Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

К ТЕОРИИ ТОНКИХ И ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

Г. Ю. Джанелидзе
(Ленинград)

В настоящее время работами В. З. Власова [1] создана теория тонкостенных стержней, широко применяемая на практике. Эта теория А. А. Уманским [7] была распространена на тонкостенные стержни замкнутого профиля. При этом авторы исходили из представлений современной теории оболочек.

Ниже делается попытка построения теории тонкостенных стержней, включающей классическую теорию деформации тонких стержней, пользуясь некоторой кинематической гипотезой.

§ 1. Основная кинематическая гипотеза. Предварительно приведем общую гипотезу, которая может быть принята для построения теории тонких и тонкостенных стержней. Предположим, что во всем объеме стержня обращаются в нуль удлинения ε_x, ε_y и сдвиг γ_{xy}. В случае тонкого стержня это предположение обосновывается анализом решения задач Сен-Венана, Мичелля и Альманзи. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{1.1}$$

Отсюда, интегрируя первые два соотношения, имеем $u = u(y, z)$, $v = v(x, z)$ и на основании последнего окончательно получаем

$$u = u_0(z) - \vartheta(z)\, y, \qquad v = v_0(z) + \vartheta(z)\, x \tag{1.2}$$

где u_0, v_0, $\tau(z)$ — произвольные функции координаты z.

Мы примем гипотезу более частного характера, нежели (1.1), а именно, что при отнесении поперечных сечений стержня к главным осям инерции

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \tau\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y\right), \qquad \gamma_{yz} = \tau\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x\right) \tag{1.3}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon + \varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \varphi(x, y)\,\dot{\tau} \qquad \left(\dot{\tau} = \frac{\partial \tau}{\partial z}\right)$$

Здесь $\varkappa_1(z)$, $\varkappa_2(z)$ — кривизны деформированной оси стержня, $\tau(z)$ — угол закручивания на единицу длины, ε — относительное удлинение, $\varphi(x, y)$ — функция кручения, удовлетворяющая условиям

$$\Delta \varphi = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = y \cos(n, x) - x \cos(n, y) \tag{1.4}$$

т. е. функция $\varphi(x, y)$ является решением задачи Неймана и определяется с точностью до произвольной постоянной. В зависимости от выбора этой постоянной изменяется смысл величины ε.

Если принять в качестве условия нормирования равенство $\varphi(0, 0) = 0$, то ε действительно представляет собой относительное удлинение ε_z в точках оси стержня.

При ином способе нормирования, когда входящую в $\varphi(x, y)$ постоянную определяют из условия

$$\iint\limits_{\Omega} \varphi(x, y)\, dx\, dy = 0$$

величина ε является той частью относительного удлинения, которая вызвана внешними растягивающими силами.

При выводе соотношений Кирхгофа естественно использовать первый способ нормирования, а при рассмотрении задач, в которых отсутствуют растягивающие усилия, — второй. Соотношения (1.3) отличаются от классических формул наличием члена $\varphi(x, y)\dot{\tau}$ в выражении ε_z. Введение этого члена обосновано тем, что при переменном τ член $\varphi(x, y)\dot{\tau}$ необходим для того, чтобы деформации (1.3) удовлетворяли условиям сплошности Сен-Венана. Это легко установить, если принять выражения γ_{xz}, γ_{yz} и найти вид ε_z интегрированием уравнений сплошности. Кроме того, как было показано В. В. Новожиловым,[6] соотношения (1.3) получаются при разложении перемещений u, v, w в ряды по координатам x и y точек поперечного сечения и отвечают второму приближению.

Заметим здесь, что задача о стесненном кручении призматических стержней была приближенно решена Н. В. Зволинским [5], сходившим из задания перемещений в форме $u = -yf(z)$, $v = xf(z)$, $w = \varphi(x, y)F(z)$ и определившим вариационным путем функции $f(z)$ и $F(z)$. Эта форма задания перемещений соответствует более общей кинематической гипотезе, нежели (1.3).

§ 2. Схема вывода соотношений между усилиями и кинематическими характеристиками. Принятую в предыдущем параграфе кинематическую гипотезу часто дополняют предположением о второстепенности деформации ε. Тогда усилие V_z находится из уравнений статики, а формула, связывающая V_z и ε, отбрасывается. Поэтому вместо полной системы уравнений теории тонких стержней из шестнадцати уравнений получается система пятнадцати уравнений с пятнадцатью неизвестными.

Двенадцать из этих уравнений (шесть уравнений статики и шесть уравнений неразрывности) не зависят ни от формы связи между напряжениями и деформациями, ни от характера кинематической гипотезы. Последние сказываются лишь на зависимостях между кривизной и кручением, с одной стороны, и моментами — с другой.

Рассмотрим вопрос о выводе соотношений между «обобщенными координатами» $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ, ε и «обобщенными» силами M_x, M_y, M_z, V_z.

Элементарная работа обобщенных сил может быть представлена формулой

$$\delta A = \int\limits_0^L [V_z \,\delta\varepsilon + M_x \,\delta\varkappa_1 + M_y \,\delta\varkappa_2 + M_z \,\delta\tau] \,dz + \tag{2.1}$$

$$+ \int\limits_0^L \iint\limits_S p_z \delta w^* dS \,dz + \iint\limits_\Omega \sigma_z^\circ \;\varphi(x, y) \,dx \,dy \,\delta\tau \Big|_{z=L}$$

Здесь L — длина стержня; S — площадь боковой поверхности стержня; σ_z°-распределенные по торцу $z = L$ нормальные напряжения; $p_z(s, z)$ — составляющая по оси z распределенной по боковой поверхности нагрузки; w^* — разность перемещений вдоль оси z произвольной точки поперечного сечения и его центра тяжести, т. е. относительное перемещение

$$\delta \dot{w}^* = y \,\delta\varkappa_1 - x \,\delta\varkappa_2 + \varphi \,\delta\dot{\tau}$$

Далее для упрощения вычислений принимается, что $p_z = 0$.

Формула, определяющая потенциальную энергию стержня после отбрасывания членов, содержащих второстепенные напряжения σ_x, σ_y, τ_{xy}, записывается в виде

$$\Pi = \frac{1}{2} \int\limits_0^L \iint\limits_\Omega \left[\frac{\sigma_z^2}{E} + \frac{\tau_{xz}^2}{\mu} + \frac{\tau_{yz}^2}{\mu} \right] dx \,dy \,dz \tag{2.2}$$

Здесь E — модуль Юнга, а μ — модуль сдвига.

Принятие той или иной кинематической гипотезы позволяет выразить потенциальную энергию через «обобщенные координаты». Приравнивая затем вариацию потенциальной энергии $\delta\Pi$ элементарной работе δA, получаем соотношение, из которого в силу произвольности вариаций «обобщенных координат» следуют искомые зависимости.

§ 3. Обобщенные соотношения теории тонких и тонкостенных стержней[1]. Простейшая форма обобщенных соотношений Кирхгофа для первоначально прямолинейного и нескрученного стержня получается на основании сформулированной выше кинематической гипотезы и предположения о второстепенности напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy}.

Принимая эту гипотезу и используя закон Гука, имеем

$$\sigma_z = E\,[\varkappa_1 y - \varkappa_2 x + \varphi(x, y)\,\dot{\tau}]$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)\tau, \qquad \tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)\tau \tag{3.1}$$

Здесь мы положили, что $\sigma_z = E\varepsilon_z$, т. е. ограничились установлением связи между основным напряжением σ_z и основной деформацией ε_z.

[1] Краткое изложение результатов этого параграфа опубликовано [3].

Подставив (3.1) в (2.2), можно получить выражение потенциальной энергии стержня в виде

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L [E\Omega\varepsilon^2 + EI_x\varkappa_1{}^2 + EI_y\varkappa_2{}^2 + EI_\varphi\dot{\tau}^2 + 2EI_{\varphi x}\varkappa_1\dot{\tau} - $$

$$- 2EI_{\varphi y}\varkappa_2\dot{\tau} + 2EI_{\varphi 1}\varepsilon\dot{\tau} + \mu T\tau^2]\, dz \tag{3.2}$$

Здесь Ω — площадь поперечного сечения, I_x, I_y — моменты инерции, T — геометрическая жесткость при свободном кручении, величины $I_{\varphi 1}$, I_φ, $I_{\varphi x}$ и $I_{\varphi y}$ представляют собой геометрические характеристики определяемые формулами

$$\begin{aligned} I_{\varphi 1} &= \iint_\Omega \varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad & I_\varphi &= \iint_\Omega \varphi^2(x, y)\, dx\, dy \\ I_{\varphi x} &= \iint_\Omega y\,\varphi(x, y)\, dx\, dy, \qquad & I_{\varphi y} &= \iint_\Omega x\,\varphi(x, y)\, dx\, dy \end{aligned} \tag{3.3}$$

Интеграл I_φ введен Н. В. Зволинским [6] и вычислен им для эллипса, прямоугольника и равностороннего треугольника.

Составим теперь вариацию потенциальной энергии. Имеем

$$\delta\Pi = \int_0^L [E\Omega\varepsilon\,\delta\varepsilon + EI_x\varkappa_1\,\delta\varkappa_1 + EI_y\varkappa_2\,\delta\varkappa_2 + EI_\varphi\dot{\tau}\,\delta\dot{\tau} + EI_{\varphi x}\dot{\tau}\,\delta\varkappa_1$$

$$- EI_{\varphi y}\dot{\tau}\,\delta\varkappa_2 + EI_{\varphi 1}\dot{\tau}\,\delta\varepsilon + \mu T\tau\,\delta\tau + EI_{\varphi x}\varkappa_1\,\delta\dot{\tau} - EI_{\varphi y}\varkappa_2\,\delta\dot{\tau} + EI_{\varphi 1}\varepsilon\,\delta\dot{\tau}]\, dz$$

Интегрируя по частям члены, содержащие $\delta\dot{\tau}$, получим

$$\delta\Pi = \int_0^L \{[E\Omega\varepsilon + EI_{\varphi 1}\dot{\tau}]\,\delta\varepsilon + [EI_x\varkappa_1 + EI_{\varphi x}\dot{\tau}]\,\delta\varkappa_1 + \tag{3.4}$$

$$+ [EI_y\varkappa_2 - EI_{\varphi y}\dot{\tau}]\,\delta\varkappa_2 + [\mu T\tau - EI_\varphi\ddot{\tau} - EI_{\varphi x}\dot{\varkappa}_1 + EI_{\varphi y}\dot{\varkappa}_2 -$$

$$- EI_{\varphi 1}\dot{\varepsilon}]\,\delta\tau\}\, dz + [EI_\varphi\dot{\tau}\,\delta\tau + EI_{\varphi x}\varkappa_1\,\delta\tau - EI_{\varphi y}\varkappa_2\,\delta\tau + EI_{\varphi 1}\varepsilon\,\delta\tau]_0^L$$

Согласно сказанному выше $\delta\Pi = \delta A$. Приравнивая поэтому (3.4) и (2.1) и сравнивая коэффициенты при вариациях, приходим к обобщенным соотношениям Кирхгофа

$$M_x = EI_x\varkappa_1 + EI_{\varphi x}\dot{\tau}, \quad M_y = EI_y\varkappa_2 - EI_{\varphi y}\dot{\tau}, \quad V_z = E\Omega\varepsilon + EI_{\varphi 1}\dot{\tau}$$

$$M_z = \mu T\tau - EI_\varphi\ddot{\tau} - EI_{\varphi x}\dot{\varkappa}_1 + EI_{\varphi y}\dot{\varkappa}_2 - EI_{\varphi 1}\dot{\varepsilon} \tag{3.5}$$

и граничному условию на торце

$$[EI_\varphi\dot{\tau} + EI_{\varphi x}\varkappa_1 - EI_{\varphi y}\varkappa_2 + EI_{\varphi 1}\varepsilon]\,\delta\tau = 0 \tag{3.6}$$

Дополнительные по отношению к обычным члены в формулах (3.5) отвечают следующим явлениям, наблюдаемым у стержней с несимметричным профилем: 1) неравномерное закручивание вызывает изгиб, 2) неравномерный изгиб вызывает закручивание, 3) неравномерное удлинение вызывает кручение и 4) неравномерное кручение вызывает удлинение.

Дополнительный член в выражении для M_z, который сохраняется даже в случае стержней с симметричным поперечным сечением, обусловлен более строгим учетом распределенных по боковой поверхности стержня нагрузок и связан также с возможностью рассмотрения эффекта стеснения при кручении.

Интересную структуру имеет граничное условие (3.6). Из (3.6) следует, что при произвольном $\delta\tau$, т. е. в случае задания только суммарных сил и моментов на торце, должно выполняться условие

$$B_\varphi = EI_\varphi\dot{\tau} + EI_{\varphi x}\varkappa_1 - EI_{\varphi y}\varkappa_2 + EI_{\varphi 1}\varepsilon = 0$$

таким образом, на торце обращается в нуль величина B_φ, которую мы будем называть, следуя В. З. Власову, бимоментом. При других граничных условиях бимомент на торце отличен от нуля. В этих случаях выражение δA содержит дополнительный член, соответствующий работе напряжений, распределенных по торцу.

Понятие о бимоменте, не являющееся необходимым, все же весьма удобно, чем и объясняется его широкое распространение в литературе по теории тонкостенных стержней. Поэтому уместно заметить, что бимомент может быть введен и на более раннем этапе построения теории.

Записываем выражение (3.3) в виде

$$\delta\Pi = \int_0^L [V_z\delta\varepsilon + M_x\delta\varkappa_1 + M_y\delta\varkappa_2 + M_z{}^*\delta\tau + B_\varphi\delta\dot{\tau}]\,dz \tag{3.7}$$

где V_z, M_x, M_y связаны с кинематическими характеристиками прежними соотношениями, а величины $M_z{}^*$ и B_φ определяются формулами

$$M_z{}^* = \mu T\tau, \qquad B_\varphi = EI_\varphi\dot{\tau} + EI_{\varphi x}\varkappa_1 - EI_{\varphi y}\varkappa_2 + EI_{\varphi 1}\varepsilon \tag{3.8}$$

Из формулы (3.7) видно, что бимомент B_φ является обобщенной силой, отвечающей обобщенной координате $\dot{\tau}$, при этом $M_z{}^*$ есть обобщенная сила, соответствующая координате τ (при формальном рассмотрении τ и $\dot{\tau}$ в качестве независимых параметров).

Преобразуя (3.7) интегрированием по частям, имеем

$$\delta\Pi = \int_0^L [V_z\delta\varepsilon + M_x\delta\varkappa_1 + M_y\delta\varkappa_2 + (M_z{}^* - \dot{B}_\varphi)\,\delta\tau]\,dz + [B_\varphi\delta\tau]_0^L$$

т. е.

$$M_z = M_z{}^* - \frac{dB_\varphi}{dz} \tag{3.9}$$

что совпадает с соответствующей формулой (3.5).

§ 4. Определение положения центра жесткости. Рассмотрим задачу об изгибе консольного призматического стержня силами R_x и R_y, приложенными в точке торца $x = x_0$, $y = y_0$. Из уравнений равновесия стержня следует, что в проекциях на неподвижные оси

$$\begin{aligned} &V_x = R_x, && V_y = R_y, && V_z = 0 \\ &M_x = -R_y(L-z), && M_y = R_x(L-z), && M_z = x_0 R_y - y_0 R_x \end{aligned} \tag{4.1}$$

Подстановка (4.1) в обобщенные соотношения Кирхгофа дает

$$EI_x\varkappa_1 + EI_{\varphi x}\dot{\tau} = -R_y(L-z), \qquad EI_y\varkappa_2 - EI_{\varphi y}\dot{\tau} = R_x(L-z) \tag{4.2}$$

$$\mu T\tau - EI_\varphi\ddot{\tau} - EI_{\varphi x}\dot{\varkappa}_1 + EI_{\varphi y}\dot{\varkappa}_2 = x_0 R_y - y_0 R_x \tag{4.3}$$

Разрешая уравнения (4.2) относительно $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ и подставляя значения $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ в соотношение (4.3), получим дифференциальное уравнение для определения угла закручивания на единицу длины τ:

$$\mu T\tau - E\left(I_\varphi - \frac{I_{\varphi x}^2}{I_x} - \frac{I_{\varphi y}^2}{I_y}\right)\ddot{\tau} = \left(x_0 + \frac{I_{\varphi x}}{I_x}\right)R_y - \left(y_0 - \frac{I_{\varphi y}}{I_y}\right)R_x \tag{4.4}$$

Правая часть уравнения (4.4) обращается в нуль, если силы R_x и R_y приложены в точке с координатами

$$x_c = -\frac{I_{\varphi x}}{I_x}, \qquad y_c = \frac{I_{\varphi y}}{I_y} \tag{4.4}$$

В этом случае силы R_x и R_y не вызывают закручивания стержня. Иными словами, точка (x_c, y_c) является центром жесткости стержня. Существенно заметить, что для определения координат центра жесткости в рамках развиваемой здесь приближенной теории достаточно знать лишь решение задачи о свободном кручении профиля.

Напомним, что при точном решении задачи теории упругости для определения координат центра жесткости необходимо знать решение задачи об изгибе стержня. При вычислении координат центра жесткости

$$x_c = -\frac{1}{I_x}\iint_\Omega y\varphi\,dx\,dy, \qquad y_c = \frac{1}{I_y}\iint_\Omega x\varphi\,dx\,dy \tag{4.5}$$

надлежит помнить, что координаты x и y должно отсчитывать от центра тяжести профиля.

§ 5. Получение из общей теории частных формул. Переход от основных формул общей теории к классическим соотношениям теории Кирхгофа совершается путем отбрасывания членов, содержащих I_φ, $I_{\varphi 1}$, $I_{\varphi x}$, $I_{\varphi y}$; таким образом, обычная теория тонких стержней соответствует пренебрежению влиянием стесненности кручения и дополнительным влиянием распределенных вдоль стержня нагрузок.

Обратимся к получению основных формул теории В. З. Власова[1].

Для их вывода используем приближенное выражение функции кручения для тонкостенных стержней, которое может быть получено при рассмотрении криволинейного профиля как совокупности прямоугольных. Отнеся стержень к координатам s, n (где s — координата, отсчитываемая вдоль срединной линии профиля, а n — по нормали к ней) и решая дифференциальное уравнение кручения, имеем

$$\varphi(s, n) = -\omega(s) - n(xx' + yy') + \varphi_0 \tag{5.1}$$

Здесь $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения срединной линии профиля, $\omega(s)$ — секториальная площадь

$$\omega(s) = \int_0^s (xy' - yx')\, ds$$

Ограничиваясь задачей о кручении стержней, определим постоянную φ_0 из условия

$$\iint_\Omega \sigma_z\, dx\, dy = 0 \tag{5.2}$$

Тогда

$$\iint_\Omega \sigma_z\, dx\, dy = E\dot{\tau} \iint_\Omega \varphi(s, n)\left(1 - \frac{n}{\rho}\right) ds\, dn = 0$$

Отсюда с точностью до членов порядка n/ρ, где ρ—радиус кривизны срединной линии, имеем

$$\varphi_0 = \frac{1}{\Omega} \int_0^l \omega(s)\, h(s)\, ds \tag{5.3}$$

где Ω — площадь профиля, l — длина срединной линии профиля.

Введем главную секториальную площадь

$$\omega^*(s) = \omega(s) - \frac{1}{\Omega} \int_0^l \omega(s)\, h(s)\, ds$$

Выразим теперь $\varphi(s, n)$ через $\omega^*(s)$:

$$\varphi(s, n) = -\omega^*(s) - n(xx' + yy') \qquad (x' = dx/ds) \tag{5.4}$$

и перейдем к вычислению дополнительных интегральных характеристик I_φ, $I_{\varphi x}$, $I_{\varphi y}$. Подставляя (5.4) в выражение (3.3) для I_φ, имеем

$$I_\varphi = \int_0^l \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} [\omega^*(s) + n(xx' + yy')]^2\, ds\, dn$$

т. е.

$$I_\varphi = \int_0^l \omega^{*2}(s)\, h(s)\, ds + \frac{1}{12} \int_0^l (xx' + yy')\, h^3(s)\, ds$$

Отбрасывая второй интеграл как величину, имеющую более высокий порядок малости, получаем

$$I_\varphi = \int_0^l \omega^{*2}(s)\, h(s)\, ds \tag{5.5}$$

что совпадает с данным В. З. Власовым выражением секториального момента инерции I_ω.

Таблица 1

Общая теория сплошных тонких и тонкостенных стержней	Теория тонкостенных стержней с открытым профилем В. З. Власова	Теория тонкостенных стержней с закрытым профилем А. А. Уманского
$\tau(z)$	$\tau(z)$	$\tau(z)$
$\varphi(x, y)$	$-\omega^*(s)$	$-\omega^\circ(s)$
$w = \varphi(x, y)\tau$	$w = -\omega^*(s)\tau$	$w = -\omega^\circ(s)\tau$
$\sigma_z = E\varphi(x, y)\dot{\tau}$	$\sigma_z = -E\omega^*(s)\dot{\tau}$	$\sigma_z = -E\omega^\circ(s)\dot{\tau}$
$I_\varphi = \iint\limits_\Omega \varphi^2(x, y)\, dx\, dy$	$I_\omega{}^* = \int_0^l \omega^{*2}(s)\, h(s)\, ds$	$I_\omega{}^\circ = \oint \omega^{\circ 2}(s)\, h(s)\, ds$
$I_{\varphi x} = \iint\limits_\Omega y\varphi(x, y)\, dx\, dy$	$I_{\omega x}{}^* = \int_0^l y\omega^*(s)\, h(s)\, ds$	$I_{\omega x}{}^\circ = \oint y\omega^\circ(s)\, h(s)\, ds$
$I_{\varphi y} = \iint\limits_\Omega x\varphi(x, y)\, dx\, dy$	$I_{\omega y} = \int_0^l x\omega^*(s)\, h(s)\, ds$	$I_{\omega y}{}^\circ = \oint x\omega^\circ(s)\, h(s)\, ds$
$\mu T\tau - EI_\varphi\ddot{\tau} = M_z$	$\mu T\tau - EI_\omega{}^*\ddot{\tau} = M_z$	$\mu T\tau - EI_\omega{}^\circ\ddot{\tau} = M_z$
$B_\varphi = EI_\varphi\dot{\tau}$	$B_\omega = -EI_\omega{}^*\dot{\tau}$	$B_\omega = -EI_\omega{}^\circ\dot{\tau}$
$\ddot{B}_\varphi - \frac{\mu T}{EI_\varphi} B_\varphi = -\frac{dM_z}{dz}$	$\ddot{B}_\omega - \frac{\mu T}{EI_\omega{}^*} B_\omega = -\frac{dM_z}{dz}$	$\ddot{B}_\omega - \frac{\mu T}{EI_\omega{}^\circ} = -\frac{dM_z}{dz}$
$x_c = -\frac{I_{\varphi x}}{I_x}$	$x_c = \frac{I_{\omega x}{}^*}{I_x}$	$x_c = \frac{I_{\omega x}{}^\circ}{I_x}$
$y_c = \frac{I_{\varphi y}}{I_y}$	$y_c = -\frac{I_{\omega x}{}^*}{I_y}$	$y_c = -\frac{I_{\omega y}{}^\circ}{I_y}$

Таким образом, показано, что характеристика I_φ является обобщением понятия о секториальном моменте инерции.

Внося (5.5) в (3.7), приходим к основной формуле теории В. З. Власова[1]:

$$M_z = \mu T\tau - I_\omega\ddot{\tau} \tag{5.6}$$

[1] Для простоты в этом параграфе при выводе некоторых формул предполагается, что стержень имеет две оси симметрии.

Вычислим интегралы $I_{\varphi x}$ и $I_{\varphi y}$. Имеем

$$I_{\varphi x} = \iint\limits_{\Omega} y\varphi(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} (y + nx')\,\varphi(s, n)\left(1 - \frac{n}{\rho}\right) ds\,dn$$

$$I_{\varphi y} = \iint\limits_{\Omega} x\varphi(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Omega} (x - ny')\,\varphi(s, n)\left(1 - \frac{n}{\rho}\right) ds\,dn$$

где ρ — радиус кривизны срединной линии.

Подстановка в эти выражения значения $\varphi(s, n)$ после отбрасывания членов порядка h^3 по сравнению с членами порядка h дает

$$I_{\varphi x} = -\int\limits_0^l y\omega^*(s)\,h(s)\,ds, \qquad I_{\varphi y} = -\int\limits_0^l x\omega^*(s)\,h(s)\,ds \tag{5.7}$$

Тогда приближенные выражения координат центра жесткости будут

$$x_c = \frac{1}{I_x}\int\limits_0^l y\omega^*(s)\,h(s)\,ds, \qquad y_c = -\frac{1}{I_y}\int\limits_0^l x\omega^*(s)\,h(s)\,ds$$

Эти формулы также совпадают с соответствующими соотношениями теории В. З. Власова.

Аналогичным образом могут быть получены и приближенные формулы в случае тонкостенных стержней с закрытым профилем. Действительно, определяя постоянную φ_0 в выражении функции напряжений $\varphi(s, n)$ для закрытых профилей

$$\varphi(s, n) = -\omega(s) + \frac{s}{l}\,\omega(l) - n(xx' + yy') + \varphi_0 \tag{5.8}$$

из условия (5.2), имеем

$$\varphi_0 = \frac{1}{\Omega}\left(\oint \omega(s)\,h(s)\,ds - \frac{\omega(l)}{l}\oint s\,h(s)\,ds\right)$$

Введение главной секториальной площади $\omega^\circ(s)$ позволяет записать (5.8) в форме

$$\varphi(s, n) = -\omega^\circ(s) - n(xx' + yy') \tag{5.9}$$

Тогда с той же степенью точности, что и в случае открытых профилей, имеем

$$I_\varphi{}^\circ = \oint \omega^{\circ 2}(s)\,h(s)\,ds \tag{5.10}$$

$$x_c{}^\circ = \frac{1}{I_x}\oint y\,\omega^\circ(s)\,h(s)\,ds, \qquad y_c{}^\circ = -\frac{1}{I_y}\oint x\,\omega^\circ(s)\,h(s)\,ds \tag{5.11}$$

и формула (3.7) для M_z примет вид:

$$M_z = \mu T\tau - EI_\varphi\ddot{\tau} \tag{5.12}$$

Формулы (5.10) и (5.11) совпадают с соотношениями, предложенными А. А. Уманским в теории тонкостенных стержней с закрытым профилем. Правда, они соответствуют лишь так называемому первому варианту теории А. А. Уманского. Второй (уточненный) вариант теории А. А. Уманского является частным случаем более общей теории, нежели здесь развитая, именно теории, основанной на кинематической гипотезе, содержащей две неизвестные функции $\tau(z)$ и $\zeta(z)$.

На соответствующих вычислениях мы останавливаться не будем.

Сравнение дифференциальных уравнений кручения общей теории тонких и тонкостенных стержней с соответствующими формулами теорий тонкостенных стержней позволяет установить далеко идущую аналогию между ними. Эта аналогия становится совершенно ясной из приводимого в табл. 1 сопоставления формул указанных теорий. Аналогия распространяется и на граничные условия и позволяет при соответствующей замене величин перенести результаты, полученные для тонкостенных стержней, в общую теорию тонких и тонкостенных стержней. Поэтому мы можем отказаться от подробного рассмотрения частных задач и отослать читателя к монографии [4].

§ 6. Свободные изгибно-крутильные колебания стержней. Существенной особенностью общей теории тонких и тонкостенных стержней является то обстоятельство, что точность определения координат центра жесткости адэкватна точности соотношений, связывающих усилия и моменты с кинематическими характеристиками.

Поэтому, например, в рамках общей теории могут быть получены уравнения изгибно-крутильных колебаний стержней, в которых точность определения координат центра жесткости будет соответствовать точности самих уравнений. Кроме того, эти уравнения будут отличаться от обычных наличием дополнительных членов, соответствующих стесненности кручения и дополнительному учету влияния распределенных вдоль стержня нагрузок.

Остановимся вкратце на выводе подобной системы уравнений. Применим для этой цели принцип Остроградского-Гамильтона. В наших обозначениях выражение для кинетической энергии будет иметь вид:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + J\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right)^2\right\} dz \tag{6.1}$$

где ρ — линейная плотность; J — момент инерции сечения относительно оси z; u, v — перемещения по осям x и y соответственно; ϑ — угол поворота сечения, т. е. $\partial\vartheta / \partial z = \tau$.

Для потенциальной энергии рассматриваемого стержня согласно формуле (3.2) имеем

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{EI_y\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)^2 + EI_x\left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)^2 + EI_\varphi\left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2EI_{\varphi x}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - 2EI_{\varphi y}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + \mu T\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)^2\right\} dz \tag{6.2}$$

Подставляя (6.1) и (6.2) в выражение принципа Остроградского-Гамильтона, получаем

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi)\, dz = 0$$

Варьируя полученное выражение и полагая для простоты вычислений $u = 0$ (это соответствует выделению поперечных колебаний вдоль оси y), имеем

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \Big\{ \rho \frac{\partial v}{\partial t}\, \delta \frac{\partial v}{\partial t} + J \frac{\partial \vartheta}{\partial t}\, \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\, \delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - EI_\varphi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\, \delta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} +$$

$$+ EI_{\varphi x} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\, \delta \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + EI_{\varphi x} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}\, \delta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \mu T \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\, \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big\} dz\, dt = 0 \qquad (6.3)$$

Преобразуя (6.3) интегрированием по частям, приходим к выражению, из которого в силу произвольности вариаций следуют искомые уравнения изгибно-крутильных колебаний

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI_x \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - EI_{\varphi x} \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z^4} = 0 \qquad (6.4)$$

$$J \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \mu T \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - EI_{\varphi x} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + EI_\varphi \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z^4} = 0 \qquad (6.5)$$

и граничные условия к ним

$$\left| - \frac{\partial}{\partial z}\left(EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(EI_{\varphi x} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right| \delta v = 0$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu T \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(EI_\varphi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(EI_{\varphi x} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right| \delta \vartheta = 0$$

$$\left| EI_x \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - EI_{\varphi x} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right| \delta \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad (6.6)$$

$$\left| EI_\varphi \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - EI_{\varphi x} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right| \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0$$

Уравнения (6.4) и (6.5) отличаются от обычно применяемых не только своей структурой, но и выбором переменных.

Именно, в обычных уравнениях в качестве неизвестной функции фигурирует перемещение v_0 центра жесткости, а не перемещение центра тяжести v, как это имеет место в уравнениях (6.4) и (6.5).

Связь между v и v_0 дается формулой

$$v = v_0 - \vartheta x_c$$

где x_c — координата центра жесткости. Замена v на v_0 в уравнениях (6.4) и (6.5) приводит к системе, которая после преобразований и использования соотношения $x_c = -I_{\varphi x} / I_x$ принимает вид:

$$\rho \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - \rho x_c \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} + EI_x \frac{\partial^4 v_0}{\partial z^4} = 0 \tag{6.7}$$

$$J_m \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} - \mu T \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \rho x_c \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + E[I_\varphi - x_c^2 I_x] \frac{\partial^4 \vartheta}{\partial z^4} = 0 \tag{6.8}$$

где $J_m = J + \rho x_c^2$ — момент инерции поперечного сечения относительно оси, проходящей через центр жесткости параллельно оси z.

Уравнение (6.7) полностью совпадает с классическим, а уравнение (6.8) отличается дополнительным членом, содержащим $\partial^4 \vartheta / \partial z^4$.

В заключение приводим граничные условия в переменных v_0 и v:

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(EI_x \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2}\right)(\delta v_0 - x_c \delta \vartheta) = 0 \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu T \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left[E(I_\varphi - x_c^2 I_x) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(EI_x x_c \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2}\right)\right] \Bigg| \delta\vartheta = 0 \tag{6.10}$$

$$EI_x \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \delta \left[\frac{\partial v_0}{\partial z} - x_c \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right] = 0 \tag{6.11}$$

$$\left| E(I_\varphi - x_c^2 I_x) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} + EI_x x_c \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} \right| \delta \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 \tag{6.12}$$

Решение системы (6.7), (6.8) при граничных условиях (6.9)—(6.12) выполняется обычными точными или приближенными методами.

Поступила в редакцию
10 X 1949

Ленинградский политехнический
институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат. 1940.
2. Гильман Л. С., Голушкевич С. С. Кручение призматических стержней парами, распределенными по их длине. Труды Высшего инженерно-технического училища ВМФ. 1943. № 4. Стр. 81—94.
3. Джанелидзе Г. Ю. Обобщенные зависимости теории тонких стержней. ДАН. 1949. Т. LXVI. № 4.
4. Джанелидзе Г. Ю., Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. ГТТИ. 1948.
5. Зволинский Н. В. Приближенное решение задачи кручения упругого цилиндрического бруса с одним неизменяемым сечением. Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1939. № 8.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. ГТТИ. 1948.
7. Уманский А. А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета. Техника воздушного флота. 1940. № 12.
8. Уманский А. А. Расчет тонкостенных криволинейных балок. Труды Научно-технической конференции ВВА им. Жуковского. 1944. Вып. 2.