Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

К ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ СРЕДЫ ПРИ ЗАДАННЫХ ВНЕШНИХ СИЛАХ НА ЕЕ ГРАНИЦЕ

Д. И. Шерман

(Москва)

§ 1. В настоящей статье рассматриваются установившиеся колебания упругой среды, заполняющей конечную односвязную область S, лежащую в плоскости $z = x + iy$, при условии, что на кривой L, ограничивающей область, заданы действующие внешние силы.

Обход кривой L, как обычно, будем считать совершающимся против движения часовой стрелки и нормаль n к ней направим изнутри S вовне. За начало координат возьмем некоторую точку, лежащую в области S. Наконец, координаты точек L условимся считать достаточное число раз дифференцируемыми по дуге s.

Как известно, в случае установившихся колебаний среды продольный и поперечный потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям

$$\triangle\varphi + k_1{}^2\varphi = 0, \quad \triangle\psi + k_2{}^2\psi = 0 \qquad (1.1)$$

в которых $\triangle$ — оператор Лапласа,

$$k_1 = \frac{\lambda}{a}, \qquad k_2 = \frac{\lambda}{b} \qquad (1.2)$$

причем a и b — скорости распространения соответственно продольных и поперечных волн и λ — частота колебаний.

Для компонентов вектора смещения u и v, взятых соответственно по осям координат x и y, имеем

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad (1.3)$$

На основании этих равенств и закона Гука легко написать выражения для компонентов напряжений X_x, Y_y и X_y через потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Далее, по условию имеем на границе L

$$X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) = f_1(s), \quad X_y \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) = f_2(s) \qquad (1.4)$$

где $f_j(s)$ $(j = 1, 2)$ — некоторые заданные функции дуги s. Подставив сюда вместо компонентов X_x, Y_y и X_y их выражения через потенциалы $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, получим после простых преобразований следующие равенства на L:

$$\left\{2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - k_2{}^2\varphi\right\}\cos(n, x) + \left\{2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - k_2{}^2\psi\right\}\cos(n, y) = f_1{}^*(s)$$

$$\left\{2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) - k_2{}^2\psi\right\}\cos(n, x) -$$

$$- \left\{2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + (k_2{}^2 - 2k_1{}^2)\varphi\right\}\cos(n, y) = f_2{}^*(s) \qquad (1.5)$$

где

$$f_j{}^* = \frac{f_j}{b^2} \qquad (j = 1, 2) \qquad (1.6)$$

Таким образом, задача, которой мы здесь будем заниматься, заключается в определении $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$, удовлетворяющих (1.1) и условиям (1.5).

Примечание. Как легко видеть, равенства (1.5) можно преобразовать к виду

$$2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)-k_2^2\int_0^s\varphi\cos(n,x)\,ds_1-k_2^2\int_0^s\psi\cos(n,y)\,ds_1=\int_0^s f_1^*(s_1)\,ds_1+C_1$$
$$2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)-k_2^2\int_0^s\varphi\cos(n,y)\,ds_1+k_2^2\int_0^s\psi\cos(n,x)\,ds_1=\int_0^s f_2^*(s_1)\,ds_1+C_2 \qquad (1.7)$$

В дальнейшем мы будем пользоваться граничными условиями в форме (1.5).

§ 2. Продольный и поперечный потенциалы будем искать в виде

$$\varphi(x,y)=\int_L\{\nu_1(s)F_1^{(1)}(x,y;s)+\nu_2(s)F_2^{(1)}(x,y;s)\}\,ds$$
$$\psi(x,y)=\int_L\{\nu_1(s)F_1^{(2)}(x,y;s)+\nu_2(s)F_2^{(2)}(x,y;s)\}\,ds \qquad (2.1)$$

где так называемые плотности $\nu_j(s)$ $(j=1, 2)$ — новые неизвестные функции, s — дуга текущей точки $M(\xi, \eta)$, лежащей на L, и

$$F_1^{(1)}=A\left[\frac{\partial N(k_1 r)}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{J_0(k_1 r)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right)\right\}\right]+\frac{2J_1(k_1\rho)}{k_1^3}\cos\theta$$

$$F_2^{(1)}=A\left[\frac{\partial N(k_1 r)}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left\{J_0(k_1 r)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right)\right\}\right]+\frac{2J_1(k_1\rho)}{k_1^3}\sin\theta$$

$$F_1^{(2)}=B\frac{\partial N(k_2 r)}{\partial y}+C\frac{\partial}{\partial x}\left\{J_0(k_2 r)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right)\right\}$$

$$F_2^{(2)}=-B\frac{\partial N(k_2 r)}{\partial y}+C\frac{\partial}{\partial y}\left\{J_0(k_2 r)\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right)\right\}$$

причем $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, θ — полярный угол, и введены обозначения

$$N(k_j r)=N_0(k_j r)-J_0(k_j r)\ln k_j \qquad (j=1,2) \qquad (2.3)$$

в которых $J_0(k_j r)$ — функция Бесселя первого рода и нулевого порядка, а $N_0(k_j r)$ равна соответствующей функции Неймана, умноженной на величину $\pi/2$, далее $J_1(k_1\rho)$ — функция Бесселя первого рода и первого порядка и, наконец,

$$A=-\frac{1}{2\pi(k_1^2-k_2^2)},\qquad B=\frac{k_1^2-2k_2^2}{2\pi k_2^2(k_1^2-k_2^2)},\qquad C=\frac{k_1^2}{2\pi k_2^2(k_1^2-k_2^2)} \qquad (2.4)$$

Основную часть представлений (2.1) и (2.2) мы получили, следуя в несколько видоизмененной форме приему, указанному в статье [1]. Сначала для искомых потенциалов с помощью интегралов Фурье были найдены формально некоторые общие выражения и выделены из них главные члены, удовлетворяющие (в отличие от таковых же в названной статье и подобно тому как в статье[2]) соответственным волновым уравнениям[1]. Произведя затем в главных членах ряд допустимых упрощений, мы пришли к (2.1) и (2.2).

---

[1] Например, в случае, рассмотренном в статье [1], таковые нетрудно найти, разложив во втором интеграле (7) или (8) лишь функцию $\omega^{-1}(\alpha)$ по степеням α и заметив, что полученные при этом в форме интегралов главные члены совпадают с главными же членами некоторых распространенных от 0 до ∞ интегралов, выражаемых через специальные функции.

Примечание. Отметим, что видоизменяя используемый здесь прием и форму записи граничных условий (1.5), можно получить другие представления, отличные от (2.1) и (2.2).

Введем функции E_j, F_j, P_j, Q_j, G_j и T_j $(j=1, 2)$ согласно формулам

$$\frac{2J_1(k_1\rho)}{k_1^3}\cos\theta = \frac{x}{k_1^2} + E_1 = \frac{x}{k_1^2} - \frac{x(x^2+y^2)}{8} + F_1$$

$$\frac{2J_1(k_1\rho)}{k_1^3}\sin\theta = \frac{y}{k_1^2} + E_2 = \frac{y}{k_1^2} - \frac{y(x^2+y^2)}{8} + F_2$$

$$N(k_j r) = \ln r + P_j = \left(1 - \frac{k_j^2 r^2}{4}\right)\ln r + G_j$$

$$\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right)J_0(k_j r) = \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right) + Q_j =$$

$$= \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta-y}{\xi-x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right)\left(1 - \frac{k_j^2 r^2}{4}\right) + T_j \qquad (j=1, 2) \qquad (2.5)$$

При этом, очевидно, частные производные первого порядка от P_j, Q_j и частные производные третьего порядка от G_j, T_j по переменным x и y остаются непрерывными в замкнутой области S; кроме того, как нетрудно видеть, функции F_j со всеми производными обращаются в нуль при $\lambda = 0$ и

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial P_j}{\partial x} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial P_j}{\partial y} = \ldots = \lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial Q_j}{\partial y} = 0 \qquad (j=1, 2)$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^3 G_j}{\partial x^3} = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^3 G}{\partial x^2\partial y} = \ldots = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^3 T_j}{\partial y^3} = 0 \qquad (2.6)$$

Подставив теперь в граничные равенства (1.5) вместо функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ их выражения из формул (2.1) и принимая во внимание соотношения (2.5), получим для определения $\nu_j(s)$ $(j=1, 2)$ систему уравнений Фредгольма

$$\nu_j(s_0) + \int_L \{\nu_j(s)K_j^{(j)}(s, s_0) + \nu_{j+1}(s)K_{j+1}^{(j)}(s, s_0)\}\,ds = f_j^*(s_0) \qquad (j=1, 2) \qquad (2.7)$$

в которой индекс 3 нужно заменить на 1, s и s_0 — дуги соответственно точек $M(\xi, \eta)$ и $M(\xi_0, \eta_0)$, лежащих на L, и ядра имеют следующие значения[1]:

$$K_1^{(1)} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\right)^2\frac{d\ln r_0}{dn_0} + \frac{1}{2}\frac{d\xi_0\eta_0}{ds_0} - \frac{k_2^2}{k_1^2}\xi_0\cos(n_0, x) + N_1^{(1)}$$

$$K_2^{(1)} = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\frac{\partial r_0}{\partial\eta}\frac{d\ln r_0}{dn_0} + \frac{1}{4}\frac{d(\xi_0^2+3\eta_0^2)}{ds_0} - \frac{k_2^2}{k_1^2}\eta_0\cos(n_0, x) + N_2^{(1)}$$

$$K_1^{(2)} = -\frac{2}{\pi}\frac{\partial r_0}{\partial\xi}\frac{\partial r_0}{\partial\eta}\frac{d\ln r_0}{dn_0} - \frac{1}{4}\frac{d(3\xi_0^2+\eta_0^2)}{ds_0} - \frac{k_2^2}{k_1^2}\xi_0\cos(n_0, y) + N_1^{(2)} \qquad (2.8)$$

$$K_2^{(2)} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial r_0}{\partial\eta}\right)^2\frac{d\ln r_0}{dn_0} - \frac{1}{2}\frac{d\xi_0\eta_0}{ds_0} - \frac{k_2^2}{k_1^2}\eta_0\cos(n_0, y) + N_2^{(2)}$$

Здесь $r_0 = \sqrt{(\xi-\xi_0)^2 + (\eta-\eta_0)^2}$ и n_0 — нормаль к кривой L в точке $M(\xi_0, \eta_0)$

[1] Слагаемые, содержащиеся в правых частях первых двух из равенств (2.2) и зависящие от функции $J_1(k, \rho)$, могут быть, вообще говоря, отброшены. Однако легко видеть, что наличие их упрощает свойства системы (2.7) при $\lambda = 0$ и позволяет сравнительно легко провести ее исследование при этом значении параметра λ.

и обозначено

$$N_\nu^{(1)} = \left\{2\left(\frac{\partial^2 R_\nu^{(2)}}{\partial\xi_0\,\partial\eta_0} - \frac{\partial^2 R_\nu^{(1)}}{\partial\eta_0^2}\right) - k_2^2 S_\nu^{(1)}\right\}\cos(n_0, x) +$$

$$+ \left\{2\left(\frac{\partial^2 R_\nu^{(1)}}{\partial\xi_0\,\partial\eta_0} - \frac{\partial^2 R_\nu^{(2)}}{\partial\xi_0^2}\right) - k_2^2 S_\nu^{(2)}\right\}\cos(n_0, y) \qquad (\nu=1,2)$$

$$N_\nu^{(2)} = \left\{2\left(\frac{\partial^2 R_\nu^{(1)}}{\partial\xi_0\,\partial\eta_0} - \frac{\partial^2 R_\nu^{(2)}}{\partial\xi_0^2}\right) - k_2^2 S_\nu^{(2)}\right\}\cos(n_0, x) -$$

$$- \left\{2\left(\frac{\partial^2 R_\nu^{(2)}}{\partial\xi_0\,\partial\eta_0} - \frac{\partial^2 R_\nu^{(1)}}{\partial\eta_0^2}\right) + (k_2^2 - 2k_1^2) S_\nu^{(1)}\right\}\cos(n_0, y) \qquad (\nu=1,2)$$

при этом через $R_1^{(1)}, \ldots$ и $R_2^{(2)}$ обозначены функции, полученные последовательно из $F_1^{(1)}, \ldots$ и $F_2^{(2)}$ в результате замены в равенствах (2.2) (2.9)

$$N(k_j r), \left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\eta - y}{\xi - x} - \operatorname{arc\,tg}\frac{\eta}{\xi}\right) J_0(k_j r), \quad \frac{2J_1(k_1\rho)}{k_1^3}\cos\theta, \quad \frac{2J_1(k_1\rho)}{k_1^3}\sin\theta$$

соответственно через G_j, T_j, F_1 и F_2; аналогично $S_1^{(1)}, \ldots$ и $S_2^{(2)}$ получены заменой в выражениях $F_1^{(1)}, \ldots$ и $F_2^{(2)}$ также функций (2.9) через P_j, Q_j, E_1, и E_2.

Ядра системы (2.7) являются непрерывными функциями s и s_0. Кроме того, из (2.8) ясно, что они являются целыми функциями λ. Поступая аналогично тому, как в статье[3], докажем, что система (2.7) разрешима почти для всех значений λ.

Примечание. Нетрудно установить, что $\lambda = 0$ является особой точкой резольвенты системы (2.7). Действительно, учитывая соотношения (2.6), положим в соответствующей ей однородной системе $\lambda = 0$ и затем сложим первое из ее уравнений со вторым, умноженным на i. Тогда после несложных преобразований получим

$$\omega^{(0)}(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \omega^{(0)}(t)\frac{\partial}{\partial s_0}\ln\frac{t - t_0}{\overline{t} - \overline{t}_0}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega^{(0)}(t)}\frac{\partial}{\partial s_0}\frac{t - t_0}{\overline{t} - \overline{t}_0}\,ds +$$

$$+ \frac{t}{2}\left(\frac{a^2}{2}\,\overline{t}_0 - \frac{d\overline{t}_0\,t_0}{ds_0}\right)\int_L \omega^{(0)}(t)\,ds + \frac{i}{2}\,\frac{(a^2 - b^2)}{b^2}\,t_0\frac{dt_0}{ds_0}\int_L \overline{\omega^{(0)}(t)}\,ds = 0 \qquad (2.10)$$

где $\omega^{(0)}(t) = \nu_1^{(0)}(s) + i\nu_2^{(0)}(s)$ — некоторое решение этого уравнения и $t\,(t_0)$ — аффикс точки $M(\xi, \eta)$ $(M(\xi_0, \eta_0))$.

Поступая как в статье[4], найдем, что уравнение, союзное с (2.10), имеет вид

$$\delta(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \delta(t)\,d\ln\frac{t - t_0}{\overline{t} - \overline{t}_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\delta(t)}\,d\,\frac{t - t_0}{\overline{t} - \overline{t}_0} -$$

$$- \frac{i}{2}\int_L \delta(t)\left\{\frac{(a^2 - b^2)}{b^2}\,\overline{t}d\overline{t} - \overline{t}dt\right\} + \frac{i}{2}\,\frac{(a^2 - b^2)}{b^2}\int_L \overline{\delta(t)}\,t\,dt = 0 \qquad (2.11)$$

где $\delta(t) = \mu_1 + i\mu_2$ и $\mu_j\,(j = 1, 2)$ — некоторые вещественные величины. Исследуя последнее уравнение с помощью приема, изложенного, например, в той же статье[4], найдем, что оно имеет решение $\delta(t) = ic_1(t - z_c)$, где c_1 — произвольная вещественная постоянная и z_c — аффикс центра тяжести площади S. Отсюда вытекает справедливость сказанного.

Поступила в редакцию
11 V 1946

Институт механики
Академии Наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Шерман Д. И. Изв. АН СССР. Серия математ. 1945. № 9. Стр. 363—270.
2. Шерман Д. И. ДАН. СССР. 1947. Т. 56 № 6
3. Шерман Д. И. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 2.
5. Шерман Д. И. ПММ. 1946. Т. X. Вып. 5—6.

51