Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ОТРЫВНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГЛОГО ЦИЛИНДРА В ОГРАНИЧЕННОМ ПОТОКЕ

Я. Р. Берман

(Москва)

1. Постановка задачи. В настоящей работе рассматривается плоская задача отрывного обтекания симметричного контура, близкого к кругу, потоком, ограниченным двумя параллельными стенками (фиг. 1); схема обтекания и условия, налагаемые на поток, обычные для задач классической теории струй.

Скорость набегающего потока параллельна стенкам, ее величина v_∞ меньше величины скорости на свободных струях v_0. Расстояние между стенками будем в дальнейшем называть шириной канала и обозначать через $2L$.

В силу симметрии можно рассматривать нижнюю половину течения, заменяя ось симметрии x твердой стенкой.

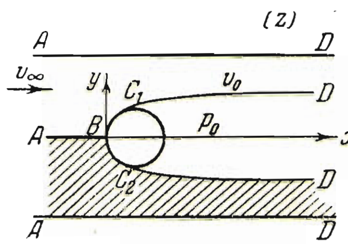
Для полного решения задачи достаточно найти зависимость между комплексным потенциалом течения $w = \varphi + i\psi$ и комплексной скоростью dw / dz, где $z = x + iy$.

Для удобства введем переменную

$$\Omega = \ln \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} \qquad (1.1)$$

и будем искать решение в параметрическом виде

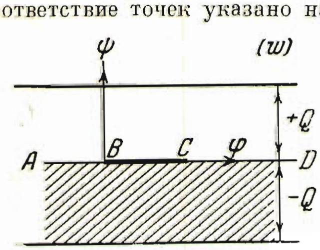
$$w = w(u), \quad \Omega = \Omega(u) \quad (u = u_1 + iu_2) \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

2. Построение общего решения. Для определения $w(u)$ и $\Omega(u)$ отобразим области изменения переменных w и Ω на верхний правый квадрант плоскости u; соответствие точек указано на фиг. 1, 2, 3. Областью изменения w будет полоска шириной Q (фиг. 2), где $Q = Lv_\infty$ — расход жидкости. Отображение осуществляется с помощью элементарных функций

$$w = \frac{Q}{\pi} \ln \left[\frac{u^2 - a^2}{a^2} \exp \frac{\pi w_0}{Q} \right] - iQ \qquad (w_0 = w(0)) \qquad (2.1)$$



Фиг. 2

В дальнейшем понадобится выражение функции

$$\frac{dw}{du} = \frac{2Q}{\pi} \frac{u}{u^2 - a^2} \qquad (2.2)$$

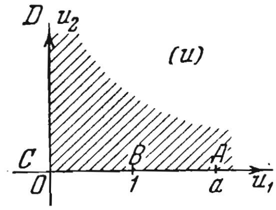
Значение действительного параметра $a > 1$ определяется отношением L / R шрины канала к диаметр цилиндра.

Согласно (1.1) имеем

$$\Omega = \ln \frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} = \ln \frac{|v|}{v_0} - i\theta \qquad (2.3)$$

где $|v|$ — величина, а θ — угол наклона вектора скорости в точке z.

Установим поведение функции $\Omega(u)$ на границах области D плоскости u (фиг. 3). Так как действительная часть $\Omega(u)$ на мнимой верхней полуоси равна нулю, то согласно принципу симметрии искомую функцию $\Omega(u)$ можно продолжить на левый верхний квадрант плоскости u. Так как мнимая часть функции $\Omega(u)$ равна нулю на всей действительной оси плоскости u, за исключением отрезка $[-1, +1]$, то согласно тому же принципу функцию $\Omega(u)$ можно продолжить на нижнюю полуплоскость.



Фиг. 3

В бесконечности $\Omega(u)$ должна исчезать.

Пользуясь формулой Шварца, можно определить $\Omega(u)$ по значениям ее мнимой части на действительной оси плоскости u. Имеем

$$\Omega(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{-\theta(\xi)\,d\xi}{\xi - u} \tag{2.4}$$

Зададим функцию θ на отрезке действительной оси $[-1, +1]$ в виде

$$\theta(u_1) = -\left[\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-u_1^2}\,(A_0 + A_2u_1^2 + A_4u_1^4 + \cdots + A_{2n}u_1^{2n}\right] \tag{2.5}$$

где $A_0, A_2, \ldots, A_{2n}$ — некоторые постоянные коэффициенты, зависящие от формы контура. Подставляя (2.5) в (2.4) и производя интегрирование, получаем

$$\begin{gathered}\Omega(u) = \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + \sqrt{u^2-1}\,(A_0 + A_2u^2 + \cdots + A_{2n}u^{2n}) - (A_0\alpha_0 + A_2\alpha_2 + \\ + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n})\,u - (A_2\alpha_0 + A_4\alpha_2 + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n-2})\,u^3 - \cdots - \\ - (A_{2n-2}\alpha_0 + A_{2n}\alpha_2)u^{2n-1} - A_{2n}\alpha_0\,u^{2n+1}\end{gathered} \tag{2.6}$$

где

$$\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_{2k} = \frac{(-1)^k}{k!}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-k+1\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

Легко видеть, что полученная функция $\Omega(u)$ удовлетворяет всем граничным условиям. (Разложив $\sqrt{u^2-1}$ в ряд по степеням $1/u$, убеждаемся в том, что $\Omega(u)$ исчезает в бесконечности.) Таким образом, формулы (2.2) и (2.6) дают общее решение поставленной выше задачи.

При $A_0 = A_2 = \cdots = A_{2n} = 0$ из этого решения получаются формулы Жуковского для случая обтекания пластинки между параллельными стенками, найденные им при рассмотрении задачи отрывного обтекания симметричного клина [1].

3. Определение коэффициентов решения. Для определения $n+1$ коэффициентов $A_0, A_2, \ldots, A_{2n}$ задаем кривизну в n точках обтекаемого участка контура BC_2 и налагаем условие конечности кривизны струи в точке отрыва C_2 $(u = 0)$.

Заметим, что при произвольных $A_0, A_2, \ldots, A_{2n}$ кривизна в точке отрыва бесконечна, в чем легко убедиться, составляя выражение кривизны струи [2].

Вышеуказанное условие имеет вид

$$A_0\alpha_0 + A_2\alpha_2 + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n} = -1 \tag{3.1}$$

Воспользовавшись (2.2) и (2.6), составим выражение радиуса кривизны обтекаемого участка контура

$$R = \frac{ds}{d\theta} = \frac{2Lv_\infty}{\pi v_0}\,\frac{u_1}{u_1^2 - a^2}\,\times \tag{3.2}$$

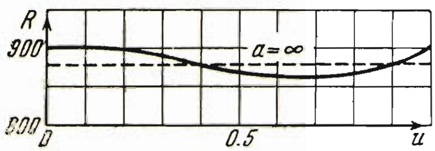
$$\times\,\frac{(1+u_1)\exp\left[(A_0\alpha_0 + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n})\,u_1 + (A_2\alpha_0 + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n-2})u_1^3 + \cdots + A_{2n}\alpha_0u_1^{2n+1}\right]}{(1-u_1^2)\,(-2A_2u_1 - 4A_4u_1^3 - \cdots - 2nA_{2n}u^{2n-1}) + u_1\,(A_0 + A_2u_1^2 + \cdots + A_{2n}u_1^{2n})}$$

Поскольку мы ищем решение для контура, близкого к кругу, приравняем выражения радиуса кривизны в точке разветвления B $(u = 1)$ и в точке отрыва C_2 $(u = 0)$; получим

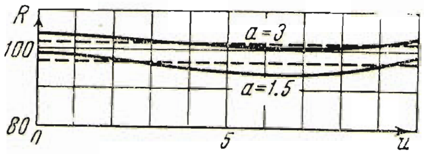
$$\frac{1}{a^2}\,\frac{1}{2A_2 - A_0} = \frac{2}{1 - a^2}\,\frac{\exp\left[-1 + (A_2\alpha_0 + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n-2}) + \cdots + A_{2n}\alpha_0\right]}{A_0 + A_2 + \cdots + A_{2n}} \tag{3.3}$$

Рассмотрим два приближения к кругу $n=1$ и $n=2$.

В случае $n=1$ коэффициенты A_0 и A_2 определяются из выражений (3.1) и (3.3).



Фиг. 4



Фиг. 5

Построив по формуле (3.2) кривые $R = R(u_1)$, показанные сплошными линиями на фиг. 4 для $a=\infty$ и на фиг. 5 для $a=3$ и $a=1.5$, убеждаемся в том, что в промежуточных точках обтекаемого участка контура BC_2 радиус кривизны мало отклоняется от значения $R(0) = R(1)$; максимальное отклонение составляет около 4%.

В случае $n = 2$ приравниваем выражения радиуса кривизны в трех точках $R(0) = R(1) = R(\frac{1}{2})$. Присоединяя сюда равенство (3.1), получим три уравнения для определения коэффициентов A_0, A_2, A_4. В этом случае кривые $R = R(u_1)$, показанные на фиг. 4 и 5 пунктиром, будут почти прямыми линиями, т. е. контур очень близок к кругу.

4. Сопротивление цилиндра. Силу сопротивления X жидкости, направленную в положительную сторону оси x, определяем по теореме о количестве движения. После несложных выкладок имеем для сопротивления цилиндра $2X$

$$2X = \rho L(v_0 - v_\infty)^2 \tag{4.1}$$

Для коэффициента c_x имеем

$$c_x = \frac{2X}{\frac{1}{2}\rho v_\infty{}^2\, 2R} = \left(\frac{v_0}{v_\infty} - 1\right)^2 \frac{L}{R} \tag{4.2}$$

Полагая в формуле (2.5) $u = a$ и пользуясь уравнением (3.1), легко найдем

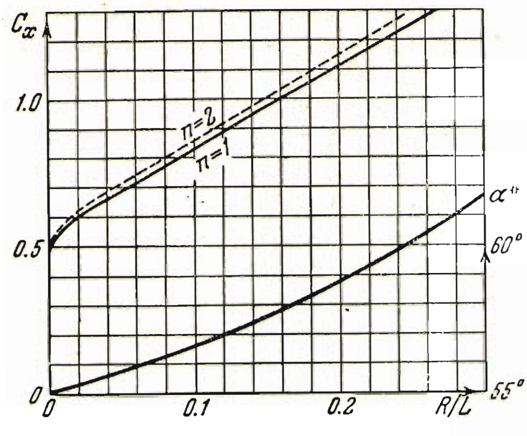
$$\frac{v_0}{v_\infty} = \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\,\exp\left[-\sqrt{a^2-1}\,(A_0 + A_2a^2 + \cdots + A_{2n}a^{2n}) - a + \right.$$
$$\left. + (A_2\alpha_0 + \cdots + A_{2n}\alpha_{2n-2})\,a^3 + \cdots + A_{2n}\alpha_0\,a^{2n+1}\right] \tag{4.3}$$

Отношение L/R выражается через $A_0, A_2, \ldots, A_{2n}$, a при помощи формул (3.2) и (4.3). При изменении параметра a меняются A_0, A_2, A_4, v_0/v_∞, L/R, а следовательно, и c_x.

Случай отрывного обтекания цилиндра в безграничном потоке ($R/L = 0$), рассмотренный Бродецким [2], получаем предельным переходом при $a \to \infty$.

На фиг. 6 приведены кривые $c_x = c_x(R/L)$ для $n = 1$ и $n = 2$, незначительно отклоняющиеся друг от друга. При этом $c_x \approx 0.49$ для $n=1$ и $c_x \approx 0.5$ для $n = 2$, когда $R/L = 0$, что совпадает с результатами Бродецкого.

При диаметре цилиндра, сколько-нибудь заметном сравнительно с шириной канала, сопротивление значительно выше, чем в безграничном потоке.



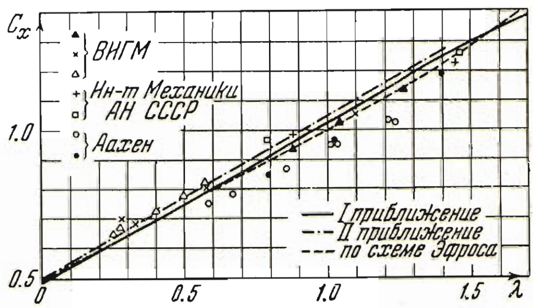
Фиг. 6

На фиг. 7 построены кривые $c_x = c_x(\lambda)$ для $n = 1$ и $n = 2$, где λ — число кавитации,

$$\lambda = \frac{P_\infty - P_0}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2} = \frac{v_0^2}{v_\infty^2} - 1 \qquad (4.4)$$

Там же приведена кривая $c_x(\lambda)$, полученная из расчета по схеме Д. А. Эфроса для кавитационного обтекания круглого цилиндра в безграничном потоке [3] и близкая к нашим кривым.

Экспериментальные точки из опытов в кавитационных трубах Института механики АН СССР, Всесоюзного института гидромашин и Высшей технической школы Аахена[5] ложатся вблизи от кривых, на фиг. 7. М. И. Гуревич[4], рассчитавший сопротивление плоской пластинки по схеме Д. А. Эфроса и построивший кривую $c_x(\lambda)$, обнаружил, что на эту же кривую ложатся значения $c_x(\lambda)$, полученные для отрывного обтекания пластинки по схеме Жуковского. Все это говорит о том, что число кавитации λ является фактором, в значительной степени определяющим с количественной стороны явление кавитационного обтекания, так как при рассмотрении различных схем получаются близкие значения c_x для одних и тех же λ.



Фиг. 7

5. Определение положения точек отрыва на контуре. Направление скорости в точках контура определяется формулой (2.5). Поэтому в точке отрыва C_2 $(u = 0)$ имеем $\theta = -(\frac{1}{2}\pi + A_0)$. Отсюда угол радиуса-вектора точки C_2 с отрицательным направлением оси x будет

$$\alpha_2^* = -\frac{\pi}{2} - \left[-\left(\frac{\pi}{2} + A_0\right)\right] = A_0 \qquad (5.2)$$

В силу симметрии положение точки отрыва C_1 определяется углом $\alpha_1^* = -A_0$.

На фиг. 6 построена кривая $\alpha_1^*(R/L)$. Если для цилиндра в безграничном потоке $\alpha_1^* \approx 55°$, то с ростом R/L точка отрыва постепенно отодвигается к вертикальному диаметру цилиндра; при $R/L = 0.37$ уже $\alpha_1^* \approx 63.5°$.

Поступила в редакцию
24 VII 1949

ЛИТЕРАТУРА

1. Жуковский Н. Е. Видоизменение метода Кирхгофа. Собрание сочинений, ГТТИ. 1936. Т. III. § 14.
2. Brodetsky. Proc. of the Roy. Soc. of London, series A. 1923. Vol. 102.
3. Эфрос Д. А. Известия АН СССР. ОТН. 1947. № 9.
4. Гуревич М. И. Известия АН СССР. ОТН. 1946. № 4.
5. Martirer E. Hydromechanische Probleme des Schiftsantriebes. 1932.