Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

К ТЕОРИИ ТОНКИХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

А. А. Назаров

(Саратов)

В работе В. З. Власова [1] даны уравнения равновесия пологой оболочки с учетом моментного напряженного состояния. Его результаты имеют большое значение для практических расчетов.

В. З. Власов пользуется координатной системой, совпадающей с линиями кривизны срединной поверхности оболочки. В обзорной статье А. Л. Гольденвейзера и А. И. Лурье [2] (стр. 579) отмечено, что это обстоятельство не всегда обеспечивает применимость уравнений пологих оболочек. В качестве примера можно взять сферу, отнесенную к географической системе координат. Коэффициенты первой квадратичной формы в этом случае будут $A = R$, $B = R\sin\theta$.

При этом выражения тангенциальных усилий через функцию напряжений, данные В. З. Власовым, будут удовлетворять первым двум уравнениям безмоментной теории пологих оболочек приближенно. Погрешность, как легко проверить, будет порядка $\sin\theta$ по сравнению с единицей и, следовательно, зависит от выбора координатной системы. Точность оказывается тем меньше, чем дальше от рассматриваемой части оболочки отстоит полюс географической системы координат. При расчетах такое обстоятельство иногда может встретиться.

В данной заметке в качестве координатной системы используются не линии кривизны, а «почти декартовы координаты» (координаты, получаемые рассечением поверхности двумя взаимно ортогональными семействами параллельных плоскостей). Такой выбор координат в некоторых случаях будет более естественным для рассматриваемой задачи и свободным от указанного обстоятельства.

1. Пусть срединная поверхность оболочки задана

$$z = \lambda f(x_1, x_2) \tag{1.1}$$

где λ — некоторый безразмерный параметр, а $f(x_1, x_2)$ — функция, имеющая частные производные по аргументам x_1 и x_2 до третьего порядка включительно. При выводе общих соотношений теории пологих оболочек будем пренебрегать по сравнению с единицей членами, содержащими произведения некоторого безразмерного множителя на квадраты и высшие степени параметра λ.

Компоненты тензора первой дифференциальной формы будут

$$g_{11} = 1 + (\partial_1 z)^2, \qquad g_{12} = \partial_1 z\, \partial_2 z, \qquad g_{22} = 1 + (\partial_2 z)^2 \tag{1.2}$$

Здесь, как и в дальнейшем, индекс у ∂ означает дифференцирование по переменной соответствующего индекса. Отбрасывая в выражениях (1.2) члены, содержащие квадраты параметра λ, получим

$$g_{11} = 1, \qquad g_{12} = 0, \qquad g_{22} = 1 \tag{1.3}$$

С той же точностью очевидны следующие соотношения для ковариантных контрвариантных и смешанных составляющих того же тензора:

$$g^{11} = g^{22} = 1, \qquad g_1{}^2 = g^{12} = 0, \qquad g_1{}^1 = g_2{}^2 = 1 \tag{1.4}$$

Разложение вектора нормали к срединной поверхности по осям имеет вид

$$\mathbf{n} = -\mathbf{i}\,\partial_1 z - \mathbf{j}\,\partial_2 z + \mathbf{k} \tag{1.5}$$

Компоненты тензора второй дифференциальной формы срединной поверхности оболочки будут

$$b_{11}=\frac{\partial_{11}z}{B},\quad b_{12}=\frac{\partial_{12}z}{B},\quad b_{22}=\frac{\partial_{22}z}{B}\qquad \left(B=\sqrt{1+(\partial z_1)^2+(\partial z_2)^2}\right)\tag{1.6}$$

Отсюда, учитывая принятую степень точности, имеем

$$b_{11}=\lambda r,\qquad b_{12}=\lambda s,\qquad b_{22}=\lambda t$$

где

$$r=\partial_{11}f,\qquad s=\partial_{12}f,\qquad t=\partial_{22}f\tag{1.7}$$

Для ковариантных, контрвариантных и смешанных составляющих того же тензора имеем

$$b^{11}=b_1{}^1=\lambda r,\qquad b_1{}^2=b^{12}=\lambda s,\qquad b_2{}^2=b^{22}=\lambda t\tag{1.8}$$

Символы Кристоффеля $\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}$ и $\Gamma_{\alpha\beta\omega}$ связаны друг с другом соотношениями

$$\Gamma_{\alpha\beta}{}^{\gamma}=g^{\gamma\omega}\Gamma_{\alpha\beta\omega}=\frac{1}{2}g^{\gamma\omega}\left(\partial_\alpha g_{\beta\omega}+\partial_\beta g_{\alpha\omega}-\partial_\omega g_{\alpha\beta}\right)\tag{1.9}$$

На основании (1.3)

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}=\Gamma_{\alpha\beta\omega}=0\tag{1.10}$$

Следовательно, ковариантная и контрвариантная производные вектора с принятой степенью точности будут совпадать с обычными производными

$$\nabla_\chi \mathbf{r}_\alpha=\partial_\chi \mathbf{r}_\alpha,\qquad \nabla_\chi \mathbf{r}^\alpha=\partial_\chi \mathbf{r}^\alpha\tag{1.11}$$

Второе из выражений (1.3) дает основание сделать вывод о том, что с принятой степенью точности линии $x_1=\mathrm{const}$, $x_2=\mathrm{const}$ на пологой оболочке будут ортогональны; однако в общем случае они не совпадают с линиями кривизны. Следовательно, здесь нельзя применять непосредственно известные формулы теории оболочек, координатный способ вывода необходимых нам и аналогичных им формул становится неудобным. Поэтому, следуя А. И. Лурье и А. Л. Гольденвейзеру, мы будем применять более общий математический аппарат теории оболочек, основанный на методах тензорного исчисления.

2. Положение любой точки оболочки определяет радиус-вектор

$$\mathbf{r}=\mathbf{p}+\mathbf{n}z\tag{2.1}$$

где $\mathbf{p}$ — радиус-вектор основания нормали, проведенной через точку к серединой поверхности. На поверхностях, ограничивающих оболочку

$$\mathbf{r}^{+}=\mathbf{p}+{}^1/_2h\mathbf{n},\qquad r^{-}=\mathbf{p}-{}^1/_2h\mathbf{n}\tag{2.2}$$

основные векторы поверхности имеют вид

$$\mathbf{r}_k=\mathbf{p}_k-zb_k{}^s\mathbf{p}_s,\qquad \mathbf{r}_3=\mathbf{n}\tag{2.3}$$

Составляющие основного метрического тензора оболочки будут

$$a_{ik}=g_{ik}-2zb_{ik}+b_{\omega i}b_k{}^\omega z^2\tag{2.4}$$

В нашем случае с принятой степенью точности имеем

$$a_{11}=1-2\lambda zr,\quad a_{12}=-2\lambda zs,\quad a_{22}=1-2\lambda zt\tag{2.5}$$

$$a=1-2z\lambda(r+t)\tag{2.6}$$

$$a^{11}=1+2\lambda zr,\quad a^{22}=2\lambda zs,\qquad a^{22}=1+2\lambda zt\tag{2.7}$$

3. Пусть v^1, w, v^2 — составляющие вектора малого перемещения точек срединной поверхности $\mathbf{v}$ по линиям $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$ и по нормали $\mathbf{n}$. Тогда

$$\mathbf{v} = v^k \mathbf{p}_k + w\mathbf{n} \tag{3.1}$$

Радиус-вектор деформированной поверхности будет

$$'\mathbf{p} = \mathbf{p} + v^k \mathbf{p}_k + w\mathbf{n} \tag{3.2}$$

Основные векторы на деформированной поверхности будут

$$'\mathbf{p}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha + (\nabla_\alpha v^k - w b_\alpha{}^k)\, p_k + (w_\alpha + b_{k\alpha} v^k)\, \mathbf{n} \tag{3.3}$$

Здесь ∇ — символ ковариантного дифференцирования, в нашем случае $\nabla = \partial$. Тогда шесть величин $\varepsilon_{ik}\beta_{ik}$, определяющих изменения коэффициентов первой и второй дифференциальных форм срединной поверхности пологой оболочки, на основании формул (2. 1. 5), (2. 1. 11) работы А. И. Лурье [4] представятся в виде

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 v^1 - \lambda r w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(\partial_1 v^2 + \partial_2 v^1) + \lambda s w, \quad \varepsilon_{22} = \partial_2 v^2 - \lambda t w$$

$$\beta_{ik} = \partial_k v^\alpha b_{i\alpha} + \partial_{ik} w + \partial_i v^\alpha b_{k\alpha} + v^\alpha \partial_i b_{k\alpha} \tag{3.4}$$

В рассматриваемых задачах наряду с изгибом оболочки существенную роль играют и деформации удлинения, причем первые сравнимы по величине со вторыми. Исходя из этого положения в последних трех формулах (3.4), характеризующих изменения кривизны поверхности, можно пренебречь членами, содержащими компоненты перемещений v^1 и v^2 по сравнению с $\partial_{ik} w$. Тогда будет

$$\beta_{11} = \partial_{11} w, \qquad \beta_{12} = \partial_{12} w, \qquad \beta_{22} = \partial_{22} w \tag{3.5}$$

4. Выражения, связывающие усилия и моменты с деформациями срединной поверхности, возьмем в виде

$$\begin{aligned} T_1 &= B(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \qquad T_2 = B(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \qquad S = B(1-\nu)\,\varepsilon_{12} \\ G_1 &= -D(\beta_{11} + \nu\beta_{22}), \qquad G_2 = -D(\beta_{22} + \nu\beta_{11}), \qquad H = -D(1-\nu)\,\beta_{12} \end{aligned} \tag{4.1}$$

где

$$B = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Уравнения статики элемента оболочки, приведенные в работе А. И. Лурье [4], для нашего случая запишутся в виде

$$\begin{aligned} &\partial_1 T_1 + \partial_2 S - N_1 \lambda r - N_2 \lambda s + E^1 = 0 \\ &\partial_1 S + \partial_2 T_2 - N_2 \lambda t - N_1 \lambda s + E^2 = 0 \\ &\partial_1 N_1 + \partial_2 N_2 + T_1 \lambda r + T_2 \lambda t + 2S\lambda s + E^3 = 0 \\ &\partial_1 H + \partial_2 G_2 - N_2 + M_1 = 0, \quad \partial G_1 + \partial_2 H - N_1 + M_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

В дальнейшем в первых двух уравнениях (4.2) будем пренебрегать членами $N_1\lambda r$, $N_2\lambda s$, $N_2\lambda t$, $N_1\lambda s$ по сравнению с другими (это обычная гипотеза, которую принимают даже в теории больших прогибов); при этом уравнения (4.2) будут

$$\begin{aligned} &\partial_1 T_1 + \partial_2 S + E^1 = 0, \qquad \partial_1 S + \partial_2 T_2 + E^2 = 0 \\ &\partial_1 N_1 + \partial_2 N_2 + T_1 \lambda r + T_2 \lambda t + 2S\lambda s + E^3 = 0 \\ &\partial_1 H + \partial_2 G_2 - N_2 + M_1 = 0, \qquad \partial_1 G_1 + \partial_2 H - N_1 + M_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

В уравнениях (4.3), как и в уравнениях (4.2), E^1, E^2, E^3, M_1, M_2 — составляющие главного вектора и главного момента внешних сил, приложенных к точке поверхности элемента оболочки по ее основным направлениям.

В третье уравнение этой системы подставим значения усилий N_1 и N_2, найденных из последних двух уравнений системы, и, используя (4.1), легко преобразуем оставшиеся уравнения (4.3) в три уравнения в компонентах перемещений:

$$\partial_{11}v^1 + \frac{1-\nu}{2}\partial_{22}v^1 + \frac{1+\nu}{2}\partial_{12}v^2 - \lambda\partial_1[w(r+\nu t)] - \lambda(1-\nu)\partial_2(sw) + \frac{E^1}{B} = 0$$

$$\partial_{22}v^2 + \frac{1-\nu}{2}\partial_{11}v^2 + \frac{1+\nu}{2}\partial_{12}v^1 - \lambda\partial_2[w(r\nu+t)] - \lambda(1-\nu)\partial_1(sw) + \frac{E^2}{B} = 0$$

$$\nabla^2\nabla^2 w + \frac{B}{D}\lambda^2 w(r^2 + 2\nu rt + t^2 + s^2) - \frac{B}{D}\lambda[r(\partial_1 v^1 + \nu\partial_2 v^2) +$$

$$+ t(\partial_2 v^2 + \nu\partial_1 v^1) + s(1-\nu)(\partial_1 v^2 + \partial_2 v^1)] - \frac{E^3}{D} = 0 \qquad (4.4)$$

Далее легко показать, что уравнения статики элемента оболочки (4.3) можно свести к двум дифференциальным уравнениям относительно двух функций. Для простоты вычислений будем рассматривать тот случай равновесия пологой оболочки, когда в уравнениях (4.3) величины $E^1 = E^2 = M_1 = M_2 = 0$. Выберем функцию F так, чтобы

$$T_1 = h\,\partial_{22}F, \quad S = -h\,\partial_{12}F, \quad T_2 = h\,\partial_{11}F \qquad (4.5)$$

Тогда два первых уравнения системы (4.3) будут тождественно удовлетворяться. Функцию F по аналогии с функцией Эри в плоской задаче теории упругости назовем функцией усилий. Далее, на основании формул (4.1) и (3.4) находим

$$T_1 = B[\partial_1 v^1 + \nu\partial_2 v^2 - \lambda w(r+\nu t)], \qquad T_2 = B(\partial_2 v^2 + \nu\partial_1 v^1 - \lambda w(t+\nu r)]$$

$$S = \frac{B(1-\nu)}{2}[\partial_1 v^2 + \partial_2 v^1 - 2\lambda sw] \qquad (4.6)$$

Отсюда очевидны следующие соотношения:

$$T_1 - \nu T_2 = Eh(\partial_1 v^1 - \lambda rw), \qquad T_2 - \nu T_1 = Eh(\partial_2 v^2 - \lambda tw)$$

$$2(1+\nu)S = (\partial_1 v^2 + \partial_2 v^1 - 2\lambda sw)Eh \qquad (4.7)$$

Дифференцируя первое из уравнений (4.7) дважды по x_2, второе дважды по x_1 а третье по x_1 и по x_2 и из суммы первых двух вычитая третье, находим

$$\partial_{22}(T_1 - \nu T_2) + \partial_{11}(T_2 - \nu T_1) - 2(1+\nu)\partial_{12}S =$$

$$= -\lambda E(r\partial_{22}w - 2s\partial_{12}w + t\partial_{11}w) \qquad (4.8)$$

Подставляя вместо усилий T_1, T_2, S их значения из (4.5), получим уравнение, связывающее функции F и w:

$$\nabla^2\nabla^2 F = -\lambda E(r\partial_{22}w - 2s\partial_{12}w + t\partial_{11}w) \qquad (4.9)$$

Второе уравнение для этих функций получаем с помощью последних трех из уравнений (4.3) путем исключения из них усилий N_1 и N_2 и последующей замены в первом из них усилий и моментов через функции F и w. Это уравнение имеет вид

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{1}{D}[E^3 + \lambda h(r\partial_{22}F - 2s\partial_{12}F + t\partial_{11}F)] \qquad (4.10)$$

Поступила в редакцию
25 V 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В. З. ПММ 1944. Т. VIII. Вып. 2.
2 Гольденвейзер А. Л., Лурье А. И. ПММ. 1947. Т. XI. Вып. 5.
3. Лурье А. И. ПММ. 1940. Т. IV. Вып. 2.