Институт механики Академии Наук Союза ССР
Прикладная математика и механика. Том XIII, 1949

ЗАМЕТКИ

ОБ ОДНОМ ГАЗОВОМ ТЕЧЕНИИ С ПРЯМОЙ ЛИНИЕЙ ПЕРЕХОДА

Л. В. Овсянников

(Ленинград)

В настоящей заметке на основании решений, полученных С. А. Чаплыгиным, исследуется тот предельный случай струйного течения газа, когда постоянное в окружающем струю пространстве давление точно равно критическому давлению при заданном начальном состоянии газа. Для струи, вытекающей из отверстия в сосуде с плоскими стенками, доказывается, что выравнивание потока в ней достигается на конечном расстоянии от начала свободной струи, причем линия перехода к равномерному течению является прямой.

1. Согласно Чаплыгину [1] всякая задача об определении дозвукового течения, удовлетворяющего каким-либо условиям, сводится к решению системы

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=\frac{2\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=-\frac{\alpha-\tau}{2\,\alpha\tau\,(1-\tau)^{\beta+1}}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{1.1}$$

или эквивалентной ей системы

$$\frac{\partial\tau}{\partial\psi}=\frac{2\,\tau}{(1-\tau)^{\beta}}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}, \qquad \frac{\partial\tau}{\partial\varphi}=-\frac{2\alpha\tau\,(1-\tau)^{\beta+1}}{\alpha-\tau}\frac{\partial\theta}{\partial\psi} \tag{1.2}$$

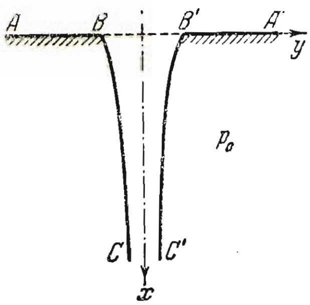
при соответствующих граничных условиях.

В этих уравнениях $\psi=\psi(\theta,\tau)$ и $\varphi=\varphi(\theta,\tau)$ — функция тока и потенциал скорости; $\tau=V^2/V_{\max}^2$, причем V — величина вектора скорости, а $V_{\max}$ — максимальное значение V, соответствующее данному начальному состоянию газа; θ — угол вектора скорости с осью x. Далее, $\beta=1/(\varkappa-1)$ — показатель адиабатической азвисимости плотности от температуры, причем для краткости мы употребили еще обозначение

$$\alpha=\frac{1}{2\,\beta+1}=\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}$$

так, что значение $\tau=\alpha$ соответствует критической скорости

$$V_{\mathrm{cr}}=\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}}\,V_{\max}$$



Фиг. 1

Чаплыгин [1] дал решение задачи об истечении газовой струи из сосуда с плоскими стенками, образующими угол 180°, в пространстве с давлением $p_0=\mathrm{const}$ в виде

$$\frac{\pi}{Q}\psi=-\theta-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z_n}{z_{n0}}\sin 2n\theta \tag{1.3}$$

$$\frac{\pi}{Q}\varphi=C+\frac{1}{2}\int\frac{d\tau}{\tau\,(1-\tau)\,\beta}+\frac{1}{(1-\tau)^{\beta}}\left[-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z_n}{z_{n0}}x_n\cos 2n\theta\right] \tag{1.4}$$

причем это решение удовлетворяет следующим граничным условиям (фиг. 1):

$$\psi=-\frac{1}{2}Q \quad \text{на } ABC \qquad \psi=+\frac{1}{2}Q \quad \text{на } A'B'C'$$

В формулах (1.3), (1.4) Q — относительный расход газа в струе, а C — произвольная постоянная, зависящая от выбора начала отсчета значений φ. Величины z_n, z_{n0} и x_n определяются формулами

$$z_n = z_n(\tau) = \tau^n y_n(\tau), \qquad z_{n0} = z_n(\tau_0)$$

$$x_n = x_n(\tau) = 1 + \frac{\tau}{n}\frac{y_n'(\tau)}{y_n(\tau)} = \frac{\tau}{n}\frac{z_n'(\tau)}{z_n(\tau)} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.5}$$

где $y_n(\tau)$ есть то решение гипергеометрического уравнения

$$\tau(1-\tau)\,y_n'' + [2n + 1 + (\beta - 2n - 1)\tau]\,y_n' + \beta n(2n+1)\,y_n = 0$$

которое ограничено при $\tau = 0$, а через τ_0 обозначено значение τ, соответствующее давлению p_0.

В исследовании Чаплыгина предполагается, что $\tau \leqslant \tau_0 \leqslant \alpha$. В этом случае ряды (1.3) и (1.4) сходятся всюду в области течения и дают решение поставленной задачи. Ниже рассматривается случай, когда $\tau_0 = \alpha$.

Напомним, что функция $z_n(\tau)$ и $x_n(\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant \alpha$ удовлетворяют следующим неравенствам Чаплыгина:

$$\left[\frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}}\right]^n \geqslant \frac{z_n}{z_{n0}}, \qquad z_n \geqslant 0 \tag{1.6}$$

$$\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}} + \frac{q\tau}{n^{1/3}(1-\tau)} > x_n > \sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}} \qquad \left(q = \sqrt[3]{2\beta^2(1+2\beta)} = \mathrm{const}\right)$$

2. Докажем, что потенциал скорости φ, данный формулой (1.4), при $\tau \to \tau_0$

(а) неограниченно возрастает, если $\tau_0 < \alpha$;

(б) остается ограниченным, если $\tau_0 = \alpha$.

При этом будем предполагать, что предельный переход $\tau \to \tau_0$ осуществляется путем удаления по течению вдоль какой-либо линии тока. Введем обозначения

$$\xi = \frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}}, \qquad P(\theta, \tau; \tau_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{z_n}{z_{n0}} x_n \cos 2n\theta$$

Легко видеть, что при $0 < \tau < \tau_0 \leqslant \alpha$ всегда $0 < \xi < 1$.

Для потенциала φ в точках оси $x\ (\theta = 0)$ получим из (1.4) выражение

$$\frac{\pi}{Q}\varphi = C + \frac{1}{2}\int\frac{d\tau}{\tau(1-\tau)^{\beta}} + \frac{1}{(1-\tau)^{\beta}}\left[-1 + P(0, \tau; \tau_0)\right] \tag{2.1}$$

На основании неравенств (1.6) и (1.7) для величины $P(0, \tau; \tau_0)$ имеем

$$\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\xi^n + \frac{q\tau}{1-\tau}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/3}}\xi^n > P(0,\tau;\tau_0) > \sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{z_n}{z_{n0}} \tag{2.2}$$

Теперь утверждение (а) очевидным образом следует из второго неравенства (2.2), так как $z_n / z_{n0} \to 1$ при $\tau \to \tau_0$, и, следовательно, сумма ряда с общим членом z_n / nz_{n0} неограниченно возрастает, тогда как множитель при ней в силу $\tau_0 \neq \alpha$ стремится к положительному пределу.

Переходя к утверждению (б), заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\xi^n = -\log(1-\xi) = -\log\left[1 - \frac{\tau(1-\tau)^{2\beta}}{\tau_0(1-\tau_0)^{2\beta}}\right]$$

в силу чего для $\tau_0 = \alpha$ при $\tau \to \alpha$ в (2.2) слева первое слагаемое стремится к нулю, а второе слагаемое — к конечной величине, равной

$$\frac{q\alpha}{1-\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-4/3}$$

Последнее рассуждение дословно повторяется вместе с первой из оценок (2.2) и для $P(\theta, \tau; \alpha)$ при $\theta \neq 0$, так что наше утверждение доказано полностью.

3. Из доказанной ограниченности сверху потенциала скорости φ следует, что на конечном расстоянии от отверстия BB' струю пересекает некоторая линия L, вдоль которой $\tau = \alpha$, следовательно, скорость равна скорости звука. Теперь покажем, что во всех точках L будет $\theta = 0$.

Для этого заметим сначала, что вдоль любой фиксированной линии тока величина θ меняется монотонно, так как это справедливо для граничных линий тока, а отображение $(\theta, \tau) \to (\varphi, \psi)$ однолистно во всякой внутренней точке области течения. Затем, закрепив какое-нибудь значение $\psi = \overline{\psi}$, для которого $|\overline{\psi}| < \frac{1}{2} Q$, перейдем к пределу при $\tau \to \alpha$ и обозначим $\theta_0 = \lim \theta$ при $\tau \to \alpha$ и $\psi = \overline{\psi}$, причем этот предел существует вследствие ограниченности величины θ и упомянутой монотонности ее изменения.

Совершая этот переход к пределу в (1.3) при $\psi = \overline{\psi}$, получим

$$\frac{\pi}{Q}\overline{\psi} = -\theta_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin 2n\theta_0 = \begin{cases} -\theta_0 - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\theta_0}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} & \text{если } \theta_0 > 0 \\ -\theta_0 - \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\theta_0}{2}\right) = +\frac{\pi}{2} & \text{если } \theta_0 < 0 \end{cases}$$

т. е. во всех случаях при $\theta_0 \neq 0$ будем иметь $|\overline{\psi}| = \frac{1}{2} Q$. Это противоречит предположению, что $|\overline{\psi}| < \frac{1}{2} Q$. Поэтому необходимо должно выполняться равенство $\theta_0 = 0$.

Покажем, что линия L прямая. Для этого предварительно установим, что вдоль L будет $\varphi = \text{const}$. Это легко получается, если рассмотренный выше переход к пределу осуществить в уравнении (1.4).

После этого достаточно заметить, что всякое перемещение на плоскости xy связано с соответствующим ему перемещением на плоскости $\varphi\psi$ соотношением

$$dx = \frac{\cos\theta}{V} d\varphi - \frac{\sin\theta}{V(1-\tau)} d\psi \tag{3.1}$$

из которого следует, что при перемещении вдоль L на плоскости xy будет $dx = 0$, так как при перемещении вдоль L на плоскости $\varphi\psi$ по доказанному выше $\theta = 0$ и $d\varphi = 0$. Итак, линия L на плоскости xy есть прямая, перпендикулярная оси x.

На линии L происходит выравнивание струи. За этой линией струя становится равномерной, текущей с постоянной скоростью, всюду равной скорости звука.

Вычислим расстояние линии L от края отверстия. Для этого заметим, что вдоль границы струи $\psi = \text{const}$ и $\tau = \alpha = \text{const}$, так что в точках этой границы формула (3.1) принимает вид

$$dx = \frac{\cos\theta}{V_{cr}} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} d\theta$$

Подставляя сюда выражение для φ (1.4), взятое при $\tau = \alpha$, получаем

$$dx = -\frac{Q}{\pi V_{cr}(1-\alpha)^{\beta}} \sum_{n=1}^{\infty} 2x_n(\alpha) \sin 2n\theta \cos\theta \, d\theta \tag{3.2}$$

Принимая во внимание, что

$$2\sin 2n\theta \cos\theta = \sin(2n+1)\theta + \sin(2n-1)\theta,$$

и интегрируя (3.2) от $x = x_B$, $\theta = \frac{1}{2}\pi$ до $x = x_L$, $\theta = 0$, находим

$$x_L - x_B = \frac{Q}{\pi V_{cr}(1-\alpha)^\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2-1} x_n(\alpha)$$

Если обозначить через h ширину струи там, где она является равномерной, то $Q = V_{cr}(1-\alpha)^\beta h$, так что окончательно получаем искомое расстояние в виде

$$\frac{x_L - x_B}{h} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{4n^2-1} x_n(\alpha) \tag{3.3}$$

4. Если принять любые две линии тока полученного течения за стенки некоторого сопла, то дозвуковое течение внутри такого сопла будет определяться уравнениями (1.3) и (1.4). Это течение выравнивается на конечном расстоянии и имеет прямую линию перехода. Этот факт вполне соответствует результату, полученному С. А. Христиановичем в работе[2], где дан некоторый общий прием построения сопел Лаваля с прямой переходной линией.

В связи с этим представляет интерес оценка первых производных от θ, τ по φ, ψ вблизи линии L, так как их поведение определяет возможность продолжения найденного течения через L в качестве сверхзвукового. Исследование этого сложного вопроса нами начато, и мы надеемся представить его в дальнейшем. Здесь ограничимся нижеследующими замечаниями.

Во-первых, из отмеченных свойств линии L следует, что производные $\partial\theta / \partial\psi$, $\partial\tau / \partial\psi$ и $\partial\theta / \partial\varphi$ равны нулю на L.

Во-вторых, оценим производную $\partial\tau / \partial\varphi$ в точках оси x. Достаточно рассмотреть производную $\partial\varphi / \partial\tau$, так как на оси x в силу равенств $\theta = 0$ и $\psi = \text{const}$ имеем

$$\frac{\partial\tau}{\partial\varphi} = \frac{1}{\partial\varphi / \partial\tau} \tag{4.1}$$

Подставляя во второе уравнение (1.1) выражение (1.3) для ψ при $\tau = \alpha$ и обозначая $z_{n\alpha} = z_n(\alpha)$, получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \frac{Q(\alpha-\tau)}{2\pi\alpha\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{z_{n\alpha}} \cos 2n\theta\right]$$

или на оси x, где $\theta = 0$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \frac{Q(\alpha-\tau)}{\pi\alpha\tau(1-\tau)^{\beta+1}} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{z_{n\alpha}}\right] \tag{4.2}$$

Для оценки величины, стоящей в квадратных скобках, которую обозначим буквой S, используя последнее из соотношений (1.5) и неравенства Чаплыгина (1.7), найдем

$$\frac{n}{\tau}\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}} + \frac{q}{1-\tau} n^{2/3} > \frac{d}{d\tau}\log z_n(\tau) > \frac{n}{\tau}\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}} \tag{4.3}$$

Интегрируя (4.3) от $\tau \geqslant \tau_1 > 0$ до $\tau = \alpha$, получим

$$n\int_\tau^\alpha \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}}\,d\tau + qn^{2/3}\int_\tau^\alpha \frac{d\tau}{1-\tau} > \log\frac{z_{n\alpha}}{z_n} > n\int_\tau^\alpha \frac{1}{\tau}\sqrt{\frac{\alpha-\tau}{\alpha(1-\tau)}}\,d\tau$$

Отсюда, повышая верхнюю и понижая нижнюю границы и выполняя интегрирование, найдем

$$\frac{2n}{3\tau_1\sqrt{\alpha(1-\alpha)}}(\alpha-\tau)^{3/2} + \frac{qn^{2/3}(\alpha-\tau)}{1-\alpha} > \log\frac{z_{n\alpha}}{z_n} > \frac{2n}{3\alpha\sqrt{\alpha}}(\alpha-\tau)^{3/2} \tag{4.4}$$

Таким образом, если положить $\alpha - \tau = z$ $(0 < z \leqslant \alpha - \tau_1)$, причем $z \to 0$ при $\tau \to \alpha$, и

$$\gamma = \frac{2}{3\tau_1 \sqrt{\alpha(1-\alpha)}} > 0, \qquad q_1 = \frac{q}{1-\alpha} > 0, \qquad \delta = \frac{2}{3\alpha\sqrt{\alpha}} > 0$$

то (4.4) примет вид

$$\gamma n z^{3/2} + q_1 n^{2/3} z > \log \frac{z_{n\alpha}}{z_n} > \delta n z^{3/2}$$

Отсюда получим оценки

$$\exp(-\gamma n z^{3/2} - q_1 n^{2/3} z) < \frac{z_n}{z_{n\alpha}} < \exp(-\delta n z^{3/2}) \tag{4.5}$$

В силу (4.5) для интересующей нас суммы S получим оценки

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma n z^{3/2} - q_1 n^{2/3} z) < S < \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\delta n z^{3/2}) = S_2 \tag{4.6}$$

Сумма S_2 легко вычисляется. Имеем

$$\frac{1}{2} < S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\delta z^{3/2}) - 1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{\delta z^{3/2}} \tag{4.7}$$

Для оценки суммы S_1 положим

$$u_n = \exp(-q_1 n^{2/3} z), \qquad v_n = \exp(-\gamma n z^{3/2}), \qquad S_n' = \sum_{k=0}^{n} v_k$$

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{m} u_n v_n = \sum_{n=0}^{m} \exp[-q_1 n^{2/3} z - \gamma n z^{3/2}]$$

Применяя к σ_m преобразование Абеля, получим

$$\sigma_m = \sum_{n=0}^{m-1} (u_n - u_{n+1}) S_n' + u_m S_m' \tag{4.8}$$

При $m^{-2/3}\omega \leqslant z \leqslant (m+1)^{-2/3}\omega$, где $\omega = \gamma^{-2/3}(\log 2)^{2/3}$, для сумм S_n' имеем оценку

$$S_n' = \sum_{k=0}^{n} \exp(-\gamma k z^{3/2}) > \frac{n+1}{2} \tag{4.9}$$

Разности $u_n - u_{n+1}$ оценим по формуле конечных приращений. Имеем

$$u_n - u_{n+1} = \exp[-q_1 n^{2/3} z] - \exp[-q_1 (n+1)^{2/3} z] =$$

$$= \frac{2q_1 z}{3} (n+\xi)^{-1/3} \exp[-q_1 (n+\xi')^{2/3} z] \qquad (0 < \xi < 1)$$

Отсюда, заменяя ξ единицей, получим неравенство

$$u_n - u_{n+1} > \frac{2q_1 z}{3} (n+1)^{-1/3} \exp[-q_1 (n+1)^{2/3} z] \tag{4.10}$$

Соединяя результаты (4.9), (4.10) и (4.11), получим оценку

$$\sigma_m > \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{3} q_1 z (n+1)^{2/3} \exp[-q_1 (n+1)^{2/3} z] = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{m} q_1 n^{2/3} z \exp[-q_1 n^{2/3} z]$$

Рассмотрим функцию

$$f(x, y) = xy^{2/3} \exp(-xy^{2/3}) \tag{4.11}$$

при $y \geqslant 0$, $x > 0$. Ее производная по y изменяется так:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} xy^{-1/3} \exp(-xy^{2/3})(1 - xy^{2/3}) \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad 0 \leqslant y < x^{-3/2} \\ = 0 & \text{при} \quad y = x^{-3/2} \\ < 0 & \text{при} \quad y > x^{-3/2} \end{cases}$$

Таким образом при фиксированном $x > 0$ функция $f(x, y)$ сначала возрастает от 0 до e^{-1}, а затем убывает и при $y \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому при любом $x > c$ находим неравенство

$$1 + \sum_{n=1}^{m} n^{2/3} x \exp(-n^{2/3} x) > \int_0^m xy^{2/3} \exp(-xy^{2/3})\, dy = g \tag{4.12}$$

Величину интеграла g найдем, применяя подстановку $xy^{2/3} = t$. Имеем

$$g = \frac{3}{2x^{3/2}} \int_0^{\chi} t^{3/2} e^{-t}\, dt \qquad (\chi = m^{2/3} x) \tag{4.13}$$

Подставляя (4.13) в (4.12), полагая $x = q_1 z$ и замечая, что $m^{2/3} z \geqslant \omega$, будем иметь

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_1 n^{2/3} z \exp(-q_1 n^{2/3} z) > \frac{3}{2q_1^{3/2}} \left[\int_0^{q_1\omega} t^{2/3} e^{-t}\, dt \right] z^{-3/2} - 1$$

в силу чего

$$S_1 = -1 + \sigma_m > -\frac{4}{3} + \frac{1}{2q_1^{3/2}} \left[\int_0^{q_1\omega} t^{2/3} e^{-t}\, dt \right] z^{-3/2} \tag{4.14}$$

На основании оценок (4.6), (4.7) и (4.14) заключаем, что найдутся две такие положительные константы δ_1 и γ_1, что будут иметь место оценки

$$\frac{1}{\delta_1 z^{3/2}} < S < \frac{1}{\gamma_1 z^{3/2}} \tag{4.15}$$

справедливые во всем интервале $0 < z \leqslant \alpha - \tau_1$. Возвращаясь к переменной τ и сопоставляя (4.2) с (4.15), получаем следующий результат: существуют две положительные константы δ_2 и γ_2 ($\delta_2 > \gamma_2$) такие, что при любом τ из интервала $\tau_1 < \tau < \alpha$, будет

$$\frac{1}{\delta_2 \sqrt{\alpha - \tau}} < \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} < \frac{1}{\gamma_2 \sqrt{\alpha - \tau}} \tag{4.16}$$

Из (4.1) и (4.16) следуют, наконец, оценки

$$\delta_2 \sqrt{\alpha - \tau} > \frac{\partial \tau}{\partial \varphi} > \gamma_2 \sqrt{(\alpha - \tau)} \tag{4.17}$$

доказанные для точек оси x.

Аналогичными приемами можно показать, что на оси x вторая производная $\partial^2 \tau / \partial \varphi^2$ остается конечной при $\tau \to \alpha$.

Поступила в редакцию
30 VIII 1947

ЛИТЕРАТУРА

1. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч. ОГИЗ Гостехиздат. 1948. Т. II.

2. Астров, Левин, Павлов, Христианович. О расчете сопел Лаваля. ПММ. 1943. Т. VII. Вып. 1.