_s, в то время как для составления уравнения (1.6) достаточно знания членов первого порядка.

Однако, как удалось показать [1], эти вычисления являются излишними. Рассматривая задачу при более общих предположениях, а именно, полагая, что решение (1.2) принадлежит семейству, зависящему от k произвольных параметров $h_1, \ldots, h_k$, мы показали, что для того, чтобы этому решению соответствовало периодическое решение полной системы (1.1), необходимо, чтобы параметры h_j удовлетворяли k уравнениям

$$P_j(h_1, \ldots, h_k) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{1.7}$$

При этом каждому простому решению уравнений (1.7), т. е. такому решению, для которого определитель $\partial(P_1, \ldots, P_k)/\partial(h_1, \ldots, h_k)$ отличен от нуля, действительно отвечает одно и только одно периодическое решение полной системы (1.1), обращающееся в порождающее при $\mu = 0$. Таким образом, в каждом конкретном случае, после того как установлены необходимые условия существования периодического решения полной системы, для выяснения вопроса об их достаточности не требуется никаких дополнительных вычислений.

Все вышеуказанное установлено нами в предположении, что правые части уравнений (1.1) являются аналитическими функциями величин $x_1, \ldots, x_n$ и μ. В настоящей статье этот вопрос рассматривается при общих предположениях относительно уравнений (1.1), сделанных выше. Мы устанавливаем при этом развернутый вид уравнений (1.7) и затем, переходя к случаю, когда функции X_s являются аналитическими, дополняем результаты, полученные в работе [1], устанавливая общее правило, позволяющее в рассматриваемом случае значительно упростить вычисление периодических решений.

§ 2. Условия существования периодических решений. Допустим, что порождающая система (1.3) допускает семейство периодических решений

$$x_s^{(0)} = \varphi_s(t, h_1, \ldots, h_k) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

зависящих от k произвольных параметров h_j, и что рассматриваемое порождающее решение принадлежит этому семейству и соответствует значениям $h_j = h_j^*$ параметров. При этом будем предполагать, что порождающее решение лежит в области G. В соответствии с принятым ограничением, что правые части уравнений (1.1) обладают непрерывными производными по $x_1, \ldots, x_n$, будем предполагать, что в окрестности порождающего решения функции φ_s дифференцируемы по параметрам h_j Кроме того, будем предполагать, что независимость этих параметров обеспечена тем, что хотя бы один из определителей k-го порядка, заключающихся в матрице

$$\left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial h_1} \cdots \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial h_k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial h_1} \cdots \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial h_k} \end{matrix} \right\| \tag{2.2}$$

не обращается в нуль при $h_j = h_j^*$, $t = 0$ и, следовательно, эти параметры могут быть выражены через k начальных значений величин $x_s^{(0)}$.

Рассмотрим решение $x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)$ уравнений (1.1), определяемое начальными условиями

$$x_s(0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu) = \gamma_s \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

и постараемся величины γ_s подобрать таким образом, чтобы это решение было периодическим, обращающимся при $\mu = 0$ в порождающее.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы величины γ_s удовлетворяли уравнениям

$$\psi_s^*(\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu) \equiv [x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)] = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

и обращались при $\mu = 0$ в $\varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$.

Исследуем подробнее уравнения (2.4). В силу условий, наложенных на правые части уравнений (1.1), функции ψ_s^* допускают в окрестности точки $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$, $\mu = 0$ непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным $\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu$. Все эти функции обращаются тождественно в нуль при $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$, $\mu = 0$, так как порождающее решение является заведомо периодическим. Более того, так как все решения (2.1) системы (1.3) являются периодическими, то уравнения (2.4) допускают при $\mu = 0$ решение $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1, \ldots, h_k)$, зависящее от k произвольных параметров. Отсюда следует, что как определитель

$$\left\{\frac{\partial(\psi_1^*, \ldots, \psi_n^*)}{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}\right\}_{\gamma_s = \varphi_s(0,\, h_1^*, \ldots,\, h_k^*),\ \mu=0} \tag{2.5}$$

так и все его миноры до $n - k + 1$-го порядка включительно обращаются в нуль. Будем предполагать, что хотя бы один из миноров $n - k$-го порядка определителя (2.5) не обращается в нуль. Допустим для определенности, что

$$\left\{\frac{\partial(\psi_1^*, \ldots, \psi_{n-k}^*)}{\partial(\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-k})}\right\}_{\gamma_s = \varphi_s(0,\, h_1^*, \ldots,\, h_k^*),\ \mu=0} \neq 0 \tag{2.6}$$

При этом условии первые $n - k$ уравнений (2.4) имеют решение для $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-k}$, в котором эти величины являются функциями от $\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n, \mu$, обращающимися в

$$\varphi_1(0, h_1^*, \ldots, h_k^*), \ldots, \varphi_{n-k}(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$$

при

$$\mu = 0, \quad \gamma_j = \varphi_j(0, h_1^*, \ldots, h_k^*) \qquad (j = n - k + 1, \ldots, n)$$

и обладающими в окрестности этой точки непрерывными частными производными первого порядка. Подставляя эти величины в последние k уравнений (2.4), получим для определения $\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n$ систему k уравнений. При этом левые части полученных таким образом уравнений будут иметь в окрестности точки $\mu = 0$, $\gamma_j = \varphi_j(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$ $(j = n - k + 1, \ldots, n)$ непрерывные частные производные первого порядка.

Поэтому эти уравнения можно представить в виде

$$\Phi_j = F_j(\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n) + \mu\Psi_j(\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n, \mu) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{2.7}$$

где F_j и Ψ_j имеют вблизи значений $\mu = 0$, $\gamma_j = \varphi_j(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$ непрерывные частные производные первого порядка по переменным $\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n$.

Так как система (2.4) имеет при $\mu = 0$ решение $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1, \ldots, h_k)$ $(s = 1, \ldots n)$, зависящее от k произвольных параметров, то и система (2.7) должна при том же условии иметь решение для $\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n$, зависящее от k произвольных параметров, что возможно лишь только в том случае, когда функции F_j обращаются тождественно в нуль. Таким образом, уравнения (2.7) по сокращении на μ принимают вид

$$\Psi_j(\gamma_{n-k+1}, \ldots, \gamma_n, \mu) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{2.8}$$

Для существования искомого периодического решения необходимо и достаточно, чтобы система (2.8) допускала решения относительно

$\gamma_j\,(j=n-k+1,\ldots,n)$, в котором эти величины обращались бы в $\varphi_j(0,h_1^*,\ldots,h_k^*)$ при $\mu=0$. А для этого необходимо прежде всего, чтобы выполнялись соотношения

$$P_j=\Psi_j(\varphi_{n-k+1}(0,h_1^*,\ldots,h_k^*),\ldots,\varphi_n(0,h_1^*,\ldots,h_k^*),0)=0 \quad (j=1,\ldots,k) \tag{2.9}$$

Таким образом, получены необходимые условия, которым должны удовлетворять значения параметров $h_1^*,\ldots,h_k^*$ порождающего решения, чтобы ему соответствовало периодическое решение полной системы (1.1). Если при выполнении условий (2.9) будет также выполняться и условие

$$\Delta=\left\{\frac{\partial(\Psi_1,\ldots,\Psi_k)}{\partial(\gamma_{n-k+1},\ldots,\gamma_n)}\right\}_{\gamma_j=\varphi_j(0,h_1^*,\ldots,h_k^*),\,\mu=0}\neq 0 \tag{2.10}$$

то система (2.8) будет действительно допускать решение и притом единственное для $\gamma_{n-k+1},\ldots,\gamma_n$ нужного вида и тогда, как было указано выше, будет существовать и искомое периодическое решение.

Покажем, что условие (2.10) равносильно условию

$$\frac{\partial(P_1,\ldots,P_k)}{\partial(h_1^*,\ldots,h_k^*)}\neq 0 \tag{2.11}$$

Имеем прежде всего

$$\frac{\partial(P_1,\ldots,P_k)}{\partial(h_1^*,\ldots,h_k^*)}=\Delta\left\{\frac{\partial(\varphi_{n-k+1},\ldots,\varphi_n)}{\partial(h_1,\ldots,h_k)}\right\}_{t=0,\,h_j=h_j^*}$$

и, следовательно, нам достаточно показать, что функциональный определитель

$$D=\left\{\frac{\partial(\varphi_{n-k+1},\ldots,\varphi_n)}{\partial(h_1,\ldots,h_k)}\right\}_{t=0,\,h_j=h_j^*}$$

отличен от нуля. В справедливости последнего утверждения можно убедиться следующим образом.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\gamma_1}\right)A_1+\cdots+\left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\gamma_n}\right)A_n=0 \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{2.12}$$

где скобки обозначают, что производные вычисляются в точке $\mu=0$, $\gamma_s=\varphi_s(0,h_1^*,\ldots,h_k^*)$. Так как определитель (2.5) вместе со всеми его минорами до $n-k+1$-го порядка обращается в нуль, но по крайней мере один минор $n-k$-го порядка отличен от нуля, то система (2.12) допускает k независимых решений $A_{s1},\ldots,A_{sk}$. На основании (2.6) эту систему решений можно выбрать следующим образом. Полагаем

$$A_{n-k+i,\,j}=\begin{cases}1 & (\text{при } i=j)\\ 0 & (\text{при } i\neq j)\end{cases} \qquad (i,\ j=1,2,\ldots,k) \tag{2.13}$$

а величины $A_{1j},\ldots,A_{n-k,j}$ определяем из первых $n-k$ уравнений (2.12). Но можно, однако, указать и другую систему линейно независимых решений уравнений (2.12).

Для этого вспомним, что уравнения (2.4) тождественно удовлетворяются при $\mu = 0$, $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1, \ldots, h_k)$. Дифференцируя эти тождества по h_j и полагая затем $h_i = h_i^*$, имеем

$$\left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\gamma_1}\right)\frac{\partial\varphi_1(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} + \cdots + \left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\gamma_n}\right)\frac{\partial\varphi_n(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} \equiv 0$$

$$(s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$$

Следовательно, система (2.12) имеет решения

$$B_{sj} = \frac{\partial\varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k)$$

Но тогда должно быть

$$B_{sj} = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\alpha i} A_{s\alpha} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k) \qquad (2.14)$$

где $a_{\alpha j}$ — некоторые постоянные. Из этих соотношений вытекает, что всевозможные определители k-го порядка матрицы (2.2) равны при $t = 0$, $h_i = h_i^*$ произведению определителя $|a_{\alpha j}|$ на соответствующий определитель из величин $A_{s\alpha}$. Но так как по предположению хотя бы один определитель k-го порядка матрицы (2.2) при $t = 0$, $h_i = h_i^*$ отличен от нуля, то и определитель $|a_{\alpha j}|$ не равен нулю. Полагая теперь в (2.14) $s = n - k + 1, \ldots, n$ и принимая во внимание (2.13), имеем

$$a_{\alpha j} = \frac{\partial\varphi_{n-k+\alpha}(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} \qquad (\alpha, j = 1, \ldots, k)$$

и, следовательно, определитель D, как было указано, отличен от нуля.

Таким образом, приходим к следующему предложению.

Для того чтобы система уравнений (1.1) допускала периодическое решение, обращающееся при $\mu = 0$ в порождающее, принадлежащее семейству (2.1), необходимо, чтобы параметры этого порождающего решения удовлетворяли системе уравнений (2.9). Каждому простому решению этой системы уравнений, т. е. такому решению, для которого выполняется условие (2.11), действительно отвечает одно и только одно периодическое решение системы (1.1).

Из предыдущего анализа вытекает также, что в полученном таким образом периодическом решении системы (1.1) функции x_s будут обладать непрерывными производными по μ.

§ 3. Развернутый вид условий (2.9). Как уже указывалось, функции ψ_i^* допускают в окрестности точки $\gamma_s = \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$, $\mu = 0$ непрерывные частные производные первого порядка. Поэтому, полагая $\beta_s = \gamma_s - \varphi_s(0, h_1^*, \ldots, h_k^*)$, уравнения (2.4) можно представить в виде

$$\psi_s^* = (a_{s1} + \psi_{s1})\beta_1 + \cdots + (a_{sn} + \psi_{sn})\beta_n + (c_s + C_s)\mu = 0 \quad (s=1,\ldots,n) \quad (3.1)$$

где

$$a_{si} = \left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\gamma_i}\right), \qquad c_s = \left(\frac{\partial\psi_s^*}{\partial\mu}\right) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

а ψ_{si}, C_s — непрерывные функции $\beta_1, \ldots, \beta_n$, μ, обращающиеся в нуль при $\beta_1 = \cdots = \beta_n = \mu = 0$. Отсюда непосредственно вытекает, что уравнения (2.9) получаются в результате исключения величин $\beta_1, \ldots, \beta_n$ из линейных уравнений

$$a_{s1}\beta_1 + \cdots + a_{sn}\beta_n + c_s\mu = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.2}$$

На основании (2.4)

$$a_{si} = \left[\left(\frac{\partial x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)}{\partial \gamma_i}\right)\right], \qquad c_s = \left[\left(\frac{\partial x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)}{\partial \mu}\right)\right] \tag{3.3}$$

Далее, величины $\partial x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)/\partial\gamma_i$ удовлетворяют системе линейных уравнений с периодическими коэффициентами

$$\frac{dy_s}{dt} = p_{s1}y_1 + \cdots + p_{sn}y_n \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.4}$$

представляющих собой уравнения в вариациях системы (1.3) для порождающего решения. Здесь

$$p_{si} = \left(\frac{\partial X_s^{\,0}}{\partial x_i}\right)_{x_j = \varphi_j(t, h_1^*, \ldots, h_k^*)} \tag{3.5}$$

суть периодические функции времени.

В самом деле, подставляя функции $x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)$ в уравнения (1.1), которым они удовлетворяют, дифференцируя полученные тождества по γ_i и переходя к порождающему решению, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_s}{\partial \gamma_i}\right) = p_{s1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \gamma_i}\right) + \ldots + p_{sn}\left(\frac{\partial x_n}{\partial \gamma_i}\right) \qquad (s, i = 1, \ldots, n) \tag{3.6}$$

что и доказывает наше утверждение. Точно так же, продифференцировав указанные тождества по μ, найдем, что величины $(\partial x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)/\partial\mu)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_s}{\partial \mu}\right) = p_{s1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu}\right) + \ldots + p_{sn}\left(\frac{\partial x_n}{\partial \mu}\right) + f_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

где

$$f_s(t) = \left(\frac{\partial X_s}{\partial \mu}\right)_{x_i = \varphi_i(t, h_1^*, \ldots, h_k^*),\ \mu=0}$$

периодические функции времени. Кроме того, на основании (2.3), имеем

$$\begin{aligned} &\left\{\left(\frac{\partial x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)}{\partial \gamma_i}\right)\right\}_{t=0} = \begin{cases} 1 & \text{при } s = i \\ 0 & \text{при } s \neq i \end{cases} \\ &\left\{\left(\frac{\partial x_s(t, \gamma_1, \ldots, \gamma_n, \mu)}{\partial \mu}\right)\right\}_{t=0} = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Отсюда следует, что функции

$$u_s = \left(\frac{\partial x_s}{\partial \gamma_1}\right)\beta_1 + \ldots + \left(\frac{\partial x_s}{\partial \gamma_n}\right)\beta_n + \left(\frac{\partial x_s}{\partial \mu}\right) \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

представляют решение линейной системы

$$\frac{du_s}{dt} = p_{s1} u_1 + \ldots + p_{sn} u_n + f_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.8}$$

удовлетворяющее начальным условиям $u_s(0) = \beta_s$.

Но тогда на основании (3.3) уравнения (3.2) определяют те значения величин β_s, для которых это решение уравнений (3.8) является периодическим, а уравнения (2.9) выражают необходимые и достаточные условия существования этого решения.

Таким образом, задача сводится к установлению необходимых и достаточных условий существования периодического решения системы неоднородных линейных уравнений с периодическими коэффициентами (3.8). Последнюю задачу можно разрешить следующим образом.

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (3.4)

$$\begin{vmatrix} y_{11}(2\pi) - \rho & y_{21}(2\pi) & \ldots & y_{n1}(2\pi) \\ y_{12}(2\pi) & y_{22}(2\pi) - \rho & \ldots & y_{n2}(2\pi) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{1n}(2\pi) & y_{2n}(2\pi) & \ldots & y_{nn}(2\pi) - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{3.9}$$

где y_{sj} — фундаментальная система решений этих уравнений, для которой $y_{ss}(0) = 1$, $y_{sj}(0) = 0$ $(s \neq j)$. Если бы это уравнение не имело корней, равных единице, то, как известно из теории линейных уравнений с периодическими коэффициентами, система (3.4) не имела бы периодических решений, а система (3.8) допускала бы одно и только одно периодическое решение при любом выборе периодических функций $f_s(t)$. Но в нашем случае уравнение (3.9) имеет корни, равные единице, и вследствие этого, для того чтобы система (3.8) допускала периодическое решение, необходимо, чтобы функции f_s удовлетворяли некоторым условиям, которые нас и интересуют. В самом деле, на основании (3.6), (3.3) и (3.7) характеристическое уравнение (3.9) можно переписать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1^*}{\partial\gamma_1} + 1 - \rho & \dfrac{\partial\psi_2^*}{\partial\gamma_1} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n^*}{\partial\gamma_1} \\ \dfrac{\partial\psi_1^*}{\partial\gamma_2} & \dfrac{\partial\psi_2^*}{\partial\gamma_2} + 1 - \rho & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n^*}{\partial\gamma_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial\psi_1^*}{\partial\gamma_n} & \dfrac{\partial\psi_2^*}{\partial\gamma_n} & \ldots & \dfrac{\partial\psi_n^*}{\partial\gamma_n} + 1 - \rho \end{vmatrix}_{\gamma_i = \varphi_i(0, h_1^*, \ldots h_k^*),\, \mu = 0} = 0$$

Но, как было показано в предыдущем параграфе, функциональный определитель (2.5) обращается в нуль вместе со своими минорами до $n - k + 1$-го порядка включительно. Следовательно, уравнение (3.9) имеет корень, равный **единице**, k-й кратности, который обращает в нуль все миноры определителя (3.9) до $n-k+1$-го порядка включительно, не обращая в нуль (по предположению (2.6)) хотя бы один минор $n-k$-го порядка. На основании хорошо известных свойств линейных уравнений с периодическими коэффициентами отсюда вытекает, что система (3.4) имеет k и только k линейно независимых периодических решений. На основании известной теоремы Ляпунова о корнях характеристических уравнений сопряженных систем такими же свойствами обладает и линейная система с периодическими коэффициентами

$$\frac{dz_s}{dt} + p_{1s} z_1 + \ldots + p_{ns} z_n = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{3.10}$$

сопряженная с (3.4).

Пусть $\varphi_{s1}(t), \ldots, \varphi_{sk}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ k независимых периодических решений системы (3.10). Заменим в уравнениях (3.8) переменные u_s переменными v_s при помощи подстановки

$$v_i = \varphi_{1i} u_1 + \varphi_{2i} u_2 + \ldots + \varphi_{ni} u_n \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.11}$$

где $\varphi_{s,k+1}, \ldots, \varphi_{sn}$ — непрерывные периодические функции времени, выбранные таким образом, чтобы подстановка (3.11) не была особенной ни при каких значениях t в интервале $(0, 2\pi)$. Тогда, принимая во внимание, что выражения $v_1, \ldots, v_k$ являются первыми интегралами однородной части системы (3.8), легко найдем, что после указанной замены уравнения (3.8) примут вид

$$\begin{aligned} &\frac{dv_j}{dt} = \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha \varphi_{\alpha j} && (j = 1, \ldots, k) \\ &\frac{dv_l}{dt} = q_{l1} v_1 + \ldots + q_{ln} v_n + F_l && (l = k+1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.12}$$

где q_{ls}, F_l — некоторые вполне определенные периодические функции времени.

Для того чтобы эта система допускала периодические решения, необходимо, очевидно, чтобы выполнялись условия

$$P_i = \int_0^{2\pi} \sum_{\alpha=1}^{n} f_\alpha \varphi_{\alpha i} \, dt = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{3.13}$$

Легко показать, что если эти условия выполняются, то уравнения (3.12) действительно допускают периодические решения. Таким образом, уравнения (3.13) выражают необходимые и достаточные условия существования периодических решений системы (3.11). Но по характеру подстановки (3.11) задача отыскания периодических решений системы (3.12) эквивалентна той же задаче для системы (3.8). Поэтому уравнения (3.13) выражают условия существования периодических решений у системы (3.8), а также и у системы (1.1), как это было показано выше. Следовательно, уравнения (3.13) и представляют развернутый вид уравнений (2.9).

§ 4. Вычисление периодических решений. Обращаемся к вопросу о практическом вычислении рассмотренных периодических решений.

Первым приближением, часто достаточным для практики, является порождающее решение. Для его вычисления необходимо знать значения h_j^* параметров, от которых это решение зависит, т. е. корней уравнений (2.9). Из явного вида (3.13) этих уравнений вытекает, что для этого необходимо знать функции φ_{sl}, образующие k независимых периодических решений системы (3.10). Что касается последней задачи, то ее решение требует, вообще говоря, нахождения общего решения системы линейных уравнений с периодическими коэффициентами (3.4), являющихся уравнениями в вариациях для порождающей системы (1.3). В этом заключается вся трудность задачи, так как общих методов решения линейных уравнений с периодическими коэффициентами, как известно, не существует. Это общий недостаток метода Пуанкаре, вследствие которого область его практической применимости значительно сужается, так как приходится ограничивать выбор порождающих систем. А именно, порождающую систему необходимо выбирать таким образом, чтобы было известно ее общее решение, а не только периодические. В этом случае, как известно, легко найти общее решение и уравнений в вариациях. Однако в некоторых случаях уравнения в вариациях удается проинтегрировать и тогда, когда общее решение порождающей системы неизвестно.

Отметим важный случай. Допустим, что для порождающей системы известны первые интегралы

$$Q_j(t, x_1^\circ, \ldots, x_n^\circ) = \text{const} \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

число которых равно числу k параметров, входящих в порождающее решение. Здесь Q_j по отношению к t являются периодическими функциями.

В этом случае можно сразу написать уравнения (3.13). Имеем

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_\alpha \left(\frac{\partial Q_j}{\partial x_\alpha^\circ}\right) dt = 0$$

где скобки, как и раньше, обозначают, что производные вычислены для порождающего решения. В самом деле, согласно известным свойствам уравнений в вариациях функции

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial Q_j}{\partial x_\alpha}\right) y_\alpha \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

дают первые интегралы системы (3.4) и, следовательно, функции $(\partial Q_j / \partial x_\alpha)$ образуют k независимых решений уравнений (3.10), и так как эти функции являются периодическими, то они могут быть приняты за величины $\varphi_{\beta j}$ в уравнениях (3.13).

Таким образом, если известны первые интегралы порождающей системы, то для составления первого приближения искомого периодического решения достаточно, чтобы число этих известных интегралов равнялось k. Однако если понадобилось бы найти и дальнейшие приближения, то для этого потребовалось бы полное решение уравнений в вариациях, а это, как отмечалось, требует, вообще говоря, знания полной системы n первых интегралов порождающей системы.

Переходим к вычислению следующих приближений. Ограничимся при этом частным случаем, когда правые части уравнений (1.1) аналитичны относительно $x_1, \ldots, x_n, \mu$.

Итак, допустим, что уравнения (1.1) имеют вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(0)} + \mu X_s^{(1)} + \mu^2 X_s^{(2)} + \ldots \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.1}$$

где $X_s^{(l)}$ — аналитические функции от $x_1, \ldots, x_n$. Из предыдущего анализа легко усмотреть, что в рассматриваемом частном случае искомое периодическое решение будет аналитическим относительно μ. Поэтому найдется по крайней мере одна система рядов вида

$$x_s = \varphi_s(t, h_1^*, \ldots, h_h^*) + \mu x_s^{(1)} + \mu^2 x_s^{(2)} + \cdots \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

где $x_s^{(l)}$ — некоторые периодические функции времени, формально удовлетворяющие уравнениям (4.1). Если при этом окажется, что существует только одна такая система рядов, то эти ряды будут сходиться и действительно представят искомое решение.

Подставляя ряды (4.2) в уравнения (4.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$\frac{dx_s^{(l)}}{dt} = p_{s1} x_1^{(l)} + \cdots + p_{sn} x_n^{(l)} + f_s^{(l)} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ l = 1, \ldots) \tag{4.3}$$

где $f_s^{(l)}$ — полиномы с периодическими коэффициентами от $x_s^{(1)}, \ldots, x_s^{(l-1)}$.

При этом

$$f_s^{(1)} = X_s^{(1)}(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)_{h_j = h_j^*} \equiv \left(\frac{\partial X_s}{\partial \mu}\right) \equiv f_s \tag{4.4}$$

Уравнения (4.3) служат для последовательного определения коэффициентов $x_s^{(l)}$. Для того чтобы эти коэффициенты могли быть периодическими, необходимо и достаточно, как это было показано в предыдущем параграфе, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \int_0^{2\pi} f_\alpha^{(l)} \varphi_{\alpha j}\, dt = 0 \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{4.5}$$

где функции $\varphi_{\alpha j}$ имеют те же значения, что и в предыдущем параграфе.

При $l = 1$ мы снова получаем уравнения (3.13), которые послужат для определения значений h_i^* параметров в порождающем решении Допустим, что эти параметры действительно выбраны согласно указанным условиям. Тогда уравнения (4.3) при $l = 1$ допускают для $x_s^{(1)}$ не единственное периодическое решение, а семейство, зависящее от k произвольных параметров. В самом деле, как указывалось в предыдущем параграфе, характеристическое уравнение однородной части системы (4.3) имеет единичный корень, обращающий в нуль все миноры характеристического определителя до $n-k+1$-го порядка. Вследствие этого однородная часть уравнений (4.3) допускает k независимых периодических решений. Пусть $F_{s1}(t), \ldots, F_{sk}(t)$ — указанные решения. Тогда для функций $x_s^{(1)}$ будем иметь

$$x_s^{(1)} = \bar{x}_s^{(1)} + \alpha_1^{(1)} F_{s1} + \cdots + \alpha_k^{(1)} F_{sk} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.6}$$

где $\bar{x}_s^{(1)}$ — какое-нибудь периодическое решение уравнений для $x_s^{(1)}$, а $\alpha_j^{(1)}$ — произвольные постоянные.

Функции F_{sj} можно представить в явном виде. А именно, можно положить

$$F_{sj} = \frac{\partial \varphi_s(t, h_1^*, \ldots, h_k^*)}{\partial h_j^*} \qquad (s = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, k) \tag{4.7}$$

Действительно, так как функции φ_s удовлетворяют уравнениям (1.3), то по известному свойству уравнений в вариациях функции (4.7) удовлетворяют уравнениям (3.4). Кроме того, эти функции будут, очевидно, периодическими.

Произвольные постоянные $\alpha_j^{(1)}$ войдут через функции $f_s^{(2)}$ в уравнения для $x_s^{(2)}$. Этим можно воспользоваться для того, чтобы удовлетворить условиям периодичности функций $x_s^{(2)}$, т. е. уравнениям (4.5) при $l = 2$. Покажем, как это делается.

Допустим для определенности, что все функции $x_s^{(1)}, \ldots, x_s^{(i)}$ уже вычислены и вышли периодическими. Функции $x_s^{(i)}$ будут при этом иметь вид

$$x_s^{(i)} = \bar{x}_s^{(i)} + \alpha_1^{(i)} F_{s1} + \cdots + \alpha_k^{(i)} F_{sk} \tag{4.8}$$

где $\bar{x}_s^{(i)}$ — какое-нибудь частное периодическое решение для $x_s^{(i)}$.

Легко видеть, что функции $f_s^{(i+1)}$ при $i > 1$ имеют вид

$$f_s^{(i+1)} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 X_s^{(0)}}{\partial x_\gamma \partial x_\beta}\right) (x_\gamma^{(1)} F_{\beta j} + x_\beta^{(1)} F_{\gamma j}) \alpha_j^{(i)} + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial X_s^{(1)}}{\partial x_\gamma}\right) F_{\gamma j} \alpha_j^{(i)} + R_s^{(i+1)} =$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial^2 X_s^{(0)}}{\partial x_\gamma \partial x_\beta}\right) x_\gamma^{(1)} F_{\beta j} \alpha_j^{(i)} + \sum_{\gamma=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial X_s^{(1)}}{\partial x_\gamma}\right) F_{\gamma j} \alpha_j^{(i)} + R_s^{(i+1)}$$

где $R_s^{(i+1)}$ — вполне определенные периодические функции времени, не зависящие от $\alpha_j^{(i)}$.

На основании (3.5) и (4.7) имеем

$$f_s^{(i+1)} = \sum_{m=1}^{k} \left\{ \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial p_{s\beta}}{\partial h_m^*} x_\beta^{(1)} + \frac{\partial f_s}{\partial h_m^*} \right\} \alpha_m^{(i)} + R_s^{(i+1)}$$

Следовательно, уравнения (4.5) при $l = i+1$, определяющие постоянные $\alpha_j^{(i)}$, имеют вид

$$A_{1j}\alpha_1^{(i)} + A_{2j}\alpha_2^{(i)} + \cdots + A_{hj}\alpha_h^{(i)} + B_j^{(i)} = 0 \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{4.9}$$

где

$$A_{mj} = \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial p_{\gamma\beta}}{\partial h_m^*} x_\beta^{(1)} + \frac{\partial f_\gamma}{\partial h_m^*} \right) \varphi_{\gamma j} dt$$

При $l = 1$ уравнения (4.9) будут содержать еще квадратичные члены, совокупность которых A_j имеет вид

$$A_j = \sum_{l=1}^{k} \sum_{m=1}^{k} A_{j\,lm} \alpha_l^{(i)} \alpha_m^{(i)}, \quad A_{j\,lm} = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial p_{\beta\gamma}}{\partial h_m^*} F_{\gamma l} \varphi_{\beta j} dt$$

Функции $x_\beta^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям (4.3) при $l = 1$. Поэтому

$$A_{mj} = \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_\gamma^{(1)}}{\partial h_m^*} \right) - \sum_{\beta=1}^{n} p_{\gamma\beta} \frac{\partial x_\beta^{(1)}}{\partial h_m^*} \right\} \varphi_{\gamma j} dt$$

Интегрируя по частям и принимая во внимание, что функции $\varphi_{\gamma j}$ удовлетворяют уравнениям (3.10), последовательно находим

$$A_{mj} = \Big|_0^{2\pi} \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial x_\gamma^{(1)}}{\partial h_m^*} \varphi_{\gamma j} - \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial x_\gamma^{(1)}}{\partial h_m^*} \frac{d\varphi_{\gamma j}}{dt} + \sum_{\beta=1}^{n} p_{\gamma\beta} \frac{\partial x_\beta^{(1)}}{\partial h_m^*} \varphi_{\gamma j} \right\} dt =$$

$$= \Big|_0^{2\pi} \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial x_\gamma^{(1)}}{\partial h_m^*} \varphi_{\gamma j} - \sum_{\gamma=1}^{n} \int_0^{2\pi} \frac{\partial x_\gamma^{(1)}}{\partial h_m^*} \left\{ \frac{d\varphi_{\gamma j}}{dt} + \sum_{\beta=1}^{n} p_{\beta\gamma} \varphi_{\beta j} \right\} dt =$$

$$= \Big|_0^{2\pi} \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial x_\gamma^{(1)}}{\partial h_m^*} \varphi_{\gamma j}.$$

Заметим, что функции $x_\gamma^{(1)}$ являются периодическими только при определенных значениях параметров h_j^* и поэтому функции $\partial x_\gamma^{(1)}/\partial h_m^*$ не будут, вообще говоря, периодическими и выражения A_{mj} будут отличны от нуля. Но мы можем писать

$$A_{mj} = \frac{\partial}{\partial h_m^*} \Big|_0^{2\pi} \sum_{\gamma=1}^{n} x_\gamma^{(1)} \varphi_{\gamma j}$$

так как функции $\varphi_{\gamma j}$ будут периодическими при любых значениях параметров h_i^* и поэтому выражения $x_\gamma^{(1)} \partial\varphi_{\gamma j}/\partial h_m^*$ будут также периодическими. Далее, имеем

$$\frac{d}{dt} \sum_{\gamma=1}^{n} x_\gamma^{(1)} \varphi_{\gamma j} = \sum_{\gamma=1}^{n} f_\gamma \varphi_{\gamma j}$$

Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что функции $\varphi_{\gamma j}$ удовлетворяют уравнениям, сопряженным с однородной частью уравнений для $x_\gamma^{(1)}$. Поэтому окончательно находим

$$A_{mj} = \frac{\partial}{\partial h_m^*} \int_0^{2\pi} \sum_{\gamma=1}^{n} f_\gamma \varphi_{\gamma j} dt = \frac{\partial P_j}{\partial h_m^*}$$

Что же касается коэффициентов A_{jlm}, то все они тождественно обращаются в нуль. В этом можно убедиться, повторяя такие же выкладки, принимая при этом во внимание, что функции $F_{\gamma l}$ удовлетворяют уравнениям (3.4), которые в отличие от уравнений для $x_\gamma^{(1)}$ однородны.

Итак, уравнения для $\alpha_j^{(i)}$ получаются всегда линейными. Однородная часть этих уравнений не зависит от индекса i и имеет определитель, совпадающий с функциональным определителем (2.11). Поэтому всякому простому решению уравнений (3.13) соответствует одна и только одна система рядов (4.2), формально удовлетворяющих уравнениям (4.1). Эти ряды будут, следовательно, сходиться и действительно представят искомое периодическое решение.

Таким образом, приходим к следующему правилу вычисления периодических решений системы вида (4.1), когда порождающее решение зависит от некоторого числа параметров.

Ищем периодическое решение в виде формальных рядов (4.2). Подставляя эти ряды в уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим уравнения вида (4.3) для последовательного определения коэффициентов $x_s^{(l)}$. Для того чтобы эти коэффициенты получались периодическими, необходимо, чтобы неоднородные части их уравнений удовлетворяли условиям вида (4.5) Эти условия для $l = 1$ определяют значения параметров в порождающем решении и имеют вид (3.13). Эти условия для $l > 1$ определяют значения произвольных постоянных, входящих в $x_s^{(l-1)}$, причем полученные для этих постоянных уравнения будут линейными и всегда разрешимыми, если только выполняется условие (2.11).

Поступила в редакцию
13 VII 1949

Уральский государственный
университет

ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Г. Малкин, Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. Гостехиздат. 1949.