

ОДНОМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа посвящена нестационарным движениям вязко-пластической среды, определяемой зависимостями между напряжениями и деформациями, заданными в дифференциальной форме. Рассматривается распространение прерывных волн сдвига плоских и цилиндрических, вызванных граничными возмущениями.

§ 1. Уравнения прямолинейного течения. Рассмотрим одномерное течение среды, которое в прямолинейной системе координат $x y z$ происходит параллельно оси y и не зависит от координат y и z . Такое течение определяется компонентами: напряжения τ_{xy} , деформации γ_{xy} , скорости v_y и смещения u_y , причем все эти величины являются функциями только от координаты x и времени t .

Примем дифференциальные зависимости между компонентами напряжения τ_{xy} и деформации γ_{xy} известного вида^[1]:

$$\frac{d\gamma_{xy}}{dt} = 0 \quad \text{при } |\tau_{xy}| \leq k; \quad \frac{d\gamma_{xy}}{dt} = \frac{\kappa}{\mu} (|\tau_{xy}| - k) \quad \text{при } |\tau_{xy}| \geq k \quad (1.1)$$

Здесь приняты обозначения: $\kappa = \text{sign } \tau_{xy}$, k — пластическая постоянная, μ — коэффициент вязкости.

Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

где η — плотность материала.

Компоненты деформации γ_{xy} , скорости v_y , смещения u_y связаны так

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} \quad (1.3)$$

Уравнения (1.1) и (1.2) приводят к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \eta \frac{\partial v_y}{\partial t}, \quad \mu \frac{\partial v_y}{\partial x} = \kappa \varphi (|\tau_{xy}| - k) \quad (1.4)$$

служащей для определения компонент напряжения τ_{xy} и скорости v_y .

Уравнение

$$\mu \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \kappa \varphi (|\tau_{xy}| - k) \quad (1.5)$$

дает возможность найти компоненту деформации γ_{xy} .

Функция φ , входящая в эти формулы, определена равенствами:

$$\varphi(z) = 0 \quad (z \leq 0), \quad \varphi(z) = z \quad (z \geq 0) \quad (1.6)$$

Система уравнений (1.4) принадлежит к параболическому типу и обладает в плоскости tx семейством характеристик $t = \text{const}$.

Движение рассматриваемой среды которое отвечает решению уравнений (1.4), определенному в некоторой области изменения t и x , называется волной; волны, на переднем фронте которых τ_{xy} разрывно, называются прерывными или ударными волнами.

Ниже будем пользоваться безразмерными величинами

$$\xi = \frac{V\sqrt{\nu\eta}k}{\mu} x, \quad \tau = \frac{\nu k}{\mu} t, \quad X = \frac{\xi}{2V\tau} = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \frac{x}{2Vt}$$

$$T = \frac{|\tau_{xy}|}{k}, \quad G = \kappa\nu\gamma_{xy}, \quad V = \kappa\sqrt{\frac{\nu\eta}{k}} v, \quad U = \kappa\frac{\nu}{\mu} V\sqrt{\nu\eta}k u$$

где ν — наперед выбранное большое число, введенное для удобства.

Уравнения (1.4) в безразмерных переменных принимают вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = \varphi(T - 1) \quad (1.7)$$

Они принадлежат к параболическому типу и имеют одно семейство характеристик $\tau = \text{const}$.

Уравнение (1.5) в безразмерных переменных будет

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \varphi(T - 1) \quad (1.8)$$

Величины T и V определяются уравнениями (1.7), которые могут быть переписаны в следующем виде:

$$T = T_0(\tau) + \xi V'(\tau), \quad V = V(\tau) \quad \text{при } T \leq 1 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial \xi} = T - 1 \quad \text{при } T \geq 1 \quad (1.10)$$

Через $T_0(\tau)$ и $V(\tau)$ обозначены произвольные функции.

Из последних уравнений ясно, что при $T \geq 1$ величины T и V удовлетворяют уравнениям теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

для линейного потока тепла в твердом теле. Поэтому в ряде задач о нестационарных течениях вязко-пластической среды могут быть использованы решения соответствующих задач теории теплопроводности (см., например, [2]).

Для приближенного решения полученных дифференциальных уравнений удобно пользоваться методом конечных разностей,

Значения искомых величин T и V на плоскости $\tau\xi$ в конечном числе точек пересечения прямых $\xi = \text{const}$ (пронумерованных индексами $k-1, k, \dots$) и характеристик $\tau = \text{const}$ (пронумерованных индексами $l-1, l, \dots$) находятся из разностных уравнений соответствующих

дифференциальным уравнениям (1.7), имеющих вид

$$\frac{T_{k-1, l+1} - T_{k-1, l-1}}{2h} = \frac{V_{kl} - V_{k-1, l}}{m}$$

$$\frac{V_{k-1, l+1} - V_{k-1, l-1}}{2h} = \varphi(T_{k-1, l} - 1)$$

где m и h обозначают шаги разности соответственно по осям τ и ξ .

Величина G может быть на основании уравнения (1.8) и условия $G = 0$ при $\tau = 0$ представлена в виде

$$G = \int_0^{\tau} \varphi(T - 1) d\tau \tag{1.11}$$

Если для какого-нибудь значения ξ , начиная с момента $\tau = 0$, имеет место жесткое состояние ($T \leq 1$), то $G = 0$; если же для какого-нибудь значения ξ имело место вязко-пластическое состояние ($T \geq 1$), а начиная с момента $\tau > \tau(\xi)$, образовалось жесткое состояние ($T \leq 1$), то компонента деформации имеет вид:

$$(1.12)$$

$$G = \int_0^{\tau} T d\tau - \tau \quad (0 \leq \tau \leq \tau(\xi)), \quad G = \int_0^{\tau(\xi)} T d\tau - \tau(\xi) = G_r(\xi) \quad (\tau > \tau(\xi))$$

Величина $G_r(\xi)$ определяет остаточную деформацию и совпадает с величиной G на линии $\tau = \tau(\xi)$.

§ 2. Плоские волны сдвига. Рассмотрим распространение плоских волн сдвига в вязко-пластической среде, занимающей полуплоскость $x > 0$ и ограниченной осью $x = 0$, на которой задано касательное напряжение $\tau_{xy} = \tau_{xy}(t)$ или скорость $v_y = v_y(t)$.

Задача 1. На границе $x = 0$ задано касательное напряжение $\tau_{xy} = \tau_{xy}^0$ при $0 < t < t_0$ и $\tau_{xy} = 0$ при $t > t_0$.

Начальные и граничные условия задачи напишутся так:

$$V = 0 \quad \text{при } \tau = 0$$

$$T = T_0 \quad \text{при } \xi = 0, 0 < \tau < \tau_0, \quad T = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \tau > \tau_0 \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение плоскость $\tau\xi$.

В полуполосе $0 < \tau < \tau_0, \xi > 0$ плоскости $\tau\xi$ (фиг. 1) имеет место вязко-пластическое состояние.

Величина T вследствие уравнений (1.10) и условий (2.1) должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = \frac{\partial T}{\partial \tau}$$

и принимать значения $T = 1$ при $\tau = 0$ и $T = T_0$ при $\xi = 0$.

Таким образом, определение T сводится к известной задаче теории теплопроводности о нахождении температуры в полубесконечном твердом теле [2] при постоянных начальной и граничной температурах.

Имеем

$$T = 1 + (T_0 - 1)[1 - \text{erf}(X)] \tag{2.2}$$

Величина V находится из уравнений (1.1) и условия $V = 0$ при $\tau = 0$ в виде

$$V = 2(T_0 - 1) \sqrt{\tau} \left\{ X [1 - \operatorname{erf}(X)] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2) \right\} \quad (2.3)$$

Величина G определяется из уравнений (1.12) так

$$G = (T_0 - 1) \tau \left\{ (1 + 2X^2) [1 - \operatorname{erf}(X)] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} X \exp(-X^2) \right\} \quad (2.4)$$

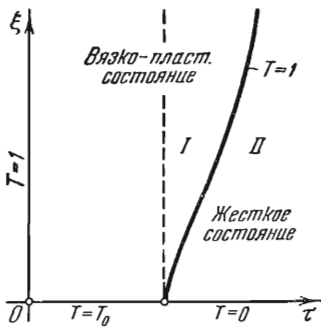
Через $\operatorname{erf} X$ обозначен известный интеграл вероятности

$$\operatorname{erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X \exp(-z^2) dz$$

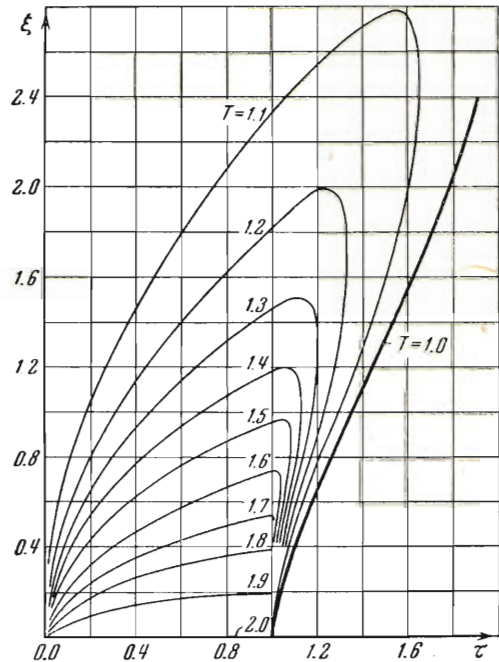
На границе $\xi = 0$

$$-V = 2(T_0 - 1) \sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$$

$$G = (T_0 - 1) \tau$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Уравнения линий равных напряжений $T = \text{const}$ и равных скоростей $V = \text{const}$ могут быть получены из формул (2.2); линиями равных напряжений служат параболы $\xi^2 / \tau = \text{const}$.

В части $\tau > \tau_0$, $\xi \geq 0$ плоскости $\tau\xi$ (фиг. 1) имеют место две области: зона вязко-пластического состояния (отмеченная цифрой I) и зона жесткого состояния (отмеченная цифрой II). Границей между этими зонами служат линия $\tau = \tau(\xi)$ или $\xi = \xi(\tau)$, вдоль которой $T = 1$.

Уравнение $\xi = \xi(\tau)$ устанавливает закон образования жесткого состояния (отвердевания).

Величины T и V находятся путем построения решений уравнений (1.7) по граничным данным (2.1) и условию непрерывности T и V вдоль $\tau = \tau_0$ (за исключением точки $\tau = \tau_0$, $\xi = 0$). Построение решений следует проводить численным методом, хорошо известным в теории параболических уравнений (см., например, [3]).

Величина G определяется по формуле (1.12), причем $\tau = \tau(\xi)$ есть уравнение кривой, вдоль которой $T = 1$.

Ниже приведены результаты вычислений рассмотренной задачи при $T_0 = 2, \tau_0 = 1$; даны значения напряжения, деформации и скорости на границе среды $\xi = 0$, вдоль оси ξ в момент $\tau = \tau_0$, на границе между зонами I и II, а также значения остаточной деформации.

Граница $\xi = 0$

τ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$-V$	0.00	0.50	0.71	0.87	1.01	$\frac{1.13}{0.95}$	0.48	0.28	0.16	0.07	0.00
G	0.00	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	0.54	0.37	0.25	0.16	0.06

Момент времени $\tau = \tau_0 = 1$

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
T	2.00	1.86	1.76	1.67	1.57	1.48	1.40	1.32	1.27	1.20	1.17	1.14	1.09
$-V$	1.13	0.94	0.77	0.63	0.51	0.40	0.32	0.24	0.18	0.14	0.10	0.07	0.05
G	1.00	0.79	0.62	0.47	0.37	0.28	0.21	0.15	0.11	0.08	0.06	0.04	0.03

Граница $\tau = \tau(\xi)$

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
τ	1.00	1.03	1.10	1.18	1.27	1.36	1.45	1.54	1.63	1.70	1.78	1.86	1.93
$-V$	0.95	0.80	0.64	0.49	0.39	0.31	0.25	0.20	0.15	0.10	0.07	0.04	0.02
G	1.00	0.82	0.68	0.56	0.48	0.41	0.34	0.28	0.25	0.21	0.17	0.13	0.10

Остаточная деформация

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.5	3.0
G_r	1.00	0.82	0.68	0.56	0.48	0.41	0.34	0.28	0.25	0.21	0.17	0.08	0.04

На фиг. 2 в плоскости $\tau\xi$ нанесены линии $T = \text{const}$, а также показана граница между зонами $\tau = \tau(\xi)$.

Задача 2. На границе $x=0$ заданы скорость $v = v_0$ при $0 < t < t_0$ и касательное напряжение $\tau_{xy} = 0$ при $t > t_0$.

Начальные и граничные данные следуют из условий задачи

$$V = 0 \quad \text{при } \tau = 0 \tag{2.5}$$

$$V = V_0 \quad \text{при } \xi = 0, 0 < \tau < \tau_0; T = 0 \quad \text{при } \xi = 0, \tau > \tau_0$$

В полуполосе $0 < \tau < \tau_0, \xi \geq 0$ плоскости $\tau\xi$ (фиг. 3) имеет место вязко-пластическое состояние.

Величина V в силу уравнений (1.10) и условий (2.5) должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} = \frac{\partial V}{\partial \tau}$$

и принимать значения $V = 0$ при $\tau = 0$ и $V = V_0$ при $\xi = 0$.

Поэтому нахождение V сводится к задаче теории теплопроводности об определении температуры в полубесконечном твердом теле [2], когда начальная температура равна нулю, а граничная температура постоянна. Имеем

$$V = V_0 [1 - \text{erf}(X)] \tag{2.6}$$

Величина T находится из уравнений (1.10) в виде

$$T = 1 - \frac{V_0}{V} \frac{\exp(-X^2)}{\sqrt{\pi\tau}} \quad (2.7)$$

Величина G определяется из уравнений (1.12) так

$$G = 2V_0\sqrt{\tau} \left\{ X [1 - \operatorname{erf}(X)] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-X^2) \right\} \quad (2.8)$$

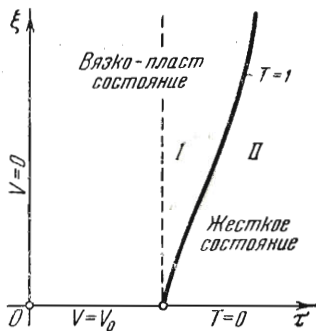
На границе $\xi = 0$

$$T = 1 - \frac{V_0}{V} \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}$$

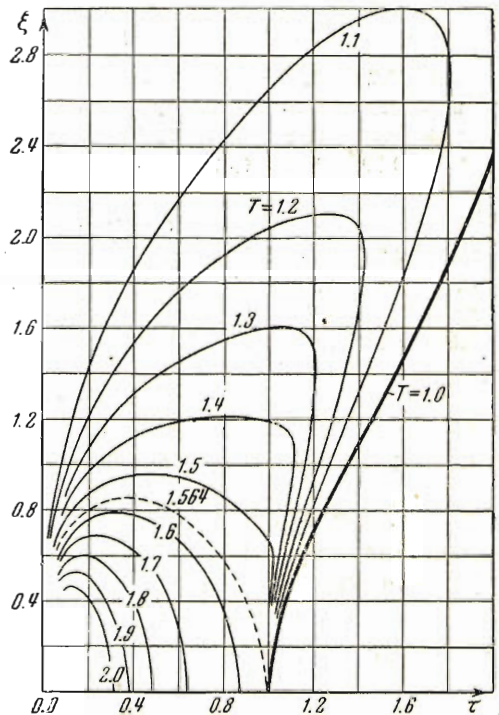
$$G = -2V_0\sqrt{\frac{\tau}{\pi}}$$

Отсюда следует, что в начальный момент $\tau = 0$ напряжение $T = \infty$.

Уравнения линий равных напряжений $T = \text{const}$ и рав-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных скоростей $V = \text{const}$ могут быть легко получены из уравнений (2.6); линии равных напряжений суть кривые $\tau \exp(\xi^2/2\tau) = \text{const}$, а линии равных скоростей суть параболы $\xi^2/\tau = \text{const}$.

В части $\tau > \tau_0$, $\xi \geq 0$ плоскости $\tau\xi$ (фиг. 3), так же как и в задаче 1, имеют место две области: зона вязко-пластического состояния (отмеченная цифрой I) и зона жесткого состояния (отмеченная цифрой II).

Величины T и V находятся путем построения решений уравнения (1.7) по граничным данным (2.5) и условию непрерывности T и V вдоль $\tau = \tau_0$ (за исключением точки $\tau = \tau_0$, $\xi = 0$). Построение решений проводится так же, как и в предыдущей задаче 1.

Величина G определяется по формуле (1.12), причем $\tau = \tau(\xi)$ есть уравнение кривой, вдоль которой $T = 1$.

Ниже приведены результаты вычислений к рассмотренной задаче при $V_0 = -1$; $\tau_0 = 1$; даны значения напряжения, деформации и скорости на границе среды $\xi = 0$, вдоль оси ξ в момент $\tau = \tau_0$, на границе между зонами I и II, а также значения остаточной деформации.

Граница $\xi = 0$

τ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
T	∞	2.26	1.89	1.73	1.63	1.56 0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$-V$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00 0.92	0.55	0.38	0.24	0.13	0.04
G	0.00	0.51	0.71	0.87	1.01	1.13	0.64	0.48	0.36	0.26	0.17

Момент времени $\tau = \tau_0 = 1$

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
T	1.56	1.56	1.54	1.51	1.48	1.44	1.40	1.35	1.30	1.25	1.21	1.17	1.13
$-V$	1.00	0.89	0.78	0.67	0.57	0.48	0.40	0.32	0.26	0.20	0.16	0.12	0.09
G	1.13	0.94	0.77	0.63	0.51	0.40	0.32	0.24	0.18	0.14	0.10	0.08	0.05

Граница $\tau = \tau(\xi)$

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
τ	1.00	1.03	1.08	1.16	1.24	1.35	1.46	1.56	1.68	1.77	1.86	1.94	0.01
$-V$	0.92	0.81	0.70	0.59	0.49	0.40	0.31	0.26	0.20	0.15	0.11	0.07	0.04
G	1.13	0.95	0.81	0.69	0.59	0.51	0.44	0.38	0.33	0.28	0.23	0.19	0.16

Остаточная деформация

ξ	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4
G_r	1.13	0.95	0.81	0.69	0.59	0.51	0.44	0.38	0.33	0.28	0.23	0.19	0.16

На фиг. 4 в плоскости $\tau\xi$ нанесены линии $T = \text{const}$, а также показана граница между зонами $\tau = \tau(\xi)$.

§ 3. Уравнения вращательного течения. Рассмотрим вращательное течение среды, которое в цилиндрической системе координат $r\theta z$ происходит вокруг оси z и не зависит от координат θ и z .

Такое течение определяется компонентами: напряжения $\tau_{r\theta}$ деформации $\gamma_{r\theta}$, скорости v_θ и смещения u_θ , причем все эти величины являются лишь функциями только от координаты r и времени t .

Примем дифференциальные зависимости, дающие связь между компонентами напряжения $\tau_{r\theta}$ и деформации $\gamma_{r\theta}$, вида

$$\frac{d\gamma_{r\theta}}{dt} = 0 \quad \text{при} \quad |\tau_{r\theta}| \leq k; \quad \frac{d\gamma_{r\theta}}{dt} = \frac{\kappa}{\mu} (|\tau_{r\theta}| - k) \quad \text{при} \quad |\tau_{r\theta}| \geq k \quad (3.1)$$

причем $\kappa = \text{sign } \tau_{r\theta}$.

Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \eta \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2} \quad (3.2)$$

где η — плотность материала.

Компоненты деформации $\gamma_{r\theta}$, скорости v_θ , смещения u_θ связаны так

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad v_\theta = \frac{\partial u_\theta}{\partial t} \quad (3.3)$$

Уравнения (3.1) и (3.2) приводят к системе уравнений

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \eta \frac{\partial v_\theta}{\partial t}, \quad \mu \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right) = \kappa \varphi (|\tau_{r\theta}| - k) \quad (3.4)$$

содержащей компоненты напряжения $\tau_{r\theta}$ и скорости v_θ . Уравнение

$$\mu \frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial t} = \kappa \varphi (|\tau_{r\theta}| - k) \quad (3.5)$$

позволяет определить компоненту деформации $\gamma_{r\theta}$.

Функция φ попережнему определена равенствами:

$$\varphi(z) = 0 \quad (z \leq 0), \quad \varphi(z) = z \quad (z \geq 0) \quad (3.6)$$

Система уравнений (3.4) принадлежит к параболическому типу и имеет в плоскости tx семейство характеристик $t = \text{const}$.

Ниже будем пользоваться безразмерными величинами

$$\rho = \frac{V\sqrt{\eta k}}{\mu} r, \quad \tau = \frac{\nu k}{\mu} t, \quad R = \frac{\rho}{2V\tau} = \sqrt{\frac{\eta}{\mu}} \frac{r}{2\sqrt{t}}$$

$$T = \frac{|\tau_{r\theta}|}{k}, \quad G = \kappa \nu \gamma_{r\theta}, \quad V = \kappa \sqrt{\frac{\nu \eta}{k}} v_\theta, \quad U = \kappa \frac{\nu}{\mu} V \sqrt{\eta k} u_\theta$$

где ν — наперед выбранное большое число.

Уравнения (3.4) в безразмерных переменных имеют вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho} = \varphi(T - 1) \quad (3.7)$$

Они принадлежат к параболическому типу и имеют семейство характеристик $\tau = \text{const}$.

Уравнение (3.5) в безразмерных переменных будет

$$\frac{\partial G}{\partial \tau} = \varphi(T - 1) \quad (3.8)$$

Величины T и V определяются уравнениями (3.7), которые могут быть представлены так:

$$T = \frac{A(\tau)}{\rho^2} + \frac{\rho^2}{4} B'(\tau), \quad V = \rho B(\tau) \quad \text{при } T \leq 1 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \rho} + \frac{2T}{\rho} = \frac{\partial V}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{V}{\rho} = T - 1 \quad \text{при } T \geq 1 \quad (3.10)$$

через $A(\tau)$ и $B(\tau)$ обозначены произвольные функции.

Для приближенного решения полученных дифференциальных уравнений (3.7) удобно пользоваться разностным методом¹. Значения иско-

¹ Здесь может быть также применен прием, недавно предложенный М. Е. Швецом [4], который позволяет приближенно составить дифференциальное уравнение линии $\tau = \tau(\rho)$.

мых величин T и V на плоскости $\tau\rho$ в конечном числе точек пересечения прямых $\rho = \text{const}$ (пронумерованных индексами $k-1, k, \dots$) и характеристик $\tau = \text{const}$ (пронумерованных индексами $l-1, l, \dots$) определяются из разностных уравнений

$$\frac{T_{k-1, l+1} - T_{k-1, l-1}}{2h} + \frac{2T_{k-1, l}}{\rho_{k-1, l}} = \frac{V_{k, l} - V_{k-1, l}}{m}$$

$$\frac{V_{k-1, l+1} - V_{k-1, l-1}}{2h} = \varphi(T_{k-1, l-1})$$

где m и h — шаги разности соответственно по осям τ и ξ .

Уравнение (3.8) и условие $G = 0$ при $\tau = 0$ дают

$$G = \int_0^\tau \varphi(T-1) d\tau \tag{3.11}$$

Если для какого-нибудь значения ρ компонента напряжения при $\tau > 0$ изменяется непрерывно, причем

$$T \leq 1 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1(\rho)), \quad T \geq 1 \quad (\tau_1(\rho) \leq \tau \leq \tau_2(\rho)),$$

$$T \leq 1 \quad (\tau_2(\rho) \leq \tau \leq \infty)$$

где $\tau = \tau_1(\rho)$ и $\tau = \tau_2(\rho)$ — два момента времени, когда $T = 1$, то величина G определяется соотношениями

$$G = 0 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_1(\rho)); \quad G = \tau_1(\rho) - \tau + \int_{\tau_1(\rho)}^\tau T d\tau \quad (\tau_1(\rho) \leq \tau \leq \tau_2(\rho))$$

$$G = \tau_1(\rho) - \tau_2(\rho) + \int_{\tau_1(\rho)}^{\tau_2(\rho)} T d\tau = G_r(\rho) \quad (\tau_2(\rho) \leq \tau \leq \infty)$$

Величина $G_r(\rho)$ определяет остаточную деформацию и совпадает с величиной G на линии $\tau = \tau_2(\rho)$.

§ 4. Цилиндрические волны сдвига. Рассмотрим распространение цилиндрических волн сдвига в вязко-пластической среде, занимающей внешность круга $r > r_0$ и ограниченной окружностью $r = r_0$, на которой дано касательное напряжение $\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}(t)$ или скорость $v_\theta = v_\theta(t)$.

Задача 3. На окружности $r = r_0$ задано $\tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0(1 - t/t_0)$.

Начальные и граничные данные могут быть представлены так:

$$V = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0, \quad T = T_0(1 - \tau/\tau_0) \quad \text{при} \quad \rho = \rho_0 \tag{4.1}$$

В плоскости $\tau\rho$ (фиг. 5) имеют место две области: зона жесткого состояния и зона вязко-пластического состояния; границей между зонами служит линия $\tau = \tau(\rho)$ или $\rho = \rho(\tau)$, вдоль которой $T = 1$.

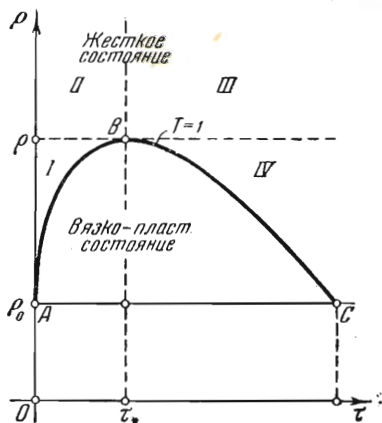
Уравнение $\rho = \rho(\tau)$ при $0 < \tau < \tau_*$ устанавливает закон возникновения вязко-пластического состояния, а уравнение $\rho = \rho(\tau)$ при $\tau > \tau_*$ дает закон образования жесткого состояния (отвердевания).

Величины T и V находятся путем построения решений уравнений (3.7) по данным (4.1): в зоне жесткого состояния

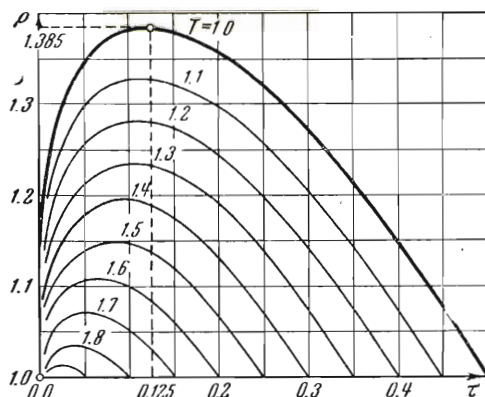
$$T = \frac{\rho^2(\tau)}{\rho^2}, \quad V = 0 \quad (4.2)$$

а в зоне вязко-пластического состояния T и V находятся численно.

Величина G находится из уравнения (3.12): в зоне жесткого состояния $G = 0$ в областях I, II, III, $G = G_r(\rho)$ в области IV, а в зоне вязко-пластического состояния G находится численным методом (см [3]).



Фиг. 5



Фиг. 6

Величина $G_r(\rho)$, определяющая остаточную деформацию, совпадает с величиной G вдоль линии $\tau = \tau(\rho)$ на участке CB . Ниже приведены результаты вычислений к рассмотренной задаче,

Граница среды $\rho = \rho_0 = 1$

τ	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
V	0.00	0.17	0.12	0.07	0.02	0.00
G	0.00	0.05	0.12	0.18	0.21	0.22

Остаточная деформация

ρ	1.0	1.1	1.2	1.3	1.385
G_r	0.22	0.16	0.10	0.04	0.00

Граница $\tau = \tau(\rho)$, участок AB

ρ	1.0	1.1	1.2	1.3	1.385
τ	0.00	0.00	0.01	0.03	0.125
G	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Граница $\tau = \tau(\rho)$, участок CB

ρ	1.0	1.1	1.2	1.3	1.385
τ	0.50	0.43	0.36	0.27	0.125
G	0.22	0.16	0.10	0.04	0.00

На фиг. 6 в плоскости $\tau\rho$ нанесены линии $T = \text{const}$, а также показана граница между зонами $\tau = \tau(\rho)$.

Поступила в редакцию
28 V 1949

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

- Ильющин А. А. К вопросу о вязко-пластическом течении материала. Труды конференции по пластическим деформациям. 1938.
- Карслоу Г. С. Теория теплопроводности. 1947.
- Панов Д. Ю. Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных. Гостехиздат. 1943.
- Швед М. Е. ПММ. 1949. XIII. Вып. 3.