Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

О ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ

А. Л. Гольденвейзер
(Москва)

Тонкостные стержни открытого профиля, деформируясь под нагрузкой, не всегда подчиняются тем закономерностям, которые были установлены для сплошных и замкнутых стержней. Поэтому в последние годы возникла практически важная задача о создании приемлемой теории тонкостенных стержней, в решении которой основные успехи были достигнуты в Советском Союзе (В. З. Власов).

Этому вопросу посвящена и предлагаемая статья, которая отличается от предшествующих работ тем, что в ней теория тонкостенных стержней строится без использования специальных гипотез на основе качественного анализа интегралов уравнений теории оболочек. Целью исследования является приближенное определение основного напряженного состояния в стержне, загруженном в пролете поперечной нагрузкой R и системой сил и моментов T, приложенных к концевым поперечным сечениям. Предполагается, что концевые сечения стержня закреплены произвольным образом, а продольные края свободны от связей.

Употребляя термин «основное напряженное состояние», мы хотим сказать, что нас не интересуют местные напряженные состояния, возникающие у поперечных краев и затухающие при удалении от них. Это предположение лежит и в основе теории сплошных стержней, однако в тонкостенных стержнях оно приводит к более существенному отклонению от истины, так как затухание местных напряжений тем медленнее, чем меньше толщина стенок стержня.

Стержень рассматривается как длинная цилиндрическая оболочка произвольного очертания, толщина которой может меняться в поперечном направлении. Поперечная нагрузка R считается произвольной, но сохраняющей подобие во всех поперечных сечениях, а краевые силы и моменты T заменяются надлежащим образом распределенными нормальными и сдвигающими усилиями.

Ставится задача: из общей совокупности интегралов полной системы уравнений оболочки выделить все такие интегралы, которые соответствуют основным напряженным состояниям стержней.

Прежде всего исследуется частный интеграл и показывается, что поперечная нагрузка в том и только в том случае, если она линейно меняется по длине оболочки-стержня, может быть представлена в виде двух слагаемых ($R = R_1 + R_2$) таким образом, что для каждого из них в отдельности приближенное значение частного интеграла может быть найдено элементарным путем. При этом R_1 — часть общей нагрузки, статически эквивалентная в каждом поперечном сечении всей нагрузке R,— дает частный интеграл, при котором на продольных сечениях будут возникать только сдвигающие напряжения, а R_2 — оставшаяся статически самоуравновешенная в каждом сечении часть нагрузки — дает частный интеграл, в котором основную роль играют нормальные и перерезывающие напряжения в продольных сечениях.

Далее ищутся все такие частные интегралы однородной системы в которых:

(а) поперечные усилия и моменты на продольных краях могут с достаточной точностью считаться равными нулю;

б) интенсивность напряжений в поперечных сечениях затухает существенно медленнее, чем в других частных интегралах.

Класс таких особенно медленно затухающих напряженных состояний оказывается шире того, который вытекает из принципа Сен-Венана: добавляется статически самоуравновешенное решение, в котором нормальные напряжения в поперечном сечении распределяются по закону секториальной площади. Это напряженное состояние не успевает затухнуть в не слишком длинной оболочке-стержне и должно поэтому считаться основным. Именно наличием этого напряженного состояния открытые стержни и отличаются от сплошных и замкнутых. Однако, когда длина оболочки-стержня превосходит некоторый предел, тонкостенный стержень по характеру основного напряженного состояния перестает отличаться от сплошного, хотя между ними, разумеется, сохраняется различие в характере и скорости затухания местных напряженных состояний.

Эти соображения заставляют наложить ограничения на верхний предел длины тонкостенного стержня, если мы хотим его рассматривать как конструкцию, работающую принципиально отлично от сплошного стержня. Малая скорость затухания местных напряженных состояний заставляет существенно ограничить и нижний предел длины стержня-оболочки: длина должна быть достаточной для того, чтобы местные напряжения в должной степени затухали у средних сечений.

Считая, что оба эти ограничения выполняются и что поперечная нагрузка R меняется в продольном направлении по линейному закону, можно построить теорию расчета тонкостенных стержней, полагая, что их основное напряженное состояние описывается с известной точностью линейной комбинацией частного интеграла неоднородной системы уравнений оболочки-стержня и особенно медленно затухающих решений однородных уравнений. При этом граничные условия на поперечных краях оболочки-стержня не могут ставиться в каждой точке и должны быть заменены интегральными условиями. Вытекающий из такого подхода метод расчета для коротких стержней приводит к практически приемлемым формулам. Стержни средней длины, занимающие по характеру своей работы промежуточное положение между короткими и длинными стержнями (последние изучения не требуют, так как могут рассматриваться как сплошные), до конца исследовать не удалось.

Метод расчета коротких тонкостенных стержней, полученный таким образом, оказался сложнее того, к которому пришел В. З. Власов [1]. Эти два метода значительно сближаются, если предлагаемые здесь уравнения упростить, отбросив слагаемые, учитывающие влияние сдвига. Однако и при этом совпадение расчетных соотношений оказывается неполным. Конкретнее: не находит подтверждения уравнение, определяющее в теории В. З. Власова кручение тонкостенного стержня.

Что касается такого основного для теории В. З. Власова предположения, что поперечные сечения стержня сохраняют свою форму, то само по себе оно неверно. В этой гипотезе нет и необходимости. Однако принятие ее не вызывает ошибок в подсчете напряжений, так как на основное напряженное состояние оказывают влияние лишь те деформации, при которых поперечное сечение не меняется.

Отметим в заключение, что в Советском Союзе (А. Р. Ададуров) и позднее за границей (Карман) разрабатывалась теория расчета цилиндрических оболочек, поперечный контур которых не может деформироваться вследствие наличия большого количества диафрагм. Такую конструкцию следует отличать от тонкостенного стержня. Поэтому с нашей точки зрения нельзя согласиться с Г. Ю. Джанелидзе и Я. Г. Пановко [2], которые считают теорию А. Р. Ададурова обобщением теории В. З. Власова на том основании, что А. Р. Ададуров отбросил гипотезу об отсутствии сдвигов. Теория тонкостенных стержней принципиально отлична от теории оболочек с поперечными усилениями потому, что для первых ищется только основное напряженное состояние, а для вторых необходимо исследовать и местные напряженные состояния. Именно вследствие этого, а не потому, что отбрасывается гипотеза об отсутствии сдвигов, в теории оболочек с диафрагмами условия на поперечных краях ставятся в каждой точке. В предлагаемой работе даются формулы для расчета тонкостенных стержней с учетом деформаций сдвига. Однако они в силу вышесказанного не совпадают с результатами А. Р. Ададурова.

§ 1. Исходные уравнения. Отнесем срединную поверхность оболочки к линиям кривизны и введем безразмерные параметры

$$\alpha = \frac{\xi}{r}, \qquad \beta = \frac{s}{r}$$

где ξ — расстояние по образующей, s — расстояние по направляющей кривой, r — средний радиус кривизны поперечного сечения цилиндра.

Тогда полную систему уравнений, определяющую упругое равновесие оболочки, можно в обозначениях Лява[3] записать так:

А. *Уравнения равновесия*

$$\frac{\partial T_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial S_2}{\partial \beta} + rX = 0, \qquad \frac{\partial G_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_2}{\partial \beta} - rN_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(S_1 + \frac{H_2}{rR}\right) + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} - \left(\frac{N_2}{R} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{H_2}{rR}\right) + rY = 0, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} - \frac{\partial G_2}{\partial \beta} + rN_2 = 0$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{\partial N_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} + rZ = 0, \qquad S_1 + S_2 + \frac{H_2}{rR} = 0$$

где R — безразмерная величина, равная отношению радиуса кривизны поперечного сечения R_2 к его среднему значению r. (Для удобства изложения в этих соотношениях второе уравнение представлено в необычном виде путем формального введения крутящего момента H_2.)

Б. *Уравнения неразрывности деформаций*

$$\frac{\partial \varkappa_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 0, \qquad -\frac{\partial \tau}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varkappa_1}{\partial \beta} - \left(\frac{\zeta_1}{R} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma}{2rR}\right) = 0, \qquad \frac{\varkappa_1}{R} - \frac{\partial \zeta_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma}{2} + r\zeta_2 = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma}{2} - \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + r\zeta_1 = 0$$

(Деформацию сдвига мы, отступая от Лява, записываем через γ).

Здесь число уравнений неразрывности путем введения величин ζ_1, ζ_2 увеличено до пяти, хотя в действительности их должно быть три, так как они вытекают из уравнений Кодацци-Гаусса. Эти соотношения приводятся к обычной форме, если исключить ζ_1 и ζ_2 из первых трех равенств при помощи последних двух. Именно в таком виде вариацией соотношений Кодацци-Гаусса они и были выведены нами впервые для общего случая[4].

В. *Соотношения упругости*

$$2Eh\eta\varepsilon_1 = T_1 - \sigma T_2, \qquad 2Eh\eta\varepsilon_2 = T_2 - \sigma T_1 \tag{1.1}$$

$$2Eh\eta\frac{\gamma}{2} = -(1+\sigma)S_2 \tag{1.2}$$

$$G_1 = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}2Eh\eta^3(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \qquad G_2 = -\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)}2Eh\eta^3(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) \tag{1.3}$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{h^2}{3(1+\sigma)}2Eh\eta^3\tau \tag{1.4}$$

Здесь через $2h\eta(\beta)$ обозначена переменная толщина стенки оболочки, причем $2h$ — константа, равная средней толщине.

В соотношениях упругости не фигурирует усилие S_1; предполагается, что оно связано с S_2 и H_2 шестым уравнением равновесия.

Г. *Геометрические соотношения*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R}\right), \qquad \gamma = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) \tag{1.5}$$

$$\varkappa_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{v}{R}\right), \qquad \tau = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R}\right) \tag{1.6}$$

§ 2. Вспомогательные соотношения. Чтобы в дальнейшем не прерывать изложения, приведем некоторые преобразования.

1. Если считать известными компоненты тангенциальной деформации ε_1, ε_2, γ, то не представляет труда определить усилия, моменты и компоненты изгибной деформации $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ: с помощью трех последних уравнений равновесия, уравнений неразрывности и соотношений упругости получим

$$T_1 = \frac{2Eh\eta}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{2Eh\eta}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \qquad S_2 = -\frac{2Eh\eta}{(1+\sigma)}\frac{\gamma}{2}$$

$$r\varkappa_1 = R\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma}{2} - \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha}\right) - R\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$r\tau = -\int L\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta}\right)d\alpha + L(\gamma) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}R\varepsilon_2$$

$$r\varkappa_2 = -\int d\alpha \int \frac{\partial}{\partial \beta}L\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta}\right)d\alpha + \int \frac{\partial}{\partial \beta}L(\gamma)\,d\alpha - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}R\varepsilon_2$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}G_1 = &-\frac{h^2\eta^3}{3(1-\sigma^2)r^2}\left\{R\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma^*}{2} - \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial \alpha}\right) - R\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma^*}{2}\right) + \right.\\ &\left. + \sigma\left[-\int d\alpha \int \frac{\partial}{\partial \beta}L\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta}\right)d\alpha + \int \frac{\partial}{\partial \beta}L(\gamma^*)\,d\alpha - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}R\varepsilon_2^*\right]\right\}\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}G_2 = &-\frac{h^2\eta^3}{3(1-\sigma^2)r^2}\left\{\left[-\int d\alpha \int \frac{\partial}{\partial \beta}L\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta}\right)d\alpha + \int \frac{\partial}{\partial \beta}L(\gamma^*)\,d\alpha - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}R\varepsilon_2^*\right] + \right.\\ &\left. + \sigma\left[R\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma^*}{2} - \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial \alpha}\right) - R\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma^*}{2}\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r}H_1 = -\frac{1}{r}H_2 = \frac{h^2\eta^3}{3(1+\sigma)r^2}\left\{-\int L\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta}\right)d\alpha + L(\gamma^*) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \beta}R\varepsilon_2^*\right\}$$

$$\begin{aligned}N_1 = &-\frac{h^2\eta^3}{3(1-\sigma^2)r^2}\left\{R\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma^*}{2} - \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial \alpha}\right) - R\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta}\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma^*}{2}\right) + \right.\\ &\left. + \left[-\int \frac{\partial}{\partial \beta}L\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta}\right)d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta}L(\gamma^*) - \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \beta^2}R\varepsilon_2^*\right]\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_2 = &-\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\left\{\left[-\int d\alpha \int \frac{\partial}{\partial \beta}\eta^3\frac{\partial}{\partial \beta}L\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta}\right)d\alpha + \int \frac{\partial}{\partial \beta}\eta^3\frac{\partial}{\partial \beta}L(\gamma^*)\,d\alpha - \right.\right.\\ &- \frac{\partial}{\partial \beta}\eta^3\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}R\varepsilon_2^*\Big] + \sigma\frac{\partial}{\partial \beta}\eta^3\left[R\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma^*}{2} - \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial \alpha}\right) - R\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{\gamma^*}{2}\right)\right] + \\ &\left. + \eta^3(1-\sigma)\left[-L\left(\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha}L(\gamma^*) - \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\frac{\partial}{\partial \beta}R\varepsilon_2^*\right]\right\}\end{aligned}$$

В формулах (2·1) для сокращения письма положено

$$\varepsilon_1{}^* = 2Eh\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2{}^* = 2Eh\varepsilon_2, \qquad \gamma^* = 2Eh\gamma \tag{2.2}$$

а под L подразумевается линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial\beta} R \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{R} \tag{2.3}$$

2. В дальнейшем большую роль будет играть линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\beta} L\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}\right) = 0 \tag{2.4}$$

где L определяется равенством (2.3). Решение уравнения (2.4) основано на том, что если в операторе L произвести замену независимых переменных по формуле

$$d\chi = \frac{d\beta}{R}$$

то он примет вид:

$$L = \frac{1}{R}\left(\frac{d^2}{d\chi^2} + 1\right) \tag{2.5}$$

Поэтому общий интеграл (2.4) будет

$$p(\alpha, \beta) = A_1(\alpha) + A_2(\alpha)\frac{x}{r} + A_3(\alpha)\frac{y}{r} + A_4(\alpha)\frac{\omega}{r^2} \tag{2.6}$$

где

$$x = r\int \cos\chi\, d\beta, \qquad y = r\int \sin\chi\, d\beta, \qquad \omega = r\int (x\sin\chi - y\cos\chi)\, d\beta$$

и A_1, A_2, A_3, A_4 — произвольные функции интегрирования. Геометрический смысл величин χ, x, y, ω очевиден. Отнесем поперечное сечение оболочки к декартовой системе координат $0XY$; тогда под χ можно подразумевать угол между касательной к контуру поперечного сечения и осью X; x и y будут равны абсциссе и ординате рассматриваемой точки поперечного сечения оболочки, а ω представляет собой так называемую секториальную площадь, т. е. площадь сектора, ограниченного контуром поперечного сечения и двумя лучами, выходящими из произвольной точки, взятой вне контура (секториальный центр). Эти две прямые определяют на контуре поперечного сечения две точки, одну из которых (начало отсчета) можно выбирать произвольно.

Введем обозначения

$$\begin{gathered}
2hr\int_0^{\beta_0} x\eta\, d\beta = S_y, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} y\eta\, d\beta = S_x, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} \omega\eta\, d\beta = S_\omega \\
2hr\int_0^{\beta_0} x^2\eta\, d\beta = I_y, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} y^2\eta\, d\beta = I_x \\
2hr\int_0^{\beta_0} \eta\, d\beta = F, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} \omega^2\eta\, d\beta = I_\omega \\
2hr\int_0^{\beta_0} xy\eta\, d\beta = I_{xy}, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} x\omega\eta\, d\beta = I_{x\omega}, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} y\omega\eta\, d\beta = I_{y\omega}
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь и в дальнейшем $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$ — уравнения двух прямолинейных краев оболочки.

Физический смысл введенных величин таков: F — площадь поперечного сечения оболочки, S_x, S_y, S_ω — статические моменты относительно осей X и Y и секториальный статический момент, I_x, I_y, I_ω — моменты инерции относительно осей X и Y — и секториальный момент инерции, I_{xy} — полярный момент инерции относительно осей XY; величинам $I_{x\omega}$, $I_{y\omega}$ нет необходимости давать специальные названия; для нас существенно только то, что они при некоторых обстоятельствах обращаются в нули.

Переносу начала координат и повороту осей декартовой системы координат, а также замене секториального центра и начала отсчета секториальных площадей соответствуют различные замены произвольных функций интегрирования A_1, A_2, A_3, A_4 в (2.6). Этим можно воспользоваться, чтобы преобразовать нужным образом решение (2.6).

Дальнейшие формулы приобретают наиболее компактный вид, если мы будем считать, что: (а) начало координат $0XY$ совмещено с центром тяжести поперечного сечения оболочки; б) оси координат совпадают с главными направлениями поперечных сечений; в) в качестве секториального центра выбран центр изгиба; г) начало отсчета секториальных площадей совпадает с секториальной нулевой точкой.

Из условий (а) и (б) вытекают известные соотношения:

$$S_x = S_y = I_{xy} = 0 \tag{2.8}$$

Условия (в) и (г), как показано в монографии [1], эквивалентны соотношениям

$$I_{x\omega} = I_{y\omega} = S_\omega = 0 \tag{2.9}$$

Если формулы (2.8) и (2.9) записать в развернутом виде, то получим

$$\begin{gathered}\int_0^{\beta_0} x\eta\, d\beta = \int_0^{\beta_0} y\eta\, d\beta = \int_0^{\beta_0} \omega\eta\, d\beta = 0 \\ \int_0^{\beta_0} xy\eta\, d\beta = \int_0^{\beta_0} x\omega\eta\, d\beta = \int_0^{\beta_0} y\omega\eta\, d\beta = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

Это значит, что выбранная таким образом форма интеграла (2.6) характеризуется тем, что она является линейной комбинацией четырех частных интегралов 1, x, y, ω, обладающих свойством взаимной ортогональности с весом η.

3. Рассмотрим задачу о разыскании таких напряженных состояний цилиндрической оболочки, в которых усилия, моменты и деформации зависят только от переменной β. Отбрасывая в уравнениях равновесия и неразрывности деформации члены, содержащие производные по α, и присоединяя к полученным равенствам соотношения упругости, получим систему, которую, соответствующим образом сгруппировав

уравнения, можно записать так:

$$\frac{\partial T_2}{\partial \beta} - \frac{N_2}{R} = -rY, \qquad \frac{T_2}{R} + \frac{\partial N_2}{\partial \beta} = -rZ, \qquad -\frac{\partial G_2}{\partial \beta} + rN_2 = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \beta} - \frac{\zeta_1}{R} = 0, \qquad \frac{\varkappa_1}{R} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} = 0, \qquad -\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} + r\zeta_1 = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial \beta} = rX \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial \beta} = 0 \tag{2.14}$$

$$T_1 = \frac{2\,Eh\eta}{1-\sigma^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2), \qquad T_2 = \frac{2\,Eh\eta}{1-\sigma^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1), \qquad 2\,Eh\eta\frac{\gamma}{2} = -(1+\sigma)\,S_2$$

$$G_1 = -\frac{2\,Eh^3\eta^3}{3\,(1-\sigma^2)}(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2), \qquad G_2 = -\frac{2\,Eh^3\eta^3}{3\,(1-\sigma^2)}(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) \tag{2.15}$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{2\,Eh^3\eta^3}{3\,(1+\sigma)}\,\tau$$

$$S_1 + S_2 = -\frac{H_2}{rR}, \qquad N_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial \beta}, \qquad \zeta_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{\gamma}{2}$$

Интегрирование полной системы уравнений в данном случае естественным образом разбивается на интегрирование подсистем (2.11), (2.12), (2.13), (2.14), которыми определяются величины (T_2, N_2, G_2), ($\varkappa_1$, ε_1, ζ_1), S_2, τ. Остальные неизвестные находятся при помощи (2.15), причем к интегрированию прибегать уже не приходится.

Уравнения (2.11) имеют простой физический смысл. Они представляют собой статические уравнения арки единичной ширины, вырезанной из оболочки двумя поперечными сечениями.

Исключением усилий T_2 и N_2 из этой системы получим уравнение

$$L\left(\frac{\partial G_2}{\partial \beta}\right) + r^2\left(\frac{\partial RZ}{\partial \beta} - Y\right) = 0$$

вопросы интегрирования которого рассмотрены выше. Таким образом,

$$G_2 = A_1 + A_2\frac{x}{r} + A_3\frac{y}{r} + G_2{}^*, \qquad N_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial G_2}{\partial \beta} = A_2\frac{\cos\chi}{r} + A_3\frac{\sin\chi}{r} + N_2{}^*$$

$$T_2 = -R\frac{\partial N_2}{\partial \beta} - rRZ = A_2\frac{\sin\chi}{r} - A_3\frac{\cos\chi}{r} + T_2{}^* \tag{2.16}$$

где $G_2{}^*$, $T_2{}^*$, $N^*{}_2$ — частные интегралы системы (2.11).

Структура левых частей уравнений (2.12) в точности повторяет структуру левых частей уравнений (2.11). Поэтому по аналогии имеем

$$\varepsilon_1 = B_1 + B_2\frac{x}{r} + B_3\frac{y}{r}, \qquad \zeta_1 = B_2\frac{\cos\chi}{r} + B_3\frac{\sin\chi}{r}, \; \varkappa_1 = B_2\frac{\sin\chi}{r} - B_3\frac{\cos\chi}{r} \tag{2.17}$$

Уравнения (2.13) и (2.14) дают

$$S_2 = r\int X\,d\beta + C_1, \qquad \tau = C_2$$

Остальные неизвестные определяются из (2.15) без интегрирований, так что полное решение зависит от восьми постоянных.

§ 3. Частный интеграл, обусловленный поперечной нагрузкой. Пусть на оболочку-стержень действует поперечная нагрузка R, остающаяся подобной самой себе во всех поперечных сечениях, так что ее компоненты имеют вид:

$$X = 0, \qquad Y = \xi(\alpha)\, p(\beta), \qquad Z = \xi(\alpha)\, q(\beta) \tag{3.1}$$

(p и q представляют собой компоненты внешней нагрузки в том поперечном сечении, где $\xi = 1$, и в дальнейшем всегда считается, что этим сечением является $\alpha = 0$).

Будем подбирать закон распределения нагрузки так, чтобы частный интеграл уравнений оболочки-стержня можно было с достаточной точностью искать простейшим образом, т. е. по безмоментной теории, и притом так, чтобы значения усилий и моментов на продольных краях были пренебрежимо малы или равны нулю.

Статические уравнения безмоментной теории, как известно, можно получить, взяв первое, второе, третье и шестое уравнения равновесия и положив в них моменты и перерезывающие усилия равными нулю. Мы поступим несколько иначе: положим во втором и третьем уравнениях:

$$\frac{N_2}{R} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_2}{rR} = 0, \qquad \frac{\partial N_1}{\partial\alpha} + \frac{\partial N_2}{\partial\beta} = 0$$

и примем за неизвестные T_1, T_2, $S_1 + H_2/rR$, S_2. Для этих величин получится полная система из четырех уравнений с четырьмя неизвестными, интегрирование которой дает

$$\begin{gathered}
T_1 = +r\int d\alpha \int \frac{\partial}{\partial\beta}\left(Y - \frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right) d\alpha = -r\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(Rq) - p\right]\int d\alpha \int \xi\, d\alpha \\
S_1 + \frac{H_2}{rR} = -r\int\left(Y - \frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right) d\alpha = +r\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(Rq) - p\right]\int \xi\, d\alpha \\
S_2 = +r\int\left(Y - \frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right) d\alpha = -r\left[\frac{\partial}{\partial\beta}(Rq) - p\right]\int \xi\, d\alpha \\
T_2 = -rRZ = -rRq\xi
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Чтобы это решение удовлетворяло условию отсутствия на продольных краях нормальных усилий T_2, мы будем подбирать закон распределения нагрузки в поперечном направлении так, чтобы $q(\beta)$ при $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$ проходило через нули.

Оценим точность решения (3.2). Для этого, считая T_1, T_2, S_2 заданными формулами (3.2), определим с помощью соотношений упругости и соотношений (2.1) моменты и перерезывающие силы. Тогда можно будет найти и выражения

$$Y' = \frac{N_2}{R} + \frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{H_2}{rR}, \qquad Z' = -\frac{\partial N_1}{\partial\alpha} - \frac{\partial N_2}{\partial\beta}$$

которые выше полагались равными нулю.

Если Y' и Z' принять за компоненты некоторой фиктивной нагрузки R', то можно утверждать, что для оболочки, подверженной действию нагрузки $R+R'$, решение (3.2) будет являться точным частным интегралом. Это дает возможностя грубо оценить величину погрешности решения (3.2), причем необходимо помнить, что тонкостенный стержень является длинной оболочкой, у которой относительная длина $l = L/r$ (L — абсолютная длина оболочки) — величина большая.

Отсюда вытекает, что наибольшие значения интегралов по α от функции $\xi(\alpha)$ будут, вообще говоря, существенно превышать наибольшие значения первообразных функций. Так, например, в самом невыгодном с этой точки зрения, но практически наиболее важном случае, когда $\xi = \mathrm{const}$:

$$\sup\int\cdots\int\xi(\alpha)\,d\alpha^n = \frac{l^n}{n!}\sup\xi(\alpha) \tag{3.3}$$

Запишем поэтому формулы, выражающие моменты и перерезывающие усилия, расположив в них члены по нисходящим порядкам интегрирования. Исходя из (3.2) и пользуясь соотношениями упругости и вспомогательными формулами (2.1), получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}G_1 = &-\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\eta^3\Big\{-\sigma\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\Big(\frac{\partial p}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 Rq}{\partial\beta^2}\Big)\int d\alpha\int d\alpha\int d\alpha\int\xi\,d\alpha-\\
&-\sigma^2\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{Rq}{\eta}\int d\alpha\int\xi\,d\alpha-\Big[2\sigma(1+\sigma)\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{1}{\eta}-\sigma^2\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\frac{R}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\\
&+R\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big]\Big(p-\frac{\partial Rq}{\partial\beta}\Big)\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\cdots\Big\}\\
\frac{1}{r}G_2 = &-\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\eta^3\Big\{-\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\Big(\frac{\partial p}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 Rq}{\partial^2\beta}\Big)\int d\alpha\int d\alpha\int d\alpha\int\xi\,d\alpha-\\
&-\sigma\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{R}{\eta}q\int d\alpha\int\xi\,d\alpha-\Big[2(1+\sigma)\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{1}{\eta}-\sigma\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\frac{R}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\\
&+\sigma R\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big]\Big(p-\frac{\partial Rq}{\partial\beta}\Big)\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\cdots\Big\}\\
\frac{1}{r}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha} = &-\frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha} = \frac{h^2\eta^3}{3(1+\sigma)r^2}\Big\{-L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(p-\frac{\partial Rq}{\partial\beta}\Big)\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\cdots\Big\}\\
\frac{\partial N_1}{\partial\alpha} = &\frac{h^2\eta^3}{3(1-\sigma^2)r}\Big\{\Big[\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(p-\frac{\partial Rq}{\partial\beta}\Big)\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\cdots\Big\}\\
N_2 = &\frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\Big\{\frac{\partial}{\partial\beta}\eta^3\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big(p-\frac{\partial Rq}{\partial\beta}\Big)\int d\alpha\int d\alpha\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\\
&+\frac{\partial}{\partial\beta}\eta^3\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{Rq}{\eta}\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\Big[-\sigma\frac{\partial}{\partial\beta}\eta^3\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\frac{R}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\sigma\frac{\partial}{\partial\beta}\eta^3R\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}+\\
&+2(1+\sigma)\frac{\partial}{\partial\beta}\eta^3\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{1}{\eta}-(1-\sigma)\eta^3L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\Big]\Big(p-\frac{\partial Rq}{\partial\beta}\Big)\int d\alpha\int\xi\,d\alpha+\cdots\Big\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь точками заменены не нужные для дальнейшего члены, не содержащие интегралов по α от ξ, а вместо H_1, H_2 и N_1 даны их производные по α, так как только последние нам и понадобятся.

Рассматривая эти формулы, мы убеждаемся, что наибольшие значения компонент фиктивной нагрузки Y' и Z' будут уменьшаться вместе с толщиной оболочки как h^2/r^2 и, если принять невыгоднейший случай

(3.3), увеличиваться вместе с увеличением ее относительной длины, грубо говоря, как $l^4/4!$.

Поэтому, если коэффициенты при интегралах наибольшей кратности ни точно, ни приближенно не равны нулю, то ошибка решения (3.2) может быть малой только в случае, если

$$\frac{h^2}{r^2}\frac{l^4}{4!}\ll 1$$

что для такой длинной оболочки, как тонкостенный стержень, совершенно нереально.

Таким образом, безмоментная теория как метод определения частных интегралов в оболочках-стержнях в общем случае непригодна. Будем теперь искать такие поперечные нагрузки R_1, для которых эти недостатки безмоментной теории устраняются. Это может произойти только тогда, когда обратятся в нуль коэффициенты при интегралах наибольшей кратности в выражениях для компонент фиктивной нагрузки. Легко видеть, что желаемый результат будет иметь место, если

$$\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p}{\partial\beta}-\frac{\partial^2 Rq}{\partial\beta^2}\right)=0$$

или, что то же:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}L\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(Y-\frac{\partial RZ}{\partial\alpha}\right)=0 \tag{3.5}$$

При этом исчезнут коэффициенты при интегралах наибольшей кратности не только в выражениях для компонент фиктивной нагрузки, что увеличивает точность решения (3.2), но и в выражениях для всех моментов и перерезывающих сил, что приближает нас к выполнению условия отсутствия напряжений на прямолинейных краях оболочки.

Интегрируя с помощью результатов § 2 уравнение (3.5), получим

$$Y-\frac{\partial RZ}{\partial\beta}=\xi(\alpha)\left[C_1\int_0^\beta \eta\,d\beta+\frac{C_2}{r}\int_0^\beta x\eta\,d\beta+\frac{C_3}{r}\int_0^\beta y\eta\,d\beta+\frac{C_4}{r^2}\int_0^\beta \omega\eta\,d\beta+C_5\right] \tag{3.6}$$

Чтобы прямолинейные края были свободны от сдвигающих усилий, надо, как показывает (3.2), положить

$$\left[Y-\frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right]_{\beta=0}=\left[Y-\frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right]_{\beta=\beta_0}=0$$

Это в силу условий ортогональности (2.10) дает $C_1=C_5=0$.

Остаются три константы, которые можно подобрать так, чтобы искомая нагрузка R_1 была в каждом поперечном сечении оболочки статически эквивалентна заданной нагрузке R. Имеем

$$\int_0^{\beta_0}\left(Y-\frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right)dx=\xi(\alpha)\,P_x,\qquad \int_0^{\beta_0}\left(Y-\frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right)dy=\xi(\alpha)\,P_y$$

$$\int_0^{\beta_0}\left(Y-\frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right)d\omega=\xi(\alpha)\,M \tag{3.7}$$

где P_x, P_y и M — приходящиеся на единицу длины силы, действующие в направлении оси X и Y, и крутящий момент, к которым приводится нагрузка R у поперечного сечения $\alpha = 0$.

Вставляя в (3.7) значение $Y - \partial RZ / \partial\beta$ из (3.6), получим, например,

$$P_x = \int_0^{\beta_0} \left(Y - \frac{\partial RZ}{\partial\beta}\right) dx = \frac{C_2}{r} \int_0^{\beta_0} dx \int_0^{\beta} x\eta\, d\beta + \frac{C_3}{r} \int_0^{\beta_0} dx \int_0^{\beta} y\eta\, d\beta + \frac{C_4}{r^2} \int_0^{\beta_0} dx \int_0^{\beta} \omega\eta\, d\beta \,.$$

Интегрирование по частям дает

$$P_x = \left[\frac{C_2}{r} x \int_0^{\beta} x\eta\, d\beta + \frac{C_3}{r} x \int_0^{\beta} y\eta\, d\beta + \frac{C_4}{r^2} x \int_0^{\beta} \omega\eta\, d\beta\right]_{\beta=0}^{\beta=\beta_0} -$$

$$- \frac{C_2}{r} \int_0^{\beta_0} x^2\, \eta d\beta - \frac{C_3}{r} \int_0^{\beta_0} xy\eta\, d\beta - \frac{C_4}{r^2} \int_0^{\beta_0} x\omega\eta\, d\beta$$

В силу формул (2.10) в правой части сохраняется только коэффициент при C_2, откуда для C_2 и аналогично для C_3 и C_4 имеем

$$C_2 = -\frac{2hr^2 P_x}{I_y}, \qquad C_3 = -\frac{2hr^2 P_y}{I_x}, \qquad C_4 = -\frac{2hr^3 M}{I_\omega}$$

где I_x, I_y, I_ω — моменты инерции, определенные (2.7). Отсюда

$$Y - \frac{\partial RZ}{\partial\beta} = -\xi(\alpha) \left[\frac{2hr}{I_y} P_x \int_0^{\beta} x\eta\, d\beta + \frac{2hr}{I_x} P_y \int_0^{\beta} y\eta\, d\beta + \frac{2hr}{I_\omega} M \int_0^{\beta} \omega\eta\, d\beta\right] \quad (3.8)$$

Формулы (3.2) получают вид:

$$\left. \begin{aligned} S_1 + \frac{H_2}{rR} &= -S_2 = 2hr^2 \left[\frac{P_x}{I_y} \int_0^{\beta} x\eta\, d\beta + \frac{P_y}{I_x} \int_0^{\beta} y\eta\, d\beta + \frac{M}{I_\omega} \int_0^{\beta} \omega\eta\, d\beta\right] \int \xi\, d\alpha \\ T_1 &= -2hr^2\eta \left[\frac{P_x}{I_y} x + \frac{P_y}{I_x} y + \frac{M}{I_\omega} \omega\right] \int d\alpha \int \xi d\alpha\,, \qquad T_2 = -RZ \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Построенное таким образом элементарное решение соответствует не заданной нагрузке R, а статически эквивалентной ей в каждом поперечном сечении нагрузке R_1.

Вид нагрузки R_1 определился не полностью. Между двумя ее компонентами Y и Z установлено только одно соотношение (3.8). Чтобы продвинуться дальше, оценим точность решения (3.9). Для этого надо вернуться к формулам (3.4), в которых в силу ограничений, наложенных на функции $p(\beta)$ и $q(\beta)$, следует считать равными нулю все коэффициенты при четырехкратных интегралах от ξ. Повторив рассуждения, применявшиеся при оценке решения (3.2), мы придем к выводу, что частный интеграл (3.9) будет обладать приемлемой точностью, если

$$\frac{h^2}{r^2} \frac{l^2}{2!} \ll 1$$

Неравенством такого типа, как мы увидим ниже, характеризуются короткие стержни, но уже для стержней средней величины оно может и не выполняться.

Надлежащим выбором оставшейся пока неопределенной компоненты Z можно достигнуть дальнейшего повышения точности. Для этого надо потребовать, чтобы та часть фиктивной нагрузки, которая зависит от двойных интегралов от $\xi(\alpha)$, оказалась самоуравновешенной в каждом поперечном сечении. Тогда эту главную часть фиктивной нагрузки можно присоединить к самоуравновешенной части нагрузки R, которую нам еще предстоит рассмотреть. На математических подробностях этой операции мы останавливаться не будем. Заметим только, что, как бы ни была выбрана компонента Z нагрузки R_1 в элементарном решении (3.9), основные для тонкостенного стержня усилия T_1, S_1 и S_2 остаются неизменными.

Для коротких стержней уточнять частный интеграл нет необходимости и можно поэтому положить $Z = 0$.

Таким образом, первая половина задачи о построении частного интеграла решена: из общей произвольной нагрузки R выделена статически неуравновешенная часть R_1, для которой дано элементарное решение (3.9). Вторая половина задачи должна состоять в исследовании статически уравновешенной части нагрузки $R_2 = R - R_1$.

Пусть на оболочку действует самоуравновешенная в каждом поперечном сечении нагрузка R_2 с компонентами вида (3.1). Предполагается, что она известна, т. е. мы уже выбрали определенным образом нагрузку R_1 из вышеизложенных соображений. Будем искать те условия, при которых каждая поперечная полоска единичной ширины, выделенная из оболочки, работает как арка, вследствие чего напряжения в поперечных сечениях будут носить второстепенный характер по сравнению с напряжениями, возникающими в продольных сечениях.

Легко видеть, что второе, третье, и пятое уравнения равновесия цилиндрической оболочки переходят в статические уравнения арки тогда и только тогда, когда в первых из них отброшены члены с производными по переменной α, т. е. когда

$$\frac{\partial N_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial S_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial H_1}{\partial \alpha} = 0 \tag{3.10}$$

При этом мы придем к уравнениям (2.11), из которых можно определить поперечные усилия и моменты, возникающие в оболочке. Согласно (2.16) интегралом этой системы будет

$$\begin{gathered} G_2 = A_1 + A_2 \frac{x}{r} + A_3 \frac{y}{r} + G_2{}^* \\ N_2 = A_2 \frac{\cos\chi}{r} + A_3 \frac{\sin\chi}{r} + N_2{}^*, \qquad T_2 = + A_2 \frac{\sin\chi}{r} - A_3 \frac{\cos\chi}{r} + T_2{}^* \end{gathered} \tag{3.11}$$

причем теперь надо считать, что A_1, A_2, A_3 являются функциями переменной α, так как предположением о том, что T_2, G_2, N_2 не зависит от α, мы сейчас не пользуемся.

Поскольку оператор Z не содержит в явной форме переменной α, частный интеграл его всегда можно искать в таком же виде, в каком заданы компоненты внешней нагрузки, т. е.

$$G_2^* = \xi(\alpha)\, g_2^*(\beta), \qquad N_2^* = \xi(\alpha)\, n_2^*(\beta), \qquad T_2^* = \xi(\alpha)\, t_2^*(\beta) \tag{3.12}$$

Произвольные функции интегрирования A_1, A_2, A_3, фигурирующие в общем интеграле, определяют краевые значения усилий и моментов T_2, N_2, G_2. Эти величины можно рассматривать как краевую поперечную нагрузку, поэтому, распространяя и на нее требования, чтобы во всех поперечных сечениях она сохраняла подобие, получим

$$A_1 = a_1\,\xi(\alpha), \qquad A_2 = a_2\,\xi(\alpha), \qquad A_3 = a_3\,\xi(\alpha) \tag{3.13}$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные.

Так как на арку-полоску, кроме внешних поверхностной и краевой нагрузок, ничего не действует, то, очевидно, что при любом выборе постоянных a_1, a_2, a_3 система из внешних нагрузок краевых сил и моментов будет самоуравновешенной в любом поперечном сечении. Тем самым мы приходим к некоторому обобщению понятия о самоуравновешенной нагрузке, в которую теперь включаются помимо поверхностных также и краевые силы.

Из равенств (3.11), (3.12), (3.13) вытекает

$$G_2 = \xi(\alpha)\, g_2(\beta), \qquad N_2 = \xi(\alpha)\, n_2(\beta), \qquad T_2 = \xi(\alpha)\, t_2(\beta) \tag{3.14}$$

Опираясь на это, можно доказать, что $\xi(\alpha)$ должно быть линейной функцией переменной α. Из соотношений упругости, из шестого уравнения равновесия и равенств (3.10) имеем

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = \frac{\partial H_2}{\partial \alpha} = 0 \tag{3.15}$$

Поэтому, дифференцируя по α первое уравнение неразрывности деформаций и четвертое уравнение равновесия, получим

$$\frac{\partial^2 \varkappa_2}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial \alpha^2} = 0$$

Тогда из соотношений упругости следует

$$\frac{\partial^2 \varkappa_1}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial^2 G_2}{\partial \alpha^2} = 0$$

Отсюда в силу (3.14) и получается доказываемое положение:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2} = 0$$

Таким образом, в тонкостенном стержне каждое поперечное сечение под самоуравновешенной нагрузкой может работать как арка только в том случае, если нагрузка меняется по длине стержня по линейному закону.

Это условие не только необходимо, но и достаточно, т. е. для такой нагрузки задачу можно решить до конца: определить усилия, моменты и деформации так, что будут удовлетворяться все уравнения равновесия и неразрывности деформаций и все соотношения упругости.

Чтобы показать это, будем исходить из уравнений неразрывности деформаций. Продифференцируем четвертое из них по α. Если принять во внимание (3.15), то это дает

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \alpha} = 0$$

Тогда второе, третье и пятое уравнения неразрывности примут вид:

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \beta} = \frac{\zeta_1}{R}, \qquad \frac{\varkappa_1}{R} = -\frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta}, \qquad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} = r\zeta_1 \tag{3.16}$$

Мы пришли к системе (2.12), проинтегрированной в предыдущем параграфе. Поэтому согласно (2.17) имеем

$$\varepsilon_1 = B_1 + B_2 \frac{x}{r} + B_3 \frac{y}{r}, \qquad \zeta_1 = B_2 \frac{\cos\chi}{r} + B_3 \frac{\sin\chi}{r},$$
$$\varkappa_1 = B_2 \frac{\sin\chi}{r} - B_3 \frac{\cos\chi}{r} \tag{3.17}$$

Поскольку при выводе (3.17) не предполагалось, что ζ_1, $\varkappa_1$ ε_1—функции одного β, то B_1, B_2, B_3 следует считать функциями α. Чтобы не нарушить ранее полученных соотношений, их надо выбрать линейными.

Мы можем теперь считать известными две группы величин: T_2, N_2, G_2, однозначно определяемые уравнениями (2.11) и граничными условиями на прямолинейных краях, и ε_1, ζ_1, $\varkappa_1$, определенные с точностью до трех линейных функций от α. Разыскание остальных искомых величин элементарно, оно может быть выполнено при помощи соотношений упругости, первого и шестого уравнений равновесия и первого уравнения неразрывности деформаций. Получим

$$T_1 = 2Eh\eta\varepsilon_1 + \sigma T_2, \qquad S_2 = 2Eh\int_0^\beta \eta \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \alpha} d\beta + \sigma \int_0^\beta \frac{\partial T_2}{\partial \alpha} d\beta + B_4'$$
$$H_1 = -H_2 = -(1-\sigma)\eta^3 \int_0^\beta \frac{1}{\eta^3}\frac{\partial G_2}{\partial \alpha} d\beta - \sigma \frac{2Eh^3\eta^3}{3(1+\sigma)} \int_0^\beta \frac{\partial \varkappa_1}{\partial \alpha} d\beta + B_5' \tag{3.18}$$
$$S_1 = -S_2 - \frac{H_2}{rR}, \qquad G_1 = -\frac{2Eh^3}{3}\eta^3\varkappa_1 + \sigma G_2$$

где B_4' и B_5' — постоянные.

Остаются неопределенными восемь произвольных констант: по две в каждой из линейных функций B_1, B_2, B_3 и, кроме того, B_4' и B_5'. Этими константами можно распорядиться так, чтобы на прямолинейных краях не были приложены продольные силы и усилия в поперечных сечениях представляли собой самоуравновешенную систему сил, т. е. чтобы на искомый частный интеграл не накладывались напряженные состояния, соответствующие растяжению, изгибу и кручению оболочки внешними силами, приложенными к ее поперечным краям. Так как оболочка в целом уравновешена, поскольку удовлетворены уравнения равновесия, то достаточно потребовать, чтобы была самоуравновешенна система усилий и моментов, приложенных к поперечному сечению $\alpha = 0$. Это дает шесть соотношений. Добавив условия

$$S_2 \big|_{\beta=0} = 0, \qquad S_2 \big|_{\beta=\beta_0} = 0$$

мы получим восемь уравнений для восьми произвольных констант.

Если поперечная самоуравновешенная нагрузка в продольном направлении не является линейной функцией, то она может давать в поперечных сечениях существенные напряжения (по сравнению с напряжениями в продольных сечениях).

Когда нагрузка в продольном направлении имеет кусочно-линейный характер, оболочку можно разбить на участки и к каждому из них применить полученные результаты. Но следует помнить, что вблизи сечений, по которым нагрузка терпит разрывы, напряженное состояние будет испорчено влиянием условий сопряжений частей оболочки, так что такие сечения не должны быть слишком частыми.

§ 4. Скорость затухания частных интегралов однородных уравнений. Целью настоящего параграфа является разыскание таких частных интегралов однородных уравнений цилиндрической оболочки, которые соответствуют напряженным состояниям с наименьшим затуханием (возрастанием) по переменной α.

Уравнения произвольной цилиндрической оболочки не содержат переменных коэффициентов по параметру α, и эту систему можно свести к одному уравнению. Фактически такая операция весьма громоздка, но нетрудно сообразить, минуя выкладки, что вид этого уравнения будет

$$\frac{\partial^8 \Phi}{\partial \alpha^8} + L_2\left(\frac{\partial^6 \Phi}{\partial \alpha^6}\right) + L_4\left(\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4}\right) + n\frac{r^2}{h^2}\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + L_6\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \alpha^2}\right) + L_8(\Phi) = 0 \qquad (4.1)$$

где L_i — линейные дифференциальные операторы относительно переменной β, порядок которых равен их индексу, n — известная функция от β, Φ — функция напряжения, через которую усилия и моменты выражаются при помощи некоторых дифференциальных операций.

Операторы L_i и коэффициент n могут зависеть от h/r, но при $h/r \to 0$ все они остаются ограниченными.

Определим медленно затухающую (возрастающую) в направлении переменной α функцию Φ требованием, чтобы ее производная по α была существенно меньше самой функции. Математически это можно выразить уравнением

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = k\psi(\alpha, \beta)\Phi$$

где k — настолько малое число, что абсолютные значения функции $k\psi(\alpha, \beta)$ и ее производных существенно меньше единицы.

Интегрируя это уравнение, получим

$$\Phi = \chi(\beta) \exp \int k\psi \, d\alpha$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} = \left(k^2\psi^2 + k\,\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\right)\Phi$$

При $\partial\psi\,/\,\partial\alpha \neq 0$ и при достаточно малом k можно написать приближенное равенство:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2} \approx k\,\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}\,\Phi$$

которое показывает, что первая производная уже не будет медленно затухающей (возрастающей) функцией. Но производные по α от Φ входят в выражения для усилий и моментов, и чтобы последние оказались медленно затухающими (возрастающими) функциями, необходимо наложить требование

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} = 0 \quad \text{или} \quad \psi = \psi(\beta)$$

Отсюда следует, что из всех решений уравнения (4.1) достаточно рассмотреть интегралы вида

$$\Phi = e^{k\alpha}\varphi(\beta) \tag{4.2}$$

так как только ими будут определяться медленно затухающие (возрастающие) напряженные состояния.

Тогда для φ получится уравнение

$$k^8\varphi + k^6L_2(\varphi) + k^4L_4(\varphi) + n(\beta)\,\frac{r^2}{h^2}\,k^4\varphi + k^2L_6(\varphi) + L_8(\varphi) = 0 \tag{4.3}$$

Постоянное число k оставим произвольным. Им будет определяться характер затухания искомых величин по переменной α.

При заданном k уравнение (4.3) определяет восемь линейно независимых решений для φ. Это значит, что заданный характер затухания (возрастания) может иметь место только, если в поперечном направлении искомые величины распределены одним из восьми определенных способов.

Поскольку речь идет о тонких оболочках, следует помнить, что $h\,/\,r$ мало. Пользуясь этим, сосредоточим свое внимание на асимптотических свойствах интегралов уравнения (4.3), т. е. на свойствах, проявляющихся при сколь угодно малых $h\,/\,r$.

Определим новую величину $\varkappa$ равенством:

$$k = \left(\frac{h}{r}\right)^{\varkappa}$$

и будем называть ее коэффициентом затухания.

Тогда уравнение (4.3) примет вид:

$$\left(\frac{h}{r}\right)^{8\varkappa}\varphi + \left(\frac{h}{r}\right)^{6\varkappa}L_2(\varphi) + \left(\frac{h}{r}\right)^{4\varkappa}L_4(\varphi) + n(\beta)\left(\frac{h}{r}\right)^{4\varkappa-2}\varphi + \left(\frac{h}{r}\right)^{2\varkappa}L_6(\varphi) + L_8(\varphi) = 0 \tag{4.4}$$

Далее необходимо рассмотреть раздельно три случая:

(а) $\varkappa < 0$, (б) $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1\,/\,2$, (в) $\varkappa > 1\,/\,2$

При $\varkappa < 0$ будет иметь место быстрое затухание (возрастание), тем более интенсивное, чем тоньше оболочка. Это напряженное состояние (краевой эффект) для нас не представляет интереса.

В случаях (б) и (в) интенсивность затухания (возрастания) будет уменьшаться с уменьшением толщины оболочки. Интегралы уравнения (4.4) будут при $h/r \to 0$ асимптотически приближаться в случае (б) к интегралам уравнения

$$L_8(\varphi) + n(\beta)\left(\frac{h}{r}\right)^{4\varkappa-2}\varphi = 0 \tag{4.5}$$

а в случае (в) к интегралам уравнения

$$L_8(\varphi) = 0 \tag{4.6}$$

Принципиальная разница между этими двумя случаями заключается в том, что пока $\varkappa$ лежит в интервале (б), закон изменения искомых усилий по поперечному сечению зависит от $\varkappa$, а когда $\varkappa$ попадает в интервал (в), закон перестает меняться. Физическое значение этого факта станет ясней, если мы условимся о том, как разграничить местные и основные напряженные состояния.

В задачу о расчете тонкостенного стержня входит только определение напряжений в достаточном удалении от краев. Напряженные состояния, успевающие затухнуть, не достигнув этой зоны, следует причислить к местным, краевым, напряжениям и игнорировать при расчете. С этой точки зрения можно для каждой оболочки стержня, когда заданы ее размеры, установить такое число $\varkappa_1$, что:

а) интегралы уравнения (4.4) при $\varkappa \leqslant \varkappa_1$ будут давать местные напряженные состояния;

б) интегралы уравнения (4.4) при $\varkappa > \varkappa_1$ будут давать основное напряженное состояние, в определении которого и состоит задача.

Очевидно, что число $\varkappa_1$ при заданной относительной толщине оболочки h/r и при определенных требованиях к точности расчета определяется длиной оболочки-стержня. В связи с этим и оболочки по их длине можно разбить на два класса:

1) оболочки, для которых $\varkappa_1 \leqslant \frac{1}{2}$, 2) оболочки, для которых $\varkappa_1 > \frac{1}{2}$

Различие между ними заключается в том, что в оболочках второго рода число основных напряженных состояний, различающихся между собой законом изменения по поперечному сечению, не будет превышать восьми, в то время как для оболочек первого рода таких общих напряженных состояний может быть бесчисленное множество.

Теория сплошных стержней оперирует с конечным числом общих напряженных состояний, различающихся между собой законом распределения напряжений по поперечному сечению (напряженные состояния, соответствующие изгибам, растяжению и кручению стержня). Теория тонкостенных стержней, обобщающая теорию сплошных стержней, может быть построена, очевидно, только для оболочек второго рода. Оболочки первого рода должны быть отнесены к разряду длинных оболочек, к расчету которых может быть применен метод В. З. Власова [5] или В. В. Новожилова [6].

Тем самым определяется нижняя грань для относительной длины тонкостенного стержня. Оболочка может рассматриваться как стержень только в том случае, если

$$e^{-\frac{1}{2}kl} \ll 1 \quad \text{при} \quad k = \left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Если это неравенство будет нарушено, то закон распределения усилий и моментов основного напряженного состояния по поперечному сечению будет определяться уже уравнением (4.5). Размеры статьи не позволяют остановиться на вопросе о том, как исказится при этом основное напряженное состояние. Мы ограничимся поэтому утверждением, что написанное неравенство оценивает наименьшую длину оболочки, к которой теория тонкостенных стержней применима полностью без каких бы то ни было малых или больших искажений.

Обратимся к исследованию напряженных состояний с показателем затухания $\varkappa > 1/2$ и рассмотрим сначала предельный случай: $\varkappa = \infty$.

При этом Φ вырождается в функцию, линейную по переменной α, и соответствующее напряженное состояние будет также линейным по α (предполагается, что все искомые величины определяются через Φ без помощи интегрирования). Такое линейное по α напряженное состояние было уже получено в § 3 при рассмотрении поперечной нагрузки. Оно определяется (3.11), (3.17), (3.18), в которых нагрузочные члены, отмеченные звездочками, надо считать равными нулю. В этих соотношениях произвольными элементами являются:

(а) линейные по α функции A_1, A_2, A_3 в выражениях T_2, N_2, G_2;

(б) линейные по α функции B_1, B_2, B_3 в выражениях ε_1, ζ_1, $\varkappa_1$;

(в) константы B_4' и B_5', входящие помимо вышеупомянутых линейных функций в выражения для S_2, H_1, H_2.

В § 3 указывалось, что функции A_1, A_2, A_3 соответствуют загружению оболочки силами и моментами по продольным краям. Такого рода напряженные состояния можно отнести к частному интегралу и считать $A_1 = A_2 = A_3 = 0$. Отсюда вытекает, что $T_2 = G_2 = N_2 = 0$.

Если теперь, считая $T_2 = 0$, потребовать дополнительно, чтобы на краю оболочки отсутствовали сдвигающие усилия S_2, то с помощью (3.17), (3.18) получим

$$S_2\Big|_{\beta=0} = B_4' = 0$$

$$S_2\Big|_{\beta=\beta_0} = 2Eh\left\{\frac{dB_1}{d\alpha}\int\limits_0^{\beta_0}\eta d\beta + \frac{dB_2}{d\alpha}\int\limits_0^{\beta_0}\frac{x}{r}\eta d\beta + \frac{dB_3}{d\alpha}\int\limits_0^{\beta_0}\frac{y}{r}\eta d\beta\right\} + B_4' = 0$$

или в силу условий ортогональности (2.10)

$$B_4' = \frac{dB_1}{d\alpha} = B_1' = 0$$

Константа B_5' дает напряженное состояние, в котором отличными от нуля будут только крутящие моменты и сдвигающее усилие S_1. Этому в пределах точности теории оболочек отвечает сен-венаново кручение тонкостенного стержня. Остаются произволы, заключенные в функциях B_1, B_2, B_3. Формулы (3.17) и (3.18) показывают, что определяемое ими напряженное состояние оболочки характеризуется тем, что в нем нормальные напряжения в поперечных сечениях будут подчиняться так называемому закону плоскости, т. е. оболочка ведет себя как стержень, подвергаемый действию изгиба и растяжения.

Отсюда вытекает, что достаточно длинные тонкостенные стержни по характеру работы перестают отличаться от сплошных и, следовательно, надо сосредоточить внимание на стержнях, отличающихся по длине и от оболочки и от сплошного стержня.

Чтобы выполнить такого рода анализ, обратим внимание на то, что уравнение (4.6) или, что то же самое, уравнение

$$L_8(\Phi) = 0 \tag{4.7}$$

можно получить чисто формально, предположив, что Φ является функцией одного β, хотя мы будем изучать и такие интегралы (4.7), которые зависят от α. Пользуясь этим, прибегнем к тем результатам, которые были получены в § 2 при разыскании не зависящего от α напряженного состояния оболочки.

Можно утверждать, что среди особенно медленно затухающих напряженных состояний цилиндрической оболочки имеются:

(а) такие, в которых величины T_2, N_2, G_2 определяются системой (2.11), если в ней положить $Y = Z = 0$;

(б) такие, в которых $\varkappa_1$, ζ_1, ε_1 определяются системой (2.12);

(в) такие, в которых величина S_2 определяется уравнением (2.13), если в нем положить $X = 0$;

(г) такие, в которых величина τ определяется уравнением (2.14).

Физический смысл напряженных состояний типа (а) и (в) ясен. Первые из них соответствуют загружению оболочки поперечными силами и моментами по прямолинейным краям. Они, как уже рассмотренные при изучении частных интегралов от поперечных нагрузок, не представляют интереса. Напряженные состояния типа (в) отвечают загружению оболочки продольными силами по прямолинейным краям. Их рассматривать тоже нет необходимости, так как они в дальнейшем автоматически включаются в напряженные состояния типа (б).

Остается изучить незатухающие интегралы типа (б) и (г). Только они и могут оказаться пригодными для построения теории тонкостенных стержней, т. е. дать такие напряженные состояния, в которых нормальные напряжения на поперечных сечениях окажутся существенно больше, чем на продольных. Для этого, в частности, должно быть

$$T_1 \gg T_2 \tag{4.8}$$

Мы примем гипотезу, что условие (4.8) действительно имеет место для интегралов типа (б) и (г). В § 5 это положение будет доказано.

Если принять во внимание (4.8), то из соотношений (1.1) вытекает

$$T_1 = 2Eh\eta\varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2 = -\sigma\varepsilon_1 \tag{4.9}$$

С другой стороны, пользуясь первым уравнением равновесия и соотношением упругости (1.2), получим

$$S_2 = \int\limits_0^{\beta_0} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha}\, d\beta, \qquad 2Eh\eta\,\frac{\gamma}{2} = -(1+\sigma)\int\limits_0^{\beta_0} \frac{\partial T_1}{\partial \alpha}\, d\beta \tag{4.10}$$

Поскольку нас сейчас интересуют только медленно затухающие интегралы, надо считать, что каждое дифференцирование по α приводит к существенному уменьшению дифференцируемой функции. Отсюда вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\,\frac{\gamma}{2} \ll \varepsilon_1, \qquad \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \alpha} \ll \varepsilon_1$$

а если учесть четвертое уравнение неразрывности, то к этим неравенствам можно еще присоединить и такое:

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial \alpha} \ll \varepsilon_1$$

Отбросив во втором, третьем и четвертом уравнениях неразрывности деформаций величины, малые по сравнению с ε_1, получим

$$\frac{\partial \varkappa_1}{\partial \beta} - \frac{\zeta_1}{R} = \frac{\partial \tau}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\varkappa_1}{R} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial \beta} = 0, \qquad \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta} = r\zeta_1 \tag{4.11}$$

Этой системой охватываются как интеграл типа (б), которые получаются, если считать $\partial\tau / \partial\alpha = 0$, так и интегралы типа (г), которые получаются, если положить

$$\tau = C(\alpha), \qquad \frac{\partial \tau}{\partial \alpha} = C'(\alpha)$$

Исключим из уравнений (4.11) неизвестные $\varkappa_1$ и ζ_1, тогда для определения ε_1 получится уравнение

$$L\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta}\right) = -rC'(\alpha) \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial \beta} L\left(\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \beta}\right) = 0 \tag{4.12}$$

§ 5. Разыскание элементарных решений однородных уравнений. Основным результатом предыдущего параграфа является вывод уравнения (4.12), которым определяется характер изменения деформации ε_1 в медленно затухающих напряженных состояниях цилиндрической оболочки произвольного очертания. Интегрируя это уравнение, получим

$$\varepsilon_1{}^* = 2Eh\varepsilon_1 = A_1 + A_2\frac{x}{r} + A_3\frac{y}{r} + A_4\frac{\omega}{r^2} \tag{5.1}$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 — функции α.

Имея в виду расшифровать смысл функций A_1, A_2, A_3, A_4, исследуем более подробно соответствующее напряженное состояние. Сохраним при этом высказанное выше предположение, что нормальные напряжения на поперечных срезах значительно превышают по абсолютной величине нормальные напряжения на продольных срезах, так что, в частности, выполняется и неравенство (4.8), и будем иметь в виду, что все искомые величины медленно затухают в продольном направлении и вследствие этого уменьшаются при дифференцировании и увеличиваются при интегрировании по α.

Деформация ε_1 определяется формулой (5.1). Выразим через нее искомые величины. При этом, опираясь на предположение (4.8), будем считать, что усилием T_2 можно пренебречь по сравнению с T_1. Тогда из соотношений упругости (1.1)

$$T_1 = \eta\varepsilon_1^* = A_1\eta + A_2\frac{x}{r}\eta + A_3\frac{y}{r}\eta + A_4\frac{\omega}{r^2}\eta, \qquad \varepsilon_2 = -\sigma\varepsilon_1 \tag{5.2}$$

Сдвигающее усилие S_2 и деформацию ω определим из первого уравнения равновесия и соотношения упругости (1.2)

$$S_2 = \int\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial\alpha}\eta\, d\beta + A'_5, \qquad \gamma = -\frac{2(1+\sigma)}{\eta}\int\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\alpha}\eta\, d\beta - \frac{1+\sigma}{Eh\eta}A_5' \tag{5.3}$$

где A_5' — произвольная функция интегрирования, зависящая от одного α и уменьшающаяся, как и A_1, A_2, A_3, A_4, при дифференцировании. Легко видеть, что при помощи функции A_5' мы включаем в рассмотрение опущенное в § 4 напряженное состояние типа (в).

Далее, если компоненты тангенциальной деформации ε_1, ε_2, γ известны, то можно с помощью соотношений (2.1) выразить остальные неизвестные функции.

В этих формулах, которыми мы будем пользоваться для оценки порядка усилий и моментов, надо особое внимание обратить на слагаемые, содержащие интегрирование по α, так как они будут расти вместе с длиной оболочки. В связи с этим отметим, что так как ε_1^* удовлетворяет уравнению (4.13), а ω зависит только от производных по α от ε_1^* и A_5, то интегралы сохраняются только в выражениях для H_1 и H_2. Вследствие этого формулы (2.1) можно коротко записать так:

$$\frac{1}{r}G_1 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}g_1, \qquad \frac{1}{r}G_2 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}g_2 \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{r}H_1 = -\frac{1}{r}H_2 = -\frac{h^2\eta^3}{3(1+\sigma)r^2}\int L\left(\frac{\partial\varepsilon_1^*}{\partial\beta}\right)d\alpha + \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\frac{\partial h_{12}}{\partial\alpha} =$$

$$= -\frac{h^2\eta^3}{3(1+\sigma)r^2}\int A_4 d\alpha + \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\frac{\partial h_{12}}{\partial\alpha}$$

$$N_1 = \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\frac{\partial n_1}{\partial\alpha}, \qquad N_2 = \frac{h^2\eta^3}{3(1+\sigma)r^2}A_4 + \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}n_2$$

где g_1, g_2, h_{12}, n_1, n_2, обозначают некоторые функционалы от ε_1^*, которые при желании легко выписать; важно заметить, что они являются величинами одного порядка с ε_1^*.

Последние неизвестные T_2 и S_1 находятся из третьего и шестого уравнений равновесия:

$$T_2 = -\frac{h^2}{3(1+\sigma) r^2} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} A_4 + \frac{h^2}{3(1-\sigma^2) r^2} t_2, \qquad S_1 + \frac{H_2}{rR} = -S_2 \tag{5.5}$$

Формулы (5.4) и (5.5) показывают, что исследуемые решения действительно дают на поперечных сечениях значительно большие нормальные напряжения, чем на продольных, как и постулировано выше.

Вспомогательные соотношения (2.1) выводятся без использования первых трех уравнений равновесия. При определении S_2 и T_2 пришлось прибегнуть к первому и третьему из этих уравнений. Следовательно, осталось незатронутым только второе уравнение равновесия. Подстановка в него полученных результатов дает

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(S_1 + \frac{H_2}{rR}\right) + \frac{\partial T_2}{\partial \beta} - \left(\frac{N_2}{R} + \frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{H_2}{rR}\right) = Y^* \tag{5.6}$$

$$Y^* = -\int_0^\beta \frac{\partial^2 \varepsilon_1^*}{\partial \alpha^2} \eta d\beta - A_5'' - \frac{h^2}{3(1+\sigma) r^2}\left(\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right) A_4 +$$

$$+ \frac{h^2}{3(1-\sigma^2) r^2}\left(\frac{\partial t_2}{\partial \beta} - \frac{n_2}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial \alpha^2}\right) \tag{5.7}$$

Величину Y^* можно, очевидно, рассматривать как компоненту некоторой поперечной касательной нагрузки, которую надо приложить к оболочке, чтобы в ней могло существовать искомое напряженное состояние. Произвольные функции A_1, A_2, A_3, A_4 надо подобрать так, чтобы эта фиктивная нагрузка оказывала минимальное влияние на величину и интенсивность напряжений в поперечных сечениях.

Основываясь на физических соображениях, можно утверждать, что для этого надо наложить два условия: чтобы фиктивная нагрузка была самоуравновешенной во всех поперечных сечениях и чтобы Y^* проходила через нули на прямолинейных краях оболочки.

При нарушении первого требования в поперечных сечениях неизбежно возникнут уравновешивающие напряжения. При нарушении второго условия, как показывают формулы (3.2), к прямолинейным краям оболочки окажутся приложенными касательные силы, которые тоже вызовут уравновешивающие напряжения в поперечных сечениях.

Самоуравновешенность фиктивной нагрузки математически выражается равенствами

$$\int_0^{\beta_0} Y^* dx = \int_0^{\beta_0} Y^* dy = \int_0^{\beta_0} Y^* d\omega = 0$$

Эти соотношения можно преобразовать интегрированием по частям. Учтя, что фиктивная нагрузка проходит через нули на прямолинейных краях оболочки, т. е.

$$Y^*|_{\beta=0} = 0, \qquad Y^*|_{\beta=\beta_0} = 0 \tag{5.8}$$

получим

$$\int_0^{\beta_0} \frac{\partial Y^*}{\partial \beta} x d\beta = \int_0^{\beta_0} \frac{\partial Y^*}{\partial \beta} y d\beta = \int_0^{\beta_0} \frac{\partial Y^*}{\partial \beta} \omega d\beta = 0 \tag{5.9}$$

Пять соотношений (5.8) и (5.9) дают систему уравнений, из которой можно определить $A_1, A_2, \ldots, A_5$.

Имеем

$$\frac{\partial Y^*}{\partial \beta} = -\eta\left(A_1'' + A_2''\frac{x}{r} + A_3''\frac{y}{r} + A_4''\frac{\omega}{r^2}\right) -$$

$$-\frac{h^2}{3(1+\sigma)r^2} A_4 \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right) + \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2} K$$

где

$$K = \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\partial t_2}{\partial \beta} - \frac{n_2}{R} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial \alpha^2}\right)$$

Величина K представляет собой линейную комбинацию A_i и некоторого числа их производных по α. Имея это в виду, помня, что система функций $(1, x, y, \omega)$ взаимно ортогональна с весом η, и пользуясь обозначениями (2.7), можно упомянутую систему уравнений записать в виде

$$
\begin{gathered}
-\frac{I_y}{2hr^2} A_2'' - \frac{h^2}{3(1+\sigma)r^2} \int_0^{\beta_0} x \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right] d\beta\, A_4 + \\
+ \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\left[\sum_{k=1}^{5} a_{1k} A_k + \cdots\right] = 0 \\
-\frac{I_x}{2hr^2} A_3'' - \frac{h^2}{3(1+\sigma)r^2} \int_0^{\beta_0} y \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right] d\beta\, A_4 + \\
+ \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\left[\sum_{k=1}^{5} a_{2k} A_k + \cdots\right] = 0 \\
-\frac{I_\omega}{2hr^3} A_4'' - \frac{h^2}{3(1+\sigma)r^2} \int_0^{\beta_0} \omega \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right] d\beta\, A_4 + \\
+ \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\left[\sum_{k=1}^{5} a_{3k} A_k + \cdots\right] = 0 \\
-A_5'' - \frac{h^2}{3(1+\sigma)r^2}\left[\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right]_{\beta=0} A_4 + \\
+ \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\left[\sum_{k=1}^{5} a_{4k} A_k + \cdots\right] = 0 \\
-\frac{F}{2hr} A_1'' - \frac{h^2}{3(1+\sigma)r^2}\left[\frac{\partial}{\partial \beta} R \frac{\partial \eta^3}{\partial \beta} + \frac{2}{R}\eta^3\right]_{\beta=\beta_0} A_4 - A_5'' - \\
- \frac{h^2}{3(1-\sigma^2)r^2}\left[\sum_{k=1}^{5} a_{5k} A_k + \cdots\right] = 0
\end{gathered}
\tag{5.10}
$$

Точками отмечены члены, содержащие производные от A_i; они играют второстепенную роль по сравнению с A_i, так как последние по предположению уменьшаются при дифференцировании.

Считая возможным отбросить эти невыписанные члены, мы придем к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами десятого порядка. Частными интегралами ее будут функции вида

$$\exp\left(\pm\, p_i \frac{h}{r}\, \alpha\right) \qquad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, 5)$$

Величины p_i, которые можно считать положительными, целиком определяются видом поперечного сечения оболочки и не зависят от отношения h/r.

Остановимся на тех решениях системы (5.10), которые получаются если в аргументе экспоненциальной функции избрать нижние знаки. Они будут, очевидно, соответствовать напряженным состояниям, затухающим с возрастанием α.

От очертания поперечного сечения оболочки будут в известной мере зависеть и скорости затухания этих решений по переменной α. Можно высказать только общее соображение, что скорость будет уменьшаться вместе с h/r. Это и является основным свойством медленно затухающих интегралов (в терминологии предыдущего параграфа эти интегралы имеют коэффициент затухания $\varkappa = 1$).

Оболочки, в которых медленно затухающие напряженные состояния следует рассматривать как основные напряженные состояния, мы будем называть стержнями средней длины. Математически стержень средней длины определяется требованием

$$\frac{1}{a} \leqslant \exp\left[\pm \bar{p}\, \frac{h}{r}\, \frac{l}{2}\right] \leqslant a \tag{5.11}$$

где a — число, не сильно отличающее от 1, а $\bar{p}$ — наибольшая из величин p_i. Этим требованием гарантируется, что решения уравнения (5.10), а следовательно, и соответствующие им напряженные состояния не окажутся местными, т. е. не успеют затухнуть к средним сечениям оболочки.

В предыдущем параграфе было показано, что, начиная с достаточно большой относительной длины, оболочка по характеру своего основного напряженного состояния перестает отличаться от сплошного стержня. Такую оболочку мы назовем длинным стержнем. Она, очевидно, не требует специального рассмотрения. В промежутке между коротким и длинным стержнями должен находится стержень средней длины, который характеризуется тем, что в нем основное напряженное состояние является переходным от рассматриваемого в этом параграфе к тому, которое имеет место в сплошном стержне.

При этом решения типа (б) не претерпевают существенных изменений, так как они соответствуют случаям, когда напряжения в поперечных сечениях оболочки подчиняются закону плоскости, а такого рода решения имеют место и при $\varkappa = \infty$. Предельный переход сводится к тому, что показательный закон изменения искомых величин в продольном направлении вырождается в линейный. В противоположность этому решение типа (г) изменяется радикально. Это решение переходит, очевидно, в тот интеграл предельной (при $\varkappa = \infty$) системы уравнений, которому соответствует сен-венаново кручение оболочки

$$rRS_1 = H_1 = -H_2 = \text{const}$$

Ниже будет показано, что в коротком стержне H_1/r и H_2/r по абсолютным величинам меньше, нежели S_1 и S_2, поэтому можно сказать, что в стержне средней длины происходит переход от основного напряженного состояния, в котором величины $|H_1|/r$ и $|H_2|/r$ меньше $|S_1|$ и $|S_2|$, к основному напряженному состоянию, в котором $|H_1|/r$ и $|H_2|/r$ становятся соизмеримыми $|S_1|$.

Построение теории тонкостенных стержней средней длины, равно как и установление соответствующих границ относительной длины оболочки упирается в необходимость более детального качественного исследования системы (5.10). Отметим, что в теории, предложенной В. З. Власовым [1], если пересказывать ее в наших терминах, вопрос об оболочках средней длины решен путем замены системы (5.10) приближенными уравнениями:

$$A_1'' = A_2'' = A_3'' = 0, \qquad \frac{EI_\omega}{r^2} A_4'' - GI_d A_4 = 0 \tag{5.12}$$

причем последнее соотношение получено из условий уравновешенности моментов от сдвигающих усилий S_1 (первое слагаемое левой части) и от крутящих моментов H_1 (второе слагаемое). Это, очевидно, предполагает, что $|H_1|/r$ и $|S_1|$ соизмеримы по величине, как и должно быть на самом деле в стержне средней длины.

Помимо того, что законность перехода от (5.10) к (5.12) неясна, этот пункт в теории В. З. Власова вызывает сомнения потому, что, с одной стороны, он предполагает соизмеримость $|H_1|/r$ и $|S_1|$, а с другой стороны, принимается закон парности касательных усилий, который при этих обстоятельствах стоит в явном противоречии с шестым уравнением равновесия.

Дальнейшее изложение относится к теории коротких стержней. Относительная длина их ограничена неравенством (5.11) и зависит не только от h/r, но в какой-то степени и от геометрического очертания поперечного сечения, поскольку в (5.11) входит величина $\bar{p}$.

Решение системы (5.10) для такого стержня можно упростить, если несколько усилить неравенство (5.11) и считать $\bar{p}h/r$ настолько малой величиной, что в интервале $(0, l)$ функция $\exp(\bar{p}\alpha h/r)$ может быть с достаточной точностью аппроксимирована линейной функцией, т. е., если неравенство (5.11) заменить таким:

$$\frac{\bar{p}^2 h^2 l^2}{2r^2} \ll 1$$

При этом система (5.10) приведется к виду

$$A_1'' = A_2'' = A_3'' = A_4'' = A_5'' = 0 \tag{5.13}$$

а ее интегралы будут

$$A_i = \alpha a_i + b \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$$

Тогда в соответствии с формулами (5.2) и (5.3) усилия T_1 и S_2 выразятся формулами

$$T_1 = \alpha \frac{\partial f_1}{\partial \beta} + f_2, \qquad S_2 = f_1 \tag{5.14}$$

где f_1, f_2 — функции переменной β, имеющие такой вид:

$$\begin{gathered} f_1 = a_1 \int\limits_0^\beta \eta d\beta + a_2 \int\limits_0^\beta \frac{x}{r} \eta d\beta + a_3 \int\limits_0^\beta \frac{y}{r} \eta d\beta + a_4 \int\limits_0^\beta \frac{\omega}{r^2} \eta d\beta + a_5 \\ f_2 = b_1 \eta + b_2 \frac{x}{r} \eta + b_3 \frac{y}{r} \eta + b_4 \frac{\omega}{r^2} \eta \end{gathered} \tag{5.15}$$

Для остальных усилий и моментов имеем формулы (5.4), (5.5). Правые части этих соотношений содержат малые множители h^2/r^2 и величины g_1, g_2, h_{12}, n_1, n_2, t_2, которые будут вследствие (5.13) линейно меняться по α, так же как и усилие T_1.

Можно поэтому утверждать, что напряжения от изгибающих моментов, перерезывающих усилий и нормальных усилий T_2 будут значительно меньше напряжений от T_1. Однако, как вытекает из (5.4), крутящие моменты при $A_4 \neq 0$, вообще говоря, не будут подчиняться этому правилу.

Действительно, если отбросить в формуле (5.4) второстепенную величину $\partial h_{12}/\partial\alpha$ и считать все a_i и b_i, за исключением a_4, равными нулю и подсчитать $\sigma(H_1)$ и $\sigma(T_1)$ — напряжения от крутящих моментов и нормальных усилий, то получим

$$\frac{\sigma(H_1)}{\sigma(T_1)} = \pm \eta \frac{r^2}{\omega} \frac{h}{r} \frac{\alpha}{2}$$

Эти величина даже для короткого стержня не всегда будет пренебрежимо малой.

Отсюда вытекает следствие, что короткий тонкостенный стержень работает, как оболочка, в которой возникает безмоментное напряженное состояние, дополненное наличием крутящих моментов, в то время как изгибающие моменты отсутствуют.

В связи с этим необходимо проверить, можно ли пользоваться законом парности касательных усилий. Для этого в тех же предположениях, что и выше, вычислим упомянутые величины и составим их отношение. Имеем

$$\frac{H_1}{rS_1} = \frac{h^2 \eta^3 \alpha^2}{6(1+\sigma) r^2 \int \frac{\omega}{r^2} \eta\, d\beta}$$

Эта величина значительно меньше единицы, если только $\overline{p}$ и

$\int \omega\eta \, d\beta / r^2$ не слишком малы, так что закон парности касательных усилий в коротких стержнях выполняется.

Вернемся к формулам для тангенциальных усилий и заменим соотношение (5.5) условием парности касательных усилий

$$S_1 + S_2 = 0$$

Отсюда при помощи (5.14) и (5.15) получим

$$T_1 = \alpha \left[a_1 + a_2 \frac{x}{r} + a_3 \frac{y}{r} + a_4 \frac{\omega}{r^2} \right] \eta + \left[b_1 + b_2 \frac{x}{r} + b_3 \frac{y}{r} + b_4 \frac{\omega}{r^2} \right] \eta$$

$$S_1 = -S_2 = -a_1 \int_0^\beta \eta \, d\beta - a_2 \int_0^\beta \frac{x}{r} \eta \, d\beta - a_3 \int_0^\beta \frac{y}{r} \eta \, d\beta - a_4 \int_0^\beta \frac{\omega}{r^2} \eta \, d\beta - a_5$$

Мы видим, что напряжение в поперечных сечениях тонкостенного стержня зависит от девяти констант. Из них a_1 и a_5 определяют значения усилия S_2 у прямолинейных краев оболочки, так как в силу соотношений ортогональности (2.10) коэффициенты при a_2, a_3, a_4 в выражении для S_2 обращаются в нули при $\beta = 0$ и $\beta = \beta_0$. Считая для простоты, что продольные силы на прямолинейных краях отсутствуют, мы должны положить

$$a_1 = a_5 = 0$$

Пять констант a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 имеют простой физический смысл: они определяют такие напряженные состояния в оболочке, при которых она работает как сплошной стержень, а именно, b_1 дает растяжение; b_2, b_3 дают чистый изгиб краевыми моментами соответственно относительно главных осей Y и X; a_2, a_3 дают изгиб поперечными силами, направленными соответственно по главным осям Y и X.

Две оставшиеся константы a_4 и b_4 соответствуют напряженным состояниям, отличным от тех, которые возникают в сплошных стержнях, а именно, a_4 дает кручение, которое следует отличать от сен-венанова кручения, так как оно вызывается сдвигающими силами, а не крутящими моментами, b_4 дает напряженное состояние, которое мы будем называть секториальным, подчеркивая этим, что в нем, как и при упомянутом выше кручении, нормальные напряжения распределены по закону секториальных площадей.

Последнее напряженное состояние является принципиально новым. Вызывающие его силы, приложенные к концевым сечениям стержня, являются самоуравновешенными на каждом конце в отдельности.

Введем обозначения

$$r \int_0^{\beta_0} T_1 d\beta = N, \quad r \int_0^{\beta_0} T_1 x d\beta = -M_y, \quad r \int_0^{\beta_0} T_1 y d\beta = M_x$$
$$r \int_0^{\beta_0} T_1 \omega d\beta = B, \quad \int_0^{\beta_0} S_1 dx = Q_x, \quad \int_0^{\beta_0} S_1 dy = Q_y, \quad \int_0^{\beta_0} S_1 d\omega = M_\omega \tag{5.16}$$

где N, M_x, M_y, Q_x, Q_y — статические факторы, известные из теории сплошных стержней: N — растягивающая сила, M_x, M_y — главные изгибающие моменты, Q_x, Q_y — перерезывающие силы, действующие по главным направлениям. Величины B и M_ω в теории сплошных стержней не фигурируют: B — изгибно-крутящий бимомент (термин В. З. Власова) — силовой фактор, статически эквивалентный нулю, который можно представить себе как пару моментов, M_ω — крутящий момент, обусловленный сдвигающими усилиями S_1; его, вновь пользуясь терминологией В. З. Власова, мы назовем изгибно-крутящим, чтобы отличить от крутящего момента, возникающего вследствие неравномерности распределения сдвигающих напряжений по толщине стенки оболочки.

Величины, введенные формулами (5.16), связаны с константами a_i и b_k формулами, вытекающими из условий ортогональности (2.10):

$$N = \frac{F}{2h} b_1, \qquad -M_y = \frac{I_y}{2hr}(a_2\alpha + b_2)$$

$$M_x = \frac{I_x}{2hr}(a_3\alpha + b_3), \qquad B = \frac{I_\omega}{2hr^2}(a_4\alpha + b_4)$$

Представив M_x, M_y, M_ω в виде

$$M_x = M_x^{(0)} + \alpha M_x^{(1)}, \qquad M_y = M_y^{(0)} + \alpha M_y^{(1)}$$
$$B = B^{(0)} + \alpha B^{(1)} \tag{5.16'}$$

можно написать

$$a_1 = 0, \qquad a_2 = -\frac{2hr}{I_y} M_y^{(1)}, \quad a_3 = \frac{2hr}{I_x} M_x^{(1)}, \quad a_4 = \frac{2hr^2}{I_\omega} B^{(1)}, \quad a_5 = 0$$

$$b_1 = \frac{2h}{F} N, \quad b_2 = -\frac{2hr}{I_y} M_y^{(0)}, \quad b_3 = \frac{2hr}{I_x} M_x^{(0)}, \quad b_4 = \frac{2hr^2}{I_\omega} B^{(0)} \tag{5.17}$$

С другой стороны,

$$a_2 = \frac{2hr^2}{I_y} Q_x, \qquad a_3 = \frac{2hr^2}{I_x} Q_y, \qquad a_4 = \frac{2hr^3}{I_\omega} M_\omega$$

Отсюда следует,

$$M_y^{(1)} = -rQ_x, \qquad M_x^{(1)} = rQ_y, \qquad B^{(1)} = rM_\omega$$

Первые две из этих формул выражают условия уравновешенности произвольной части стержня, взятого между начальным сечением $\alpha = 0$ и другим произвольным сечением.

Третьей формулой устанавливается связь между изгибно-крутящим бимоментом и изгибно-крутящим моментом.

Это соотношение, однако, не вытекает из отвлеченных статических соображений, как первые два, а является отображением определенных свойств цилиндрических оболочек.

§ 6. Перемещения тонкостенных стержней. Перемещения оболочки-стержня можно найти, пользуясь геометрическими соотношениями

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \alpha}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R}\right), \qquad \gamma = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)$$

Пусть T_1 и S_2 определены формулами (5.14), а $T_2 = 0$, как это с известной степенью приближения следует из (5.5).

Тогда

$$2Eh\eta\varepsilon_1 = T_1 = 2Eh\eta\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \alpha\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + f_2$$

$$2Eh\eta\varepsilon_2 = -\sigma T_1 = 2Eh\eta\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{w}{R}\right) = -\sigma\left(\alpha\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + f_2\right)$$

$$2Eh\eta\frac{\gamma}{2} = -(1+\sigma)S_2 = 2Eh\eta\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial \alpha}\right) = -(1+\sigma)f_1$$

Или, если решить эти уравнения относительно u, v, w, получим

$$\frac{2Eh}{r}u = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \alpha f_2\right) + \frac{2Eh}{r}\psi_1$$

$$\frac{2Eh}{r}v = -\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{\eta}\frac{\partial f_1}{\partial \beta} - \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{f_2}{\eta} - 2(1+\sigma)\alpha\frac{f_1}{\eta} - \frac{2Eh}{r}\left(\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} - \psi_2\right)$$

$$\frac{2Eh}{r}w = -R\left[\frac{\alpha^3}{3!}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\frac{f_2}{\eta} + 2(1+\sigma)\alpha\frac{\partial}{\partial \beta}\frac{f_1}{\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{2Eh}{r}\left(\alpha\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \psi_1}{\partial \beta}\right)\right] + \sigma R\left(\alpha\frac{1}{\eta}\frac{\partial f_1}{\partial \beta} + \frac{1}{\eta}f_2\right) \tag{6.1}$$

где ψ_1, ψ_2 — произвольные функции интегрирования, зависящие только от величины β.

Чтобы выяснить геометрический смысл функций ψ_1 и ψ_2 положим

$$f_1 = f_2 = 0$$

Тогда

$$u = \psi_1, \qquad v = -\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} + \psi_2, \qquad \frac{w}{R} = -\alpha\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \beta^2} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \beta}$$

$$2Eh\varepsilon_1 = 0, \qquad 2Eh\varepsilon_2 = 0, \qquad 2Eh\gamma = 0$$

$$2Eh\varkappa_1 = 0, \qquad 2Eh\varkappa_2 = -\frac{2Eh}{r}\frac{\partial}{\partial \beta}L\left(\alpha\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta} - \psi_2\right) \tag{6.2}$$

$$2Eh\tau = -\frac{2Eh}{r}L\frac{\partial \psi_1}{\partial \beta}$$

Это соответствует бесконечно малым изгибаниям срединной поверхности (деформации, сохраняющей геометрию на срединной поверхности).

Произволы, заключенные в функциях ψ_1, ψ_2, дают возможность удовлетворить геометрическим граничным условиям, однако, выбирая ψ_1, ψ_2, надо сохранить соответствие между геометрическими и статическими результатами. Это сводится к требованию, чтобы деформации $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, а вместе с ними и изгибающие моменты обратились в нули, так как в основном напряженном состоянии короткого стержня крутящие моменты должны преобладать над изгибающими.

Формулы (6.2) показывают, что для этого надо потребовать выполнения двух равенств:

$$\frac{\partial}{\partial\beta} L \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\beta} L\psi_2 = 0 \tag{6.3}$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\psi_1 = c_1 + c_2 \frac{x}{r} + c_3 \frac{y}{r} + c_4 \frac{\omega}{r^2} \\ \psi_2 = \frac{d_1}{r} \frac{\partial x}{d\beta} + \frac{d_2}{r} \frac{dy}{d\beta} + \frac{d_3}{r^2} \frac{d\omega}{d\beta}\end{gathered} \tag{6.4}$$

Остаются неопределенными семь постоянных c_i и d_k. Шесть из них c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 соответствуют смещению оболочки как жесткого целого. Это следует из того, что при $c_4 = 0$ функция ψ_1, определенная первым из равенств (6.4), помимо второго уравнения (6.3) удовлетворяет также уравнению

$$L \frac{\partial\psi_1}{\partial\beta} = 0$$

и все шесть компонент деформации оказываются равными нулю.

Констапта c_4 определяет новый геометрический фактор — депланацию (термин В. З. Власова). Основанием для принятия такого названия является то, что при $c_4 \neq 0$ поперечные сечения стержня перестают быть плоскими.

Функциями ψ_1, ψ_2, если их задать формулами (6.4), определяются такие изгибания срединной поверхности (в их число включаются и тривиальные изгибания, т. е. движения оболочки как жесткого целого), которые либо вовсе не сопровождаются появлением моментов, либо вызывают только крутящие моменты.

Всякие другие изгибания при построении теории тонкостенных стержней надо отбросить, так как они, согласно результатам предыдущего параграфа, либо соответствуют местным напряженным состояниям, либо обязательно будут сопровождаться появлением сил и моментов на прямолинейных краях.

Внесем выражения (6.4) для ψ_1 и ψ_2 в формулы (6.2) для тангенциальных смещений u, v. Имеем

$$\begin{gathered}u = c_1 + c_2 \frac{x}{r} + c_3 \frac{y}{r} + c_4 \frac{\omega}{r^2} \\ v = -\alpha \left[\frac{c_2}{r} \frac{dx}{d\beta} + \frac{c_3}{r} \frac{dy}{d\beta} + \frac{c_4}{r^2} \frac{d\omega}{d\beta} \right] + \frac{d_1}{r} \frac{dx}{d\beta} + \frac{d_2}{r} \frac{dy}{d\beta} + \frac{d_3}{r^2} \frac{d\omega}{d\beta}\end{gathered} \tag{6.5}$$

Пользуясь тем, что система функций $(1, x, y, \omega)$ взаимно ортогональна с весом η, получим

$$c_1 = \frac{2hr}{F}\int_0^{\beta_0} u\eta\, d\beta, \qquad c_2 = \frac{2hr^2}{I_y}\int_0^{\beta_0} ux\eta\, d\beta$$

$$c_3 = \frac{2hr^2}{I_x}\int_0^{\beta_0} uy\eta\, d\beta, \qquad c_4 = \frac{2hr^2}{I_\omega}\int_0^{\beta_0} u\omega\eta\, d\beta$$

$$-\alpha c_2 + d_1 = \frac{2hr^2}{I_y}\int_0^{\beta_0} x\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta, \qquad -\alpha c_3 + d_2 = \frac{2hr^2}{I_x}\int_0^{\beta_0} y\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta$$

$$-\alpha c_4 + d_3 = \frac{2hr^3}{I_\omega}\int_0^{\beta_0} \omega\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta$$

Введем обозначения

$$2hr\int_0^{\beta_0} u\eta\, d\beta = F\zeta, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} ux\eta\, d\beta = I_y\vartheta_y$$

$$2hr\int_0^{\beta_0} uy\eta\, d\beta = I_x\vartheta_x, \qquad 2hr\int_0^{\beta_0} u\omega\eta\, d\beta = I_\omega\vartheta_\omega \tag{6.6}$$

$$2hr^2\int_0^{\beta_0} x\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta = I_y\xi_x, \qquad 2hr^2\int_0^{\beta_0} y\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta = I_x\xi_y$$

$$2hr^2\int_0^{\beta_0} \omega\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta = I_\omega\theta$$

Тогда формулы для тангенциальных смещений можно записать так:

$$u = \zeta + \vartheta_y x + \vartheta_x y + \vartheta_\omega \omega \qquad v = \frac{\xi_x}{r}\frac{dx}{d\beta} + \frac{\xi_y}{r}\frac{dy}{d\beta} + \frac{\theta}{r}\frac{d\omega}{d\beta} \tag{6.7}$$

Отсюда становится ясным геометрический смысл принятых обозначений: ζ — смещение в направлении оси цилиндра, ϑ_x, ϑ_y — углы поворота относительно главных осей X и Y, лежащих в плоскости $\alpha = 0$, ξ_x, ξ_y — смещения в направлении главных осей X и Y, θ — угол поворота относительно оси, проходящей через центр вращения, ϑ_ω — депланация, заключающаяся в выходе поперечного сечения из плоскости по определенному закону.

Если оболочка испытывает какое-либо произвольное изгибание, то понятие смещения ее как жесткого целого теряет смысл. Мы, однако, формально введем это понятие, приняв, что формулами (6.6) из произвольного изгибания оболочки выделяются смещения ее как жесткого целого и депланация.

Результаты этого параграфа сводятся к тому, что при построении теории тонкостенных стержней два изгиба, дающие одинаковые жесткое смещение и депланацию, следует считать эквивалентными друг другу.

§ 7. Граничные условия. В предыдущих параграфах из общей совокупности интегралов теории цилиндрических оболочек было выделено некоторое число элементарных интегралов, использованием которых надо ограничиться при построении теории тонкостенных стержней. Естественно, что при этом нельзя требовать, чтобы со всей строгостью удовлетворялись граничные условия. Некоторые граничные условия надо отбросить совсем, а те, которые сохраняются, надо ставить в смягченной форме, сводящейся к тому, что функциональные граничные условия, при которых значение искомых функций задается в каждой точке граничного контура, заменяются требованиями, чтобы на границах выполнялись определенные интегральные соотношения.

В отношении статических граничных условий это достигается при помощи формул (5.16). Вместо условия

$$S_1 = S_{10}$$

где S_{10} — заданная функция β, надо требовать, чтобы перерезывающие силы Q_x, Q_y и изгибно-крутящий момент M_ω имели заданные значения; это дает

$$\int_0^{\beta_0} S_1\,dx = Q_{x0}, \qquad \int_0^{\beta_0} S_1\,dy = Q_{y0}, \qquad \int_0^{\beta_0} S_1\,d\omega = M_{\omega 0}$$

Вместо условия $T_1 = T_{10}$ надо требовать, чтобы растягивающая сила N, изгибающие моменты M_x, M_y и изгибно-крутящий бимомент B имели заданное значение; это дает

$$r\int_0^{\beta_0} T_1\,d\beta = N_0, \qquad r\int_0^{\beta_0} T_1 x\,d\beta = -M_{y0}$$

$$r\int_0^{\beta_0} T_1 y\,d\beta = M_{x0}, \qquad r\int_0^{\beta_0} T_1 \omega\,d\beta = B_0$$

Граничные условия, накладываемые на моменты и перерезывающие силы, можно отбросить, так как они влияют только на краевой эффект [7]. Разумеется, если на оболочку передается несамоуравновешенная нагрузка при помощи перерезывающих сил или моментов, то ее надо учесть при подсчете величин Q_{x0}, Q_{y0}, $M_{\omega 0}$, N_0, M_{x0}, M_{y0}, B_0.

При постановке геометрических граничных условий можно использовать аналогичный прием.

Вместо граничного условия $u = u_0$ надо ставить требование, чтобы ζ, ϑ_x, ϑ_y и ϑ_ω имели в краевом поперечном сечении заданные значения, т. е. согласно формулам (6.6), чтобы выполнялись интегральные равенства

$$\frac{2hr}{F}\int_0^{\beta_0} u\eta\,d\beta = \zeta_0, \qquad \frac{2hr}{I_y}\int_0^{\beta_0} ux\eta\,d\beta = \vartheta_y$$

$$\frac{2hr}{I_x}\int_0^{\beta_0} uy\eta\,d\beta = \vartheta_{x0}, \qquad \frac{2hr}{I_\omega}\int_0^{\beta_0} u\omega\eta\,d\beta = \vartheta_{\omega 0}$$

Равным образом граничное условие $v = v_0$ заменяется тремя интегральными соотношениями:

$$\frac{2hr^2}{I_y}\int_0^{\beta_0} x\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta = \xi_{x0}, \qquad \frac{2hr^2}{I_x}\int_0^{\beta_0} y\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta = \xi_{y0}$$

$$\frac{2hr^2}{I_\omega}\int_0^{\beta_0} \omega\eta\, d\beta \int_0^{\beta} v\, d\beta = \theta_0$$

Условия, накладываемые на нормальное смещение и угол поворота, как правило, влияют только на краевой эффект и потому их можно не принимать во внимание. Исследование исключительных случаев, которые едва ли могут встретиться на практике, отвлекло бы нас слишком далеко в сторону.

Заменяя функциональные граничные условия интегральными, мы заменяем действительную краевую нагрузку (включая в ее состав и реактивные силы) другой статически эквивалентной ей нагрузкой, которая дает, кроме того, такой же изгибно-крутящий бимомент. Раз ность между этими двумя нагрузками вызывает местные напряженные состояния, не учитываемые в теории стержней.

В пределах точности рассматриваемой теории граничные условия могут быть заменены интегральными соотношениями и другими способами. Примененный здесь подход следует предпочесть только благодаря его простоте и физической ясности.

§ 8. Общие формулы теории тонкостенных открытых стержней средней длины. Мы располагаем теперь всем необходимым материалом, чтобы приступить к составлению основных формул теории тонкостенных стержней. Пусть стержень загружен произвольными поверхностной поперечной нагрузкой и краевыми силами. Частный интеграл, обусловленный поверхностной нагрузкой, выражается формулами (3.9). По этим усилиям, так же как это было сделано в § 6, можно найти перемещения. Для тангенциальных смещений получим формулы

$$u^* = -\frac{r^3}{E}\left[\frac{P_x}{I_y}x + \frac{P_y}{I_x}y + \frac{M}{I_\omega}\omega\right]\int_0^{\alpha} d\alpha\int_0^{\alpha} d\alpha\int_0^{\alpha}\xi(\alpha)\, d\alpha$$

$$v^* = +\frac{r^3}{E}\left[\frac{P_x}{I_y}\frac{dx}{d\beta} + \frac{P_y}{I_x}\frac{dy}{d\beta} + \frac{M}{I_\omega}\frac{d\omega}{d\beta}\right]\int_0^{\alpha} d\alpha\int_0^{\alpha} d\alpha\int_0^{\alpha} d\alpha\int_0^{\alpha}\xi(\alpha)\, d\alpha +$$

$$+\frac{2(1+\sigma)r^3}{E}\left[\frac{P_x}{I_y}\frac{1}{\eta}\int_0^{\beta} x\eta\, d\beta + \frac{P_y}{I_x}\frac{1}{\eta}\int_0^{\beta} y\eta\, d\beta + \frac{M}{I_\omega}\frac{1}{\eta}\int_0^{\beta}\omega\eta\, d\beta\right]\int_0^{\alpha} d\alpha\int_0^{\alpha}\xi(\alpha)\, d\alpha \quad (8.1)$$

Присоединив этот частный интеграл, обусловленный поперечной поверхностной нагрузкой, к перемещениям (6.1), вызываемым краевыми нагрузками, получим полное смещение. Имея полное смещение, можно подсчитать компоненты жесткого смещения и депланацию, пользуясь определением этих величин, вытекающим из формул (6.6)·

Если при этом использовать также и обозначения (5.16) и (5.17), то можно основные соотношения теории тонкостенных стержней представить в виде (при выкладках надо пользоваться формулами § 2)

$$\zeta = \alpha r \frac{N}{EF} + c_1 \tag{8.2}$$

$$\vartheta_y = \frac{\alpha^2}{2!} r^2 \frac{Q_x}{EI_y} - \alpha r \frac{M_y^{(0)}}{EI_y} - \frac{r^3 P_x}{EI_y} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi(\alpha)\, d\alpha + \frac{c_2}{r} \tag{8.3}$$

$$\vartheta_x = \frac{\alpha^2}{2!} r^2 \frac{Q_y}{EI_x} + \alpha r \frac{M_x^{(0)}}{EI_x} - r^3 \frac{P_y}{EI_x} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi(\alpha)\, d\alpha + \frac{c_3}{r} \tag{8.4}$$

$$\vartheta_\omega = \frac{\alpha^2}{2!} r^2 \frac{M_\omega}{EI_\omega} + \alpha r \frac{B^{(0)}}{EI_\omega} - r^3 \frac{M}{EI_\omega} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi(\alpha)\, d\alpha + \frac{c_4}{r^2}, \tag{8.5}$$

$$\begin{gathered}\xi_x = -\frac{\alpha^3}{3!} r^3 \frac{Q_x}{EI_y} + \frac{\alpha^2}{2!} r^2 \frac{M_y^{(0)}}{EI_y} - 2(1+\sigma)\alpha r^3 \left(\frac{S_{xx}}{I_y}\frac{Q_x}{EI_y} + \frac{S_{xy}}{I_y}\frac{Q_y}{EI_x} + \right. \\ \left. + \frac{S_{x\omega}}{I_y}\frac{M_\omega}{EI_\omega}\right) + r^4 \frac{P_x}{EI_y} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi(\alpha)\, d\alpha + \\ + r^4 2(1+\sigma)\left[\frac{P_x}{EI_y}\frac{S_{xx}}{I_y} + \frac{P_y}{EI_x}\frac{S_{xy}}{I_y} + \frac{M_\omega}{EI_\omega}\frac{S_{x\omega}}{I_y}\right] \int d\alpha \int \xi\, d\alpha - \alpha c_2 + d_1\end{gathered} \tag{8.6}$$

$$\begin{gathered}\xi_y = -\frac{\alpha^3}{3!} r^3 \frac{Q_y}{EI_x} + \frac{\alpha^2}{2!} r^2 \frac{M_x^{(0)}}{EI_x} - 2(1+\sigma)\alpha r^3 \left(\frac{S_{yx}}{I_x}\frac{Q_x}{EI_y} + \right. \\ \left. + \frac{S_{yy}}{I_x}\frac{Q_y}{EI_x} + \frac{S_{y\omega}}{I_x}\frac{M_\omega}{EI_\omega}\right) + r^4 \frac{P_y}{EI_x} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi(\alpha)\, d\alpha + \\ + r^4 2(1+\sigma)\left(\frac{P_x}{EI_y}\frac{S_{yx}}{I_x} + \frac{P_y}{EI_x}\frac{S_{yy}}{I_x} + \frac{M}{EI_\omega}\frac{S_{y\omega}}{I_x}\right) \int d\alpha \int \xi\, d\alpha - \alpha c_3 + d_2\end{gathered} \tag{8.7}$$

$$\begin{gathered}\theta = -\frac{\alpha^3}{3!} r^3 \frac{M_\omega}{EI_\omega} - \frac{\alpha^2}{2!} r^2 \frac{B^{(0)}}{EI_\omega} - 2(1+\sigma)\alpha r^3 \left(\frac{S_{\omega x}}{I_\omega}\frac{Q_x}{EI_y} + \frac{S_{\omega x}}{I_\omega}\frac{Q_y}{EI_x} + \right. \\ \left. + \frac{S_{\omega\omega}}{I_\omega}\frac{M_\omega}{EI_\omega}\right) - r^4 \frac{M}{EI_\omega} \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi(\alpha)\, d\alpha + r^4 2(1+\sigma)\left[\frac{M}{EI_x}\frac{S_{\omega\omega}}{I_\omega} + \right. \\ \left. + \frac{P_x}{EI_y}\frac{S_{\omega x}}{I_\omega} + \frac{P_y}{I_x}\frac{S_{\omega y}}{I_\omega}\right] \int_0^\alpha d\alpha \int_0^\alpha \xi\, d\alpha - \alpha \frac{c_4}{r} + \frac{d_3}{r}\end{gathered} \tag{8.8}$$

Здесь помимо уже известных обозначений использованы новые:

$$S_{AB} = 2hr \int_0^{\beta_0} A\eta\, d\beta \int_0^\beta \frac{d\beta}{\eta} \int_0^\beta B\eta\, d\beta \tag{8.9}$$

причем A и B следует заменить любой комбинацей x, y, ω.

Формулы (8.2), (8.3), (8.4) ничем не отличаются от соотношений теории сплошных стержней. Первая из них связывает продольное смещение ζ с нормальной силой N. Два последних равенства устанавливают зависимость между углами поворота ϑ_x, ϑ_y, с одной стороны, и перерезывающими силами Q_x, Q_y, изгибающими моментами $M_y^{(0)}$, $M_x^{(0)}$ и поверхностной поперечной нагрузкой — с другой. Если бы все величины S_{AB} были равны нулю, то формулы (8.6) и (8.7) также превратились бы в соотношения теории сплошных стержней. Ими тогда бы выражались прогибы ξ_α, ξ_β через перерезывающие силы, изгибающие моменты и поперечную нагрузку.

Отличие теории открытых тонкостенных стержней от теории сплошных стержней состоит, во-первых, в наличии членов, зависящих от S_{AB}, во-вторых, в теории тонкостенных стержней приходится считаться с новым статическим фактором — бимоментом, в-третьих, кручение тонкостенного стержня вызывается изгибно-крутящим моментом, статически эквивалентным крутящему моменту сен-венановой теории кручения, но имеющий существенно иное происхождение. Весьма важным является то, что депланация ϑ_ω и угол закручивания θ оба связаны одновременно с изгибно-крутящими моментом и бимоментом формулами (8.5) и (8.8) (не имеющими аналога в теории сплошных стержней). Отсюда вытекает, что ϑ_ω и θ тесно связаны друг с другом.

Легко проследить, что величины S_{AB} не будут фигурировать в основных формулах (8.2) — (8.8), если соотношение упругости (1.3) заменить требованием отсутствия сдвига $\gamma = 0$.

Таким образом, членами, содержащими величины S_{AB}, учитывается влияние сдвига. Эти члены, вообще говоря, играют второстепенную роль, так как содержат переменную α в более низких степенях, чем основные слагаемые, однако вопрос о том, какого порядка будут связанные с учетом сдвига поправки, требует дополнительного исследования.

Если принять гипотезу

$$\gamma = 0$$

то решение конкретных задач становится значительно проще. В этом случае соотношения (8.2) — (8.8) будут почти полностью совпадать с формулами, выведенными В. З. Власовым. Отличным будет только равенство (8.8). У В. З. Власова оно более сложно, причем, как указывалось выше, уточнение В. З. Власова достигнуто формально противоречивым приемом.

В заключение этого параграфа сделаем еще одно замечание. Частный интеграл (3.9) отвечает некоторому фиктивному загружению R_1 оболочки, статически эквивалентному в каждом поперечном сечении истинной нагрузке R. Разность между истинной и фиктивной нагрузками является самоуравновешенной нагрузкой R_2, действие которой было изучено во второй части § 3. Было показано, что соответствующим подбором произволов интегрирования для этой нагрузки (если она по переменной α меняется по линейному закону) можно указать частный интеграл, который в поперечных сечениях дает лишь усилия, статически эквивалентные нулю. Однако в теории тонкостенных стержней их игнорировать нельзя. Точнее говоря, из них необходимо выделить и учесть те усилия, которые меняются по закону секториальных площадей. Это можно сделать при помощи формул (3.18), согласно которым усилие T_1 имеет вид:

$$T_1 = 2Eh\eta\varepsilon_1 + \sigma T_2$$

а ε_1 в свою очередь может быть записано так:

$$\varepsilon_1 = B_1 + B_2\frac{x}{r} + B_3\frac{y}{r}$$

Функции B_1, B_2, B_3 подобраны так, что T_1 оказывается самоуравновешенным, т. е. выполняются интегральные равенства

$$r\int_0^{\beta_0} T_1\,d\beta = N = 0, \quad r\int_0^{\beta_0} T_1 x\,d\beta = -M_y = 0, \quad r\int_0^{\beta_0} T_1 y\,d\beta = M_x = 0$$

Бимомент B^* будет отличен от нуля и его можно вычислить:

$$B^* = r\int_0^{\beta_0} T_1\omega\,d\beta = \sigma r\int T_2\omega\,d\beta \tag{8.10}$$

Фигурирующее в этом вычислении усилие T_2 получается из расчета арки-полосы единичной ширины, вырезанной из оболочки и нагруженной нагрузкой R_2.

Бимомент B^* надо прибавить в формулах (8.2) — (8.8) к бимоменту $B^{(0)}$.

Поступила в редакцию
21 VI 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни. Стройиздат Наркомстроя. М. — Л. 1940.
2. Джанелидзе Г. Ю. и Пановко Я. Г. Статика упругих тонкостенных стержней. Серия «Современные проблемы механики». Гостехиздат. 1948.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935.
4. Гольденвейзер А. Л. Поправки и дополнения к теории тонких оболочек Лява. Сборник «Пластинки и оболочки». Госстройиздат. 1939.
5. Власов В. З. Строительная механика оболочек. ОНТИ. 1935.
6. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Военно-морская академия им. А. Н. Крылова. 1947.
7. Гольденвейзер А. Л. Влияние условий закрепления краев тонкой оболочки на ее напряженное состояние. МАП СССР. Труды № 669. 1948.