

**КРУЧЕНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ СТЕРЖНЕЙ С КРЕСТООБРАЗНЫМ  
 ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ**

Б. Л. А б р а м я н

(Ереван)

В работе приводится решение задачи кручения призматических стержней с крестообразным поперечным сечением.

Для решения уравнения Пуассона использован метод Н. Х. Арутюняна<sup>[1]</sup>. Полученные формулы определяют напряжения и жесткость профиля для различных отношений  $b/d$ , начиная от  $b/d = 1$  (квадратное сечение).

В работе указываются пределы применимости эмпирических формул Вебера<sup>[2]</sup>

§ 1. **Постановка задачи.** Определение функции напряжений  $U(x, y)$  при кручении, как известно, сводится к интегрированию уравнения Пуассона

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -2 \quad (1.1)$$

при условии, что  $U = 0$  на контуре поперечного сечения (фиг. 1). По симметрии достаточно найти функцию  $U(x, y)$  только для части  $OABC$  сечения.

Функцию  $U(x, y)$  ищем в виде

$$U(x, y) = \Psi(x, y) + \Phi(x, y) \quad (1.2)$$

где функция  $\Phi(x, y)$  существует только в области  $OAMN$ , а функция  $\Psi(x, y)$  существует во всей области  $OABC$ .

Для  $\Psi(x, y)$  получим уравнение

$$\nabla^2 \Psi = -2 \quad (1.3)$$

При этом должны выполняться следующие условия:

$$\Psi\left(x, \frac{d}{2}\right) = \Psi\left(\frac{b}{2}, y\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=0} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)_{x=b} = 0 \quad (1.4)$$

Полагая функцию  $\Psi(x, y)$  в виде

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \cos \alpha_k y \quad \left(\alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{d}\right) \quad (1.5)$$

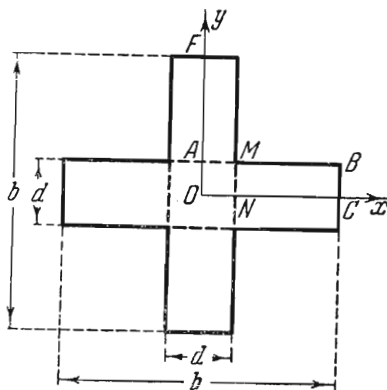
получим следующие уравнения для  $\Phi(x, y)$ :

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (1.6)$$

При этом

$$\Phi\left(\frac{d}{2}, y\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{x=d/2} = 0 \quad (1.7)$$

$$\Phi\left(x, \frac{d}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\left(\frac{d}{2}\right) \cos \alpha_k x$$



Фиг. 1

Уравнения (1.2), (1.3), (1.4) и (1.6), (1.7) полностью определяют функцию  $U(x, y)$  в области  $OABC$ . В области  $OFGN$  функцию напряжения предполагаем также в виде (1.2), только меняя  $x$  и  $y$  местами.

§ 2. Решение уравнений задачи. Согласно (1.3), (1.5) и (1.4) функции  $f_k(x)$  будут иметь вид

$$f_k(x) = A_k \operatorname{sh} \alpha_k x + B_k \operatorname{ch} \alpha_k x + (-1)^{k+1} \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \quad (2.1)$$

Граничные условия для определения функции  $\Phi(x, y)$  неоднородны, поэтому, следуя Г. А. Грилбергу<sup>[3]</sup>, полагаем

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cos \alpha_k y \quad \left( \alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{d} \right) \quad (2.2)$$

Отсюда

$$\varphi_k = \frac{4}{d} \int_0^{d/2} \Phi(x, y) \cos \alpha_k y dy \quad (2.3)$$

Теперь согласно (2.3) и (1.6) имеем

$$\varphi_k''(x) - \alpha_k^2 \varphi_k(x) = (-1)^k \alpha_k \frac{4}{d} \sum_{p=1}^{\infty} f_p\left(\frac{d}{2}\right) \cos \alpha_p x \quad (2.4)$$

При этом здесь использованы условия (1.7), а  $f_p(d/2)$  имеет значение

$$f_p\left(\frac{d}{2}\right) = A_p \operatorname{sh} \frac{(2p-1)\pi}{2} + B_p \operatorname{ch} \frac{(2p-1)\pi}{2} + (-1)^{p+1} \frac{8d^2}{(2p-1)^3 \pi^3} \quad (2.5)$$

Общее решение уравнения (2.4) имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = & C_k \operatorname{sh} \alpha_k x + D_k \operatorname{ch} \alpha_k x + \\ & (-1)^k \frac{4(k-1)}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p(d/2)}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} [\operatorname{ch} \alpha_k x - \cos \alpha_p x] \end{aligned} \quad (2.6)$$

§ 3. Определение постоянных интегрирования. Для функций  $f_k(x)$  и  $\varphi_k(x)$  из (1.4) и (1.7) граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi_k\left(\frac{d}{2}\right) = 0, \quad f_k\left(\frac{b}{2}\right) = 0 \\ \varphi_k'\left(\frac{d}{2}\right) = 0, \quad f_k'(0) + \varphi_k'(0) = 0 \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

С помощью этих условий из уравнений (2.1) и (2.6) получим

$$\begin{aligned} C_k \operatorname{sh} \alpha_k + D_k \operatorname{ch} \alpha_k + (-1)^k \frac{4(2k-1)}{\pi} \operatorname{ch} \alpha_k \sum_{p=1}^{\infty} f_p\left(\frac{d}{2}\right) \frac{1}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} = 0 \\ C_k \operatorname{ch} \alpha_k + D_k \operatorname{sh} \alpha_k + (-1)^k \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} f_p\left(\frac{d}{2}\right) \frac{(2k-1) \operatorname{sh} \alpha_k + (2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} = 0 \\ A_k \operatorname{sh} \frac{\alpha_k b}{d} + B_k \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{d} + (-1)^{k+1} \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} = 0 \quad \left( \alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \\ A_k + C_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Исключив из этих соотношений  $A_k$ ,  $C_k$  и  $D_k$ , получим

$$\begin{aligned}
 B_k = & (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi} \operatorname{ch} \alpha_k \operatorname{th} \frac{\alpha_k b}{d} \sum_{p=1}^{\infty} B_p \frac{(-1)^{p+1} (2p-1)}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} \frac{\operatorname{sh} [\alpha_p (b-d)/d]}{\operatorname{sh} [\alpha_p b/d]} + \\
 & + (-1)^k \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \frac{1}{\operatorname{ch} [\alpha_k b/d]} + \quad (k=1, 2, \dots) \\
 & + (-1)^k \frac{32d^2}{\pi^4} \operatorname{ch} \alpha_k \operatorname{th} \frac{\alpha_k b}{d} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{sh} \alpha_p \operatorname{cosh} [\alpha_p b/d]}{(2p-1)^2 [(2k-1)^2 + (2p-1)^2]} \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Введя в (3.3) обозначение

$$B_k = (-1)^k F_k d^2 \frac{\operatorname{ch} \alpha_k}{2k-1} \operatorname{th} \frac{\alpha_k b}{d} \quad \left( \alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \quad (3.4)$$

бесконечную систему (3.3) можно привести к виду

$$F_k = \sum_{p=1}^{\infty} F_p c_{kp} + r_k \quad (p \neq k) \quad (3.5)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 c_{kp} = & \frac{4(2k-1)}{\pi} \frac{\operatorname{ch} \alpha_p \operatorname{sh} [\alpha_p (b-d)/d]}{\left[ 1 - \frac{2}{\pi(2k-1)} \frac{\operatorname{ch} \alpha_k \operatorname{sh} [\alpha_k (b-d)/d]}{\operatorname{ch} (\alpha_k b/d)} \right] [(2k-1)^2 + (2p-1)^2] \operatorname{ch} \frac{\alpha_p b}{d}} \\
 r_k = & \left\{ \frac{8}{\pi^3 (2k-1)^2 \operatorname{ch} \alpha_k \operatorname{sh} (\alpha_k b/d)} - \right. \\
 & \left. - \frac{32(2k-1)}{\pi^4} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} (\alpha_p b/d) - \operatorname{sh} \alpha_p}{(2p-1)^2 [(2k-1)^2 + (2p-1)^2] \operatorname{sh} (\alpha_p b/d)} \right\} \times \\
 & \times \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{d} \left[ \operatorname{ch} \frac{\alpha_k b}{d} - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k}{\alpha_k} \operatorname{sh} \frac{\alpha_k (b-d)}{d} \right]^{-1}
 \end{aligned}$$

Бесконечная система (3.5) вполне регулярна, так как из (3.6) имеем

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{\infty} |c_{kp}| & \leq \frac{4(2k-1)}{\pi} \frac{1+e^{-\pi}}{2} \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq k}}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} = \\
 = & \frac{1+e^{-\pi}}{1-(1+e^{-\pi})/\pi(2k-1)} \left[ \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{(2k-1)\pi}{2} - \frac{1}{\pi(2k-1)} \right] \leq \frac{1+e^{-\pi}}{2} = 0.5216
 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\sum_{p=1, p \neq k}^{\infty} c_{kp} \leq 1 - \theta = 0.5216, \quad \theta = 0.4784 \quad (3.7)$$

Свободный же член  $r_k$  системы (3.5) удовлетворяет неравенству

$$|r_k| \leq 0.2525 - \frac{0.7199}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} \quad (3.8)$$

Обозначим значения неизвестных  $F_k$  с избытком через  $F_k^+$ , а значения с недостатком через  $F_k^-$ .

Пользуясь теорией вполне регулярных систем<sup>[4]</sup> и применяя лимитанты, получим для  $F_k$  следующие оценки:

$$\begin{aligned} F_1^- &= \frac{0.8157}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.2938 \leq F_1 \leq \frac{0.8140}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.2932 = F_1^+ \\ F_2^- &= \frac{0.5219}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.2229 \leq F_2 \leq \frac{0.5187}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.2218 = F_2^+ \\ F_3^- &= \frac{0.4073}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.1771 \leq F_3 \leq \frac{0.4032}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.1756 = F_3^+ \\ \frac{0.3314}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.1579 &\leq F_k^- \leq F_k \leq F_k^+ \leq \frac{0.3475}{\operatorname{sh}(\pi b / 2d)} - 0.1530 \quad (k \geq 4) \end{aligned} \quad (3.9)$$

**§ 4. Определение функции напряжений.** Функция напряжений (1.2) как сумма функций (1.5) и (2.2) согласно (2.1) и (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ (-1)^{k+1} \frac{8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} + \right. \\ &+ \left[ B_k + (-1)^k \frac{4}{\pi} \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi}{2} \sum_{p=1}^{\infty} f_p \left( \frac{d}{2} \right) \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} \right] \operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi x}{d} + \\ &+ \left. (-1)^{k+1} \frac{4(2k-1)}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} f_p \left( \frac{d}{2} \right) \cos \frac{(2p-1)\pi x}{d} \frac{1}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} \right\} \text{ при } 0 \leq x \leq \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь использованы соотношения (3.2);  $B_k$  имеет значение (3.4) и

$$f_p \left( \frac{d}{2} \right) = \frac{(-1)^p d^2}{2p-1} \left\{ \frac{F_p \operatorname{ch} \alpha_p}{\operatorname{ch}(\alpha_p b / d)} \operatorname{sh} \frac{\alpha_p (b-d)}{d} - \frac{8}{(2p-1)^2 \pi^3} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sh} \alpha_p}{\operatorname{sh}(\alpha_p b / d)} \right] \right\} \quad (4.2)$$

где  $\alpha_k = \frac{(2p-1)\pi}{2}$ . Для части *МВС* имеем

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{d} \left\{ B_k \operatorname{sh} \left[ \frac{(2k-1)\pi}{d} \left( \frac{b}{2} - x \right) \right] \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} + \right. \\ &+ \left. \frac{(-1)^{k+1} 8d^2}{(2k-1)^3 \pi^3} \left[ 1 - \operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{d} \operatorname{csh} \frac{(2k-1)\pi b}{2d} \right] \right\} \text{ при } \frac{d}{2} \leq x \leq \frac{b}{2} \end{aligned} \quad (4.3)$$

**§ 5. Определение жесткости при кручении.** Подставим функции напряжений ( $U(x, y)$ ) из (4.1) и (4.3) в формулу для жесткости профиля

$$C = 2G \iint_{\Omega} U(x, y) dx dy = 8G \left[ 2 \int_{d/2}^{b/2} dx \int_0^{d/2} U(x, y) dy + \int_0^{d/2} \int_0^{d/2} U(x, y) dx dy \right]$$

где  $\Omega$  — область поперечного сечения стержня,  $G$  — модуль сдвига.

Интегрируя, получим

$$\begin{aligned}
 C = & \frac{32Gd^4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \left\{ \frac{2}{\pi} \left[ 1 - \frac{\operatorname{ch} \alpha_k}{\operatorname{ch} (\alpha_k b/d)} \right] - \right. \\
 & - \frac{\operatorname{sh} \alpha_k}{2 \operatorname{ch} (\alpha_k b/d)} \operatorname{sh} \left[ \alpha_k \left( \frac{b}{d} - 1 \right) \right] \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} f_p \left( \frac{d}{2} \right) \frac{(2p-1)(-1)^{p+1}}{(2k-1)^2 + (2p-1)^2} - \\
 & - \frac{4}{(2k-1)^3 \pi^3} \left[ \operatorname{th} \frac{\alpha_k b}{d} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sh} \alpha_k}{\operatorname{ch} (\alpha_k b/d)} \right] + \\
 & \left. + \frac{(2k-1)^2}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} f_p \left( \frac{d}{2} \right) \frac{(-1)^{p+1}}{(2p-1)[(2k-1)^2 + (2p-1)^2]} + \frac{2b/d-1}{(2k-1)^2 \pi^2} \right\} \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

где  $f_p(d/2)$  имеет значение (4.2). Формулу (5.2) можно представить в виде

$$C = C_0 \eta(b/d) \quad (5.3)$$

где  $C_0$  — жесткость профиля, вычисленная как сумма жесткостей двух прямоугольников, составляющих крест, когда средняя часть креста учтена только в одном прямоугольнике,  $\eta = C/C_0$  — коэффициент увеличения, как бы представляющий влияние стыков данного профиля на величину жесткости.

Подставляя в (5.3) найденные значения коэффициентов  $F_k^-$  и  $F_k^+$  из (3.9), получим верхнюю и нижнюю границы жесткости. При этом коэффициентам с недостатком  $F_k^-$  будет соответствовать верхняя граница жесткости  $C^+$ , а коэффициентам с избытком — нижняя граница жесткости  $C^-$ .

В табл. 1 приведены вычисленные по формуле (5.2) значения жесткостей  $C^-/Gd^4$  и  $C^+/Gd^4$ , значения коэффициентов увеличения  $\eta^- = C^-/C_0$  и  $\eta^+ = C^+/C_0$  и значения

Таблица 1

$b/d$	1	1.5	2	2.5	3	4	5	10
$C^*/Gd^4$	0.616	0.950	1.283	1.616	1.950	2.616	3.283	6.616
$C^+/Gd^4$	0.141	0.580	1.051	1.468	1.844	2.543	3.216	6.549
$C^-/Gd^4$	0.141	0.580	1.050	1.467	1.843	2.542	3.215	6.548
$C_0/Gd^4$	0.141	0.323	0.600	0.916	1.247	1.913	2.579	5.870
$\eta^+$	—	1.796	1.752	1.603	1.479	1.329	1.247	1.116
$\eta^-$	—	1.796	1.750	1.602	1.478	1.329	1.247	1.116
$\delta$	—	0	0.11%	0.06%	0.07%	0	0	0

максимальной относительной погрешности  $\delta = (\eta^+ - \eta^-) / \eta^-$  формулы (5.3) для различных отношений  $b/d$ .

Для сравнения в табл. 1 приведены также жесткости, вычисленные по эмпирической формуле Вебера

$$C^* = G \frac{d^3}{8} (2b - 0.15d) \quad (5.4)$$

Из табл. 1 видно, что эмпирическая формула Вебера (5.4) дает достаточно близкие результаты только для тонкостенных стержней, у которых  $b/d \geq 4$  (именно для таких стержней были сделаны эксперименты и на основании их подобрана указанная формула).

Для толстостенных же стержней  $b/d \leq 4$  формула Вебера не применима, она при  $b/d = 3$  дает ошибку в 60%, при  $b/d = 2.5$  в 10%, при  $b/d = 2$  ошибка будет в 20%, при  $b/d = 1.5$  ошибка равна 64% и т. д.

§ 6. **Определение напряжений.** Пользуясь выражениями (4.1) и (4.3), для функции напряжения легко найти напряжения по обычным формулам.

Опуская вычисления, приводим выражения для напряжений в точке  $(b/2, 0)$ :

$$X_z\left(\frac{b}{2}, 0\right) = 0 \quad (6.1)$$

$$Y_z\left(\frac{b}{2}, 0\right) = \pi d \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left\{ F_k \frac{\operatorname{ch} \alpha_k}{\operatorname{ch}(\alpha_k b/d)} - \frac{8}{(2k-1)^2 \pi^3} \operatorname{cth} \frac{\alpha_k b}{d} \right\} G\tau \quad (6.2)$$

где  $\tau$  — угол закручивания на единицу длины стержня.

Подставив сюда коэффициенты  $F_k^+$  и  $F_k^-$ , определим верхнюю и нижнюю границы напряжения  $Y_z(b/2, 0)$ , причем верхней границе напряжения  $Y_z^+$  будут соответствовать коэффициенты с недостатком  $F_k^-$  ( $k = 1, 2, \dots$ ).

Для вычисления удобно (6.2) представить в виде

$$Y_z\left(\frac{b}{2}, 0\right) = G\tau d \left\{ 1 - \frac{1}{\pi^2} \psi' \left( -\frac{1}{4} \right) + \frac{8}{\pi^2} \left( \operatorname{cth} \frac{\pi b}{2d} - 1 \right) - \pi \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} F_k \frac{\operatorname{ch} \alpha_k}{\operatorname{ch}(\alpha_k b/d)} \right\} \quad \left( \alpha_k = \frac{(2k-1)\pi}{2} \right) \quad (6.3)$$

При этом использованы равенства

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-1)^2} = \frac{1}{16} \psi' \left( -\frac{1}{4} \right), \quad \psi'(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(z+m)^2}$$

где  $\psi'(z)$  — производная от логарифмической производной гамма-функций [5].

В табл. 2 приведены вычисленные значения напряжений  $Y_z(b/2, 0)$  для некоторых значений  $b/d$ .

Таблица 2

$b/d$	1	1.5	2	2.5	3	4	5	10
$Y_z^+$	0.675	0.9333	0.8931	0.8239	0.7821	0.7510	0.7443	0.7425
$Y_z^-$	0.675	0.9330	0.8927	0.8237	0.7820	0.7510	0.7443	0.7425
$Y_z^0$	0.675	0.7283	0.7395	0.7415	0.7420	0.7425	0.7425	0.7425

В этой таблице для сравнения приведены значения соответствующих напряжений  $Y_z^0(b/2, 0)$  для прямоугольного сечения. Все эти величины приведены в долях от  $G\tau d$ .

Поступила в редакцию  
21 VI 1949

Академия Наук  
Армянской ССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. ДАН Арм. ССР. 1948. Т. IX. № 2; ПИМ. 1949. Т. XIII. Вып. 1.
2. Weber C. Forschungsheft. 1921. Nr. 249.
3. Гринберг Г. В. Изв. АН СССР, сер. физ. 1946. 10. № 2.
4. Канторович Л. Б., Крылов П. П. Приближенные методы высшего анализа. ОНТИ. М. 1941.
5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций. ОГИЗ. Гостехиздат. М. 1948.