

## О НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГРУНТОВЫХ ВОД

В. В. Соколовский

(Москва)

Настоящая работа посвящена рассмотрению плоской установившейся фильтрации грунтовых вод, происходящей по нелинейному закону определенного вида. Показан путь решения различных задач на основании известных решений соответствующих задач о фильтрации, следующей линейному закону.

**§ 1. Уравнения установившейся фильтрации.** В основе теории фильтрации грунтовых вод лежит закон фильтрации, устанавливающий зависимость между величиной скорости фильтрации  $v$  и гидравлическим уклоном  $I$ , которую будем записывать в виде  $I = \Phi(v)$ , причем функция  $\Phi(v)$  характеризует фильтрационные свойства грунта.

Для мелкозернистых грунтов эта зависимость линейна и носит название закона Дарси; для крупнозернистых грунтов указанная зависимость нелинейна, и установлению ее вида посвящен ряд экспериментальных исследований, приведенных в монографии Л. С. Лейбензона [1].

В дальнейшем мы будем рассматривать плоское движение, происходящее параллельно плоскости  $xy$ ; при этом условимся за ось  $x$  принимать горизонтальную, а за ось  $y$  вертикальную прямые.

Введем в рассмотрение давление  $p$ , плотность жидкости  $\rho$ , ускорение силы тяжести  $g$  и напор  $H$ , причем  $H = p/\rho g + y$ .

Между напором  $H$ , гидравлическим уклоном  $I$  принимается зависимость, предложенная С. А. Христиановичем:

$$\text{grad } H = -I \frac{\mathbf{v}}{v}$$

где  $\mathbf{v}$  — вектор скорости фильтрации.

Эта зависимость может быть заменена равенствами

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\Phi(v) \frac{v_x}{v}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -\Phi(v) \frac{v_y}{v} \quad (1.1)$$

где  $v_x$  и  $v_y$  — компоненты скорости фильтрации по осям  $x$  и  $y$ .

Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (1.2)$$

В дальнейшем будем пользоваться безразмерными координатами  $\xi = x/l$ ,  $\eta = y/l$ , принимая за  $l$  характерную длину.

Компоненты скорости  $v_x$  и  $v_y$  могут быть в силу (1.2) выражены через безразмерную функцию тока  $\psi$ :

$$v_x = +k \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v_y = -k \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \quad (1.3)$$

причем  $k$  — постоянная, имеющая размерность скорости.

Таким образом, плоская установившаяся фильтрация на основании равенств (1.1) и (1.3) описывается системой уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = v_x \frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = v_y \frac{\Phi(v)}{v}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{v_y}{k}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = +\frac{v_x}{k} \quad (1.4)$$

где обозначено

$$\varphi = -\frac{H}{l} + \text{const}$$

Эта система получена С. А. Христиановичем<sup>[2]</sup>.

Система уравнений (1.4) приводится к обычным уравнениям теории фильтрации при линейном законе Дарси

$$I = \Phi(v) = \frac{v}{k} \quad (0 \leq v \leq \infty) \quad (1.5)$$

Система уравнений (1.4), как будет показано ниже, может быть приведена к весьма простой форме также при нелинейном законе фильтрации следующего вида:

$$I = \Phi(v) = \frac{v}{k \sqrt{1 - (v/m)^2}} \quad (0 \leq v \leq m) \quad (1.6)$$

причем постоянные  $k$  и  $m$  имеют размерности скорости.

Закон фильтрации (1.6) в некотором интервале изменения  $0 \leq v \leq v_*$ , ( $v_* < m$ ) дает возможность получить достаточное приближение при обработке экспериментальных данных.

Заметим, что при  $m = \infty$  зависимость (1.6) переходит в (1.5).

Напомним контурные условия, обычно встречающиеся в задачах по теории фильтрации: вдоль *непроницаемой стенки*  $\psi = \text{const}$ , так как она является линией тока; вдоль *границы водоема*  $H = \text{const}$  или  $\varphi = \text{const}$ , так как она есть линия равного напора; вдоль *свободной поверхности*  $\psi = \text{const}$ , так как она служит линией тока и, кроме того, вдоль нее давление постоянно,  $p = \rho g (H - y) = \text{const}$ , а следовательно,  $\varphi + \eta = \text{const}$ ; вдоль *промежутка высачивания* давление  $p = \rho g (H - y) = \text{const}$ , а следовательно, вдоль нее  $\varphi + \eta = \text{const}$ .

Фильтрационный расход  $q$  через кривую  $MN$  определяется так

$$q = \int_{MN} v_n ds = kl (\psi_N - \psi_M) \quad (1.7)$$

где  $v_n$  — компонента скорости, нормальная к кривой  $MN$ .

Таким образом,

$$Q = \frac{q}{kl} = \psi_N - \psi_M \quad (1.8)$$

§ 2. Преобразование уравнений. Плоское установившееся движение грунтовых вод на основании равенств (1.4) и (1.6) описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{v_x}{V \sqrt{1 - (v/m)^2}}, & k \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{v_y}{V \sqrt{1 - (v/m)^2}} \\ k \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -v_y, & k \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= +v_x \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем вместо  $v_x$ ,  $v_y$  новые переменные

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta \quad (2.2)$$

где  $\theta$  — угол, который вектор скорости образует с положительным направлением оси  $x$ . Заменяя  $v_x$ ,  $v_y$  на  $v$ ,  $\theta$ , получим

$$\begin{aligned} k \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{v \cos \theta}{V \sqrt{1 - (v/m)^2}}, & k \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{v \sin \theta}{V \sqrt{1 - (v/m)^2}} \\ k \frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= -v \sin \theta, & k \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= +v \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Наряду с  $v$  будем пользоваться новой величиной  $w$

$$w = \frac{2v}{1 + \sqrt{1 - (v/m)^2}}, \quad v = \frac{w}{1 + (w/2m)^2} \quad (0 \leq w \leq 2m) \quad (2.4)$$

Заметим, что при  $m = \infty$  уравнения (2.3) переходят в уравнения фильтрации по линейному закону (1.5), а формулы (2.4) дают  $w = v$ .

Будем также применять безразмерные величины

$$V = \frac{v}{k}, \quad W = \frac{w}{k}, \quad \mu = \left( \frac{k}{2m} \right)^2$$

Уравнения (2.3) на основании (2.4) после введения безразмерных величин принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} &= \frac{W}{1 - \mu W^2} \cos \theta, & \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= \frac{W}{1 - \mu W^2} \sin \theta \\ -\frac{\partial \psi}{\partial \xi} &= \frac{W}{1 + \mu W^2} \sin \theta, & \frac{\partial \psi}{\partial \eta} &= \frac{W}{1 + \mu W^2} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.5)$$

а второе равенство (2.4) в безразмерных величинах будет

$$V = \frac{W}{1 + \mu W^2} \quad (2.6)$$

Произведем замену переменных, принимая  $\varphi$  и  $\psi$  за независимые, а  $\xi$  и  $\eta$  за искомые переменные. Формулы преобразования таковы:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \xi}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}$$

где через  $\Delta$  обозначен определитель преобразования:

$$\Delta = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \frac{\partial \eta}{\partial \psi} - \frac{\partial \xi}{\partial \psi} \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = \frac{1 - \mu^2 W^4}{W^2} \quad (2.7)$$

После указанной замены переменных уравнения (2.5) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} &= \frac{1 - \mu W^2}{W} \cos \theta, & \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} &= \frac{1 - \mu W^2}{W} \sin \theta \\ -\frac{\partial \xi}{\partial \psi} &= \frac{1 + \mu W^2}{W} \sin \theta, & \frac{\partial \eta}{\partial \psi} &= \frac{1 + \mu W^2}{W} \cos \theta \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем комплексные величины

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \chi = \varphi + i\psi, \quad \omega = -\ln W + i\theta$$

и сопряженные величины

$$\bar{\zeta} = \xi - i\eta, \quad \bar{\chi} = \varphi - i\psi, \quad \bar{\omega} = -\ln W - i\theta$$

Умножая второе и четвертое уравнения (2.8) из  $i = \sqrt{-1}$  и складывая их соответственно с первым и третьим, получим

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} = \frac{1 - \mu W^2}{W} e^{i\theta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \psi} = i \frac{1 + \mu W^2}{W} e^{i\theta} \quad (2.9)$$

Замена величин  $\varphi$  и  $\psi$  на  $\chi$ ,  $\bar{\chi}$ , а величин  $W$  и  $\theta$  на  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$  дает

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \chi} = e^{\omega}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\chi}} = -\mu e^{-\bar{\omega}} \quad (2.10)$$

Из этих уравнений следует, что

$$d\zeta = e^{\omega} d\chi - \mu e^{-\bar{\omega}} d\bar{\chi} \quad (2.11)$$

а также равенство

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\chi}} = \mu W^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \chi}$$

Вследствие того, что комплексные величины  $\partial \omega / \partial \bar{\chi}$  и  $\partial \bar{\omega} / \partial \chi$  сопряжены, а величина  $\mu W^2$  вещественна и  $0 \leq \mu W^2 < 1$ , имеем

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\chi}} = 0 \quad (2.12)$$

Это равенство устанавливает, что комплексная величина  $\omega$  есть аналитическая функция только от комплексного переменного  $\chi$

$$\omega = f(\chi).$$

Величины  $W$  и  $\theta$  выражаются через  $\chi$  при помощи равенства

$$-\ln W + i\theta = f(\chi) \quad (2.13)$$

а величина  $\zeta$  в силу (2.11) связана с  $\chi$  и  $\bar{\chi}$  уравнением

$$d\zeta = e^{f(\chi)} d\chi - \mu e^{-\bar{f}(\bar{\chi})} d\bar{\chi} \quad (2.14)$$

Иногда удобно рассматривать комплексную величину  $\chi$  как аналитическую функцию от комплексного переменного  $\omega$

$$\chi = F(\omega)$$

Величины  $W$  и  $\theta$  выражаются через  $\omega$  равенством

$$-\ln W + i\theta = \omega \quad (2.15)$$

а величина  $\zeta$  в силу (2.11) связана с  $\omega$  и  $\bar{\omega}$  уравнением

$$d\zeta = e^{\omega} F'(\omega) d\omega - \mu e^{-\bar{\omega}} \bar{F}'(\bar{\omega}) d\bar{\omega} \quad (2.16)$$

Заметим, что при  $\mu = 0$  ( $m = \infty$ ), когда имеет место фильтрация по линейному закону (1.5),  $W = V$ , формулы (2.13) и (2.15) принимают вид

$$-\ln V + i\theta = f(\chi) = \omega \quad (2.17)$$

а формулы (2.14) и (2.16) будут

$$d\zeta = e^{f(\chi)} d\chi = e^{\omega} F'(\omega) d\omega \quad (2.18)$$

Здесь величина  $\chi$  является комплексным потенциалом.

Приведенные уравнения дают возможность решать различные плоские задачи установившейся фильтрации при нелинейном законе (1.6), пользуясь известными решениями соответствующих задач фильтрации при линейном законе (1.5).

Путь решения обычный: функции  $\omega = f(\chi)$  или  $\chi = F(\omega)$  принимаются в том же виде, как и для фильтрации по линейному закону; подстановка этих функций соответственно в уравнение (2.14) или (2.16) и последующая интеграция приводит к функциям

$$\zeta = \zeta(\chi, \bar{\chi}) \quad \text{или} \quad \zeta = \zeta(\omega, \bar{\omega})$$

дающим решение задачи.

Форма области в плоскости  $xu$ , занятой потоком, будет той же, что и при линейном законе фильтрации. Размеры этой области определяются параметрами, входящими в решение. Подбирая эти параметры, можно получить заранее заданные размеры области. Следует отметить, что форма некоторых границ области будет несколько отличаться от формы соответствующих границ при линейном законе фильтрации.

Поясним это на двух примерах.

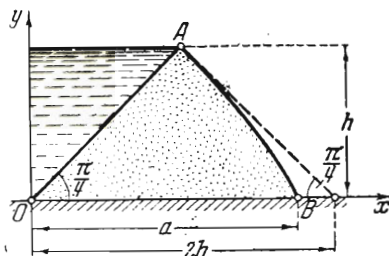
**§ 3. Фильтрация через треугольную плотину.** Исследуем фильтрацию воды через треугольную водопроницаемую плотину высоты  $h$ , расположенную на горизонтальном непроницаемом основании, причем со стороны верхнего бьефа вода доходит до вершины плотины, а со стороны нижнего бьефа вода отсутствует.

Расположим оси координат так, как это изображено на фиг. 1, т. е. направим ось  $x$  горизонтально, а ось  $y$  вертикально.

Ниже будем применять безразмерные величины

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \alpha = \frac{a}{h}, \quad Q = \frac{q}{kh}$$

принимая за характерную длину  $l$  высоту плотины  $h$ .



Фиг. 1

Решение этой задачи при линейном законе фильтрации (1.5), когда обе боковые грани плотины плоские, наклоненные к основанию под углами  $\pi/4$ , хорошо известно<sup>[3]</sup>. Она дается функцией

$$\chi = \frac{\zeta^2}{4} + \text{const} \quad (3.1)$$

Выбирая постоянную так, чтобы в точке  $O$ , где  $\zeta = 0$ , величина  $\chi = 0$ , а затем решая полученное уравнение относительно  $\zeta$ , найдем

$$\zeta = 2\sqrt{\chi} \quad (3.2)$$

Определяя

$$\frac{d\zeta}{d\chi} = \frac{1}{\sqrt{\chi}}$$

и подставляя это выражение в формулу (2.18), получим функцию

$$f(\chi) = -\frac{1}{2} \ln \chi \quad (3.3)$$

Решение поставленной задачи при нелинейном законе фильтрации (1.6) будем искать, принимая функцию  $f(\chi)$  в том же виде (3.3), как и при линейном законе фильтрации.

Уравнение (2.13) после подстановки выражения (3.3) принимает вид

$$-\ln W + i\theta = \omega = -\frac{1}{2} \ln \chi \quad (3.4)$$

а уравнение (2.14) будет

$$d\zeta = \chi^{-1/2} d\chi - \mu \bar{\chi}^{1/2} d\bar{\chi} \quad (3.5)$$

Интегрируем это уравнение и выбираем произвольную постоянную так, чтобы в точке  $O$ , где  $\zeta = 0$ , величина  $\chi = 0$ . Получим

$$\zeta = 2\chi^{1/2} - \frac{2\mu}{3} \bar{\chi}^{3/2}, \quad \text{или} \quad \zeta = 2e^{-\omega} - \frac{2\mu}{3} e^{-3\omega} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4) и (3.6) определяют полное решение поставленной задачи в комплексной форме. Легко в этих уравнениях разделить вещественную и мнимую части.

Величины  $W$ ,  $\theta$  выражаются через  $\varphi$ ,  $\psi$  так:

$$W^4 = \varphi^2 + \psi^2, \quad \text{tg } 2\theta = -\frac{\psi}{\varphi} \quad (3.7)$$

Уравнения **сетки** движения, связывающие  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\varphi$ ,  $\psi$ , могут быть получены из равенств

$$\xi = +2W \left( \cos \theta - \frac{\mu}{3} W^2 \cos 3\theta \right), \quad \eta = -2W \left( \sin \theta + \frac{\mu}{3} W^2 \sin 3\theta \right) \quad (3.8)$$

подстановкой выражений (3.7); полагая при этом  $\psi = \text{const}$  или  $\varphi = \text{const}$ , найдем соответственно линии тока или линии равного напора.

Непроницаемая горизонтальная граница  $OB$  должна быть **линией** тока, — функция  $\psi$  постоянна; прямолинейная граница водоема  $OA$  является линией равного напора, — функция  $\varphi$  постоянна. Эти условия выполнены: вдоль непроницаемой границы  $\eta = 0$  функция  $\psi = 0$ , а вдоль прямолинейной границы водоема  $\eta = \xi$  функция  $\varphi = 0$ .

Из формулы (1.8) ясно, что безразмерный расход  $Q$  через плотину на единицу ее ширины равен значению  $\psi$  в точке  $A$ , т. е.  $Q = \psi_A$

Величина  $Q$  определяется из кубического уравнения

$$2Q \left( 1 + \frac{\mu}{3} Q \right)^2 = 1$$

которое следует из уравнений (3.8) при  $\xi = \eta = 1$  (точка  $A$ ).

Решая написанное уравнение, получим (3.9)

$$\mu Q + 2 = \sqrt[3]{1 + \frac{9}{4} \mu + \frac{3}{2} \sqrt{2\mu + \frac{9}{4} \mu^2}} + \sqrt[3]{1 + \frac{9}{4} \mu - \frac{3}{2} \sqrt{2\mu + \frac{9}{4} \mu^2}}$$

Боковая грань  $AB$  является линией высачивания, поэтому вдоль нее величина  $\varphi + \eta$  постоянна, а в силу произведенного выше выбора постоянной интегрирования  $\varphi + \eta = 1$ . Полагая в уравнениях (3.8)  $\varphi = 1 - \eta$ , получим зависимость между  $W$  и  $\theta$  вдоль линии  $AB$ . Имеем

$$1 + 2W \sin \theta - W^2 \cos 2\theta + \frac{2\mu}{3} W^3 \sin 3\theta = 0 \quad (3.10)$$

Уравнения (3.8) и (3.10) определяют форму боковой грани  $AB$ , причем  $\alpha = 2(1 - \mu/3)$ , а также величины  $W$  и  $\theta$  на этой грани. Имеем

в точке  $A$

$$W = \sqrt{Q}, \quad \theta = -\frac{\pi}{4},$$

в точке  $B$

$$W = 1, \quad \theta = 0$$

Заметим, что в рассматриваемой области изменения  $\varphi$  и  $\psi$  определитель преобразования  $\Delta$ , определенный формулами (2.7) и (3.7), не равен нулю.

При  $\mu = 0$  величина  $2Q = 1$ , а при малых значениях  $\mu$  уравнение (3.9) приближенно дает  $2Q = 1 - \mu/3$ .

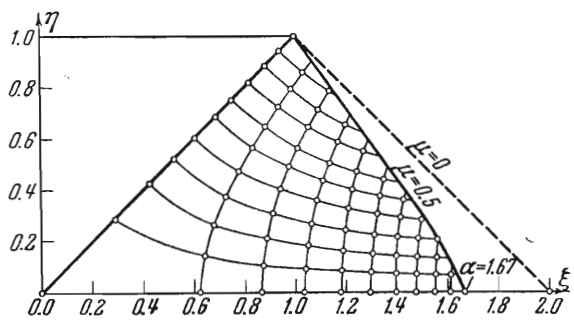
Таким образом, построенное здесь решение относится к плотине, общий вид которой совпадает с видом плотины, рассмотренной в известной задаче о фильтрации при линейном законе, а именно, основание  $\eta = 0$  и левая боковая грань  $\eta = \xi$  остаются теми же, правая боковая грань криволинейна.

Проиллюстрируем полученные формулы примером при  $\mu = 0.5$ . Величина  $Q$  по формуле (3.9) равна  $Q = 0.435$ .

Правая боковая грань  $AB$  определяется координатами

$\eta = 0.0$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\xi = 1.67$	1.62	1.57	1.51	1.44	1.36	1.29	1.22	1.14	1.07	1.00

найденными по уравнениям (3.8) и (3.10).



Фиг. 2

Сетка движения, состоящая из линий тока ( $\psi = \text{const}$ ) и линий равного напора ( $\varphi = \text{const}$ ), определяется координатами узловых точек в табл. 1, вычисленными по уравнениям (3.7) и (3.8).

На фиг. 2 построена правая боковая грань, а также нанесена сетка движения; правая боковая грань, имеющая место при линейном законе фильтрации (1.5), т. е. при  $\mu = 0$ , показана пунктиром.

**§ 4. Фильтрация из канала.** Исследуем нелинейную фильтрацию воды из канала глубины  $h$  на бесконечность, причем профиль канала симметричен относительно вертикальной оси.

Расположим оси координат так, как это показано на фиг. 3, т. е. направим ось  $x$  горизонтально, а ось  $y$  вертикально.

Ниже будем применять безмерные величины

$$\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \alpha = \frac{a}{h}, \quad \beta = \frac{b}{h}, \quad Q = \frac{q}{kh}$$

принимая за характерную длину  $l$  глубину канала  $h$ .

Решение этой задачи при линейном законе фильтрации (1.5) известно<sup>[4]</sup>. Оно дается функцией

$$\zeta = -i[\chi + e^{-\gamma\chi}] \quad (4.1)$$

Определяя

$$\frac{d\zeta}{d\chi} = i[\gamma e^{-\gamma\chi} - 1]$$

и подставляя это выражение в формулу (2.18), получим функцию

$$f(\chi) = \ln \{i[\gamma e^{-\gamma\chi} - 1]\} \quad (4.2)$$

Решение поставленной задачи при нелинейном законе фильтрации (1.6) будем искать, принимая функцию  $f(\chi)$  в том же виде (4.2), как и при линейном законе фильтрации.

Уравнение (2.13) после подстановки выражения (4.2) принимает вид

$$-\ln W + i\theta = \omega = \ln \{i[\gamma e^{-\gamma\chi} - 1]\} \quad (4.3)$$

а уравнение (2.14) будет

$$d\zeta = i[\gamma e^{-\gamma\chi} - 1] d\chi - \frac{i\mu}{\gamma e^{-\gamma\chi} - 1} d\bar{\chi} \quad (4.4)$$

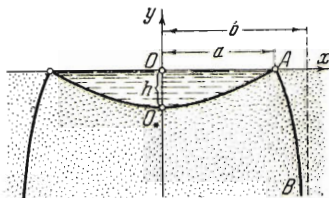
Интегрируем это уравнение, выбирая произвольную постоянную так, чтобы в точке  $O_*$ , где  $\zeta = -i$ , величина  $\chi = 0$ . Получим

$$\zeta = -i[\chi + e^{-\gamma\chi}] + i\mu \left[ \bar{\chi} + \frac{1}{\gamma} \ln \frac{1 - \gamma e^{-\gamma\bar{\chi}}}{1 - \gamma} \right] \quad (4.5)$$

или

$$\zeta = -\frac{i}{\gamma} \left[ (1 - ie^{\omega}) + \ln \frac{\gamma}{1 - ie^{\omega}} \right] + \frac{i\mu}{\gamma} \ln \frac{\gamma}{(1 - \gamma)(ie^{-\omega} - 1)} \quad (4.6)$$

Уравнения (4.3) и (4.5) — (4.6) дают полное решение поставленной задачи в комплексной форме.



Фиг. 3



Таблица 1

$\psi$	$\varphi$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.000	$\xi$	0.00	0.62	0.87	1.04	1.18	1.30	1.40	1.48	1.55	1.61	1.67
	$\eta$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
0.044	$\xi$	0.30	0.64	0.87	1.04	1.18	1.30	1.40	1.48	1.55	1.61	
	$\eta$	0.30	0.14	0.11	0.09	0.08	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07	
0.087	$\xi$	0.42	0.68	0.89	1.11	1.19	1.30	1.40	1.48	1.55	1.61	
	$\eta$	0.42	0.27	0.21	0.19	0.17	0.15	0.15	0.14	0.14	0.13	
0.130	$\xi$	0.52	0.72	0.91	1.07	1.20	1.31	1.41	1.49	1.56		
	$\eta$	0.52	0.38	0.31	0.27	0.24	0.23	0.22	0.21	0.20		
0.174	$\xi$	0.61	0.78	0.94	1.09	1.22	1.32	1.42	1.50			
	$\eta$	0.61	0.48	0.40	0.35	0.32	0.30	0.30	0.28			
0.218	$\xi$	0.68	0.83	0.98	1.11	1.24	1.34	1.43	1.50			
	$\eta$	0.68	0.57	0.49	0.44	0.40	0.38	0.36	0.35			
0.261	$\xi$	0.75	0.88	1.02	1.14	1.26	1.35	1.44				
	$\eta$	0.75	0.65	0.57	0.52	0.48	0.45	0.43				
0.304	$\xi$	0.82	0.94	1.06	1.17	1.28	1.37					
	$\eta$	0.82	0.72	0.65	0.59	0.55	0.52					
0.348	$\xi$	0.88	0.99	1.10	1.20	1.30						
	$\eta$	0.88	0.79	0.72	0.66	0.62						
0.392	$\xi$	0.94	1.04	1.14	1.24							
	$\eta$	0.94	0.86	0.79	0.74							
0.435	$\xi$	1.00	1.09									
	$\eta$	1.00	0.92									

В этих уравнениях легко разделить вещественную и мнимую части. Величины  $W$ ,  $\theta$  выражаются через  $\varphi$ ,  $\psi$  следующим образом:

$$\frac{1}{W^2} = 1 - 2\gamma e^{-\gamma\varphi} \cos(\gamma\psi) + \gamma^2 e^{-2\gamma\varphi}, \quad \operatorname{tg} \theta = - \frac{1 - \gamma e^{-\gamma\varphi} \cos(\gamma\psi)}{\gamma e^{-\gamma\varphi} \sin(\gamma\psi)} \quad (4.7)$$

Уравнения сетки движения, связывающие  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\varphi$ ,  $\psi$ , имеют вид

$$\xi = + (1 + \mu) \psi - e^{-\gamma\varphi} \sin(\gamma\psi) + \frac{\mu}{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma e^{-\gamma\varphi} \sin(\gamma\psi)}{1 - \gamma e^{-\gamma\varphi} \cos(\gamma\psi)} \quad (4.8)$$

$$\eta = - (1 - \mu) \varphi - e^{-\gamma\varphi} \cos(\gamma\psi) + \frac{\mu}{2\gamma} \ln \frac{1 - 2\gamma e^{-\gamma\varphi} \cos(\gamma\psi) + \gamma^2 e^{-2\gamma\varphi}}{(1 - \gamma)^2}$$

Полагая в этих уравнениях  $\psi = \text{const}$  или  $\varphi = \text{const}$ , получим соответственно линии тока или линии равного напора.

Контур поперечного сечения канала  $O_*A$  является линией равного напора — функция  $\varphi$  постоянна; в силу произведенного выше выбора постоянной интегрирования вдоль контура функция  $\varphi = 0$ .

Уравнения (4.7) и (4.8) при  $\varphi = 0$  определяют величины  $W$  и  $\theta$  вдоль контура:

$$\frac{1}{W^2} = 1 - 2\gamma \cos(\gamma\psi) + \gamma^2, \quad \operatorname{tg} \theta = - \frac{1 - \gamma \cos(\gamma\psi)}{\gamma \sin(\gamma\psi)} \quad (4.9)$$

а также дают уравнения этого контура

$$\begin{aligned}\xi &= (1 + \mu)\psi - \sin(\gamma\psi) + \frac{\mu}{\gamma} \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma \sin(\gamma\psi)}{1 - \gamma \cos(\gamma\psi)} \\ \eta &= -\cos(\gamma\psi) + \frac{\mu}{2\gamma} \ln \frac{1 - 2\gamma \cos(\gamma\psi) + \gamma^2}{(1 - \gamma)^2}\end{aligned}\quad (4.10)$$

Из формулы (4.8) ясно, что безразмерный фильтрационный расход  $Q$ , приходящийся на единицу длины канала, равен удвоенному значению  $\psi$  в точке  $A$ , т. е.  $Q = 2\psi_A$ .

Величина  $Q = Q(\alpha)$  и параметр  $\gamma = \gamma(\alpha)$  определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\alpha &= (1 + \mu) \frac{Q}{2} - \sin \frac{\gamma Q}{2} + \frac{\mu}{\gamma} \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma \sin(\gamma Q/2)}{1 - \gamma \cos(\gamma Q/2)} \\ \cos \frac{\gamma Q}{2} &= \frac{\mu}{2\gamma} \ln \frac{1 - 2\gamma \cos(\gamma Q/2) + \gamma^2}{(1 - \gamma)^2}\end{aligned}\quad (4.11)$$

которые следуют из уравнений контура при  $\xi = \alpha$ ,  $\eta = 0$ ,  $\psi = Q/2$  (точка  $A$ ).

Уравнения (4.8) при  $\psi = Q/2$  дают уравнения кривой депрессии  $AB$ , которая имеет асимптоту  $\xi = \beta$ , причем  $2\beta = (1 + \mu)Q$ ; величина  $2\beta$  определяет максимальную ширину фильтрационного потока.

При  $\mu = 0$  величины

$$\gamma = \frac{\pi}{2(1 + \alpha)}, \quad Q = 2(1 + \alpha)$$

а при малых значениях  $\mu$  уравнения (4.11) приближенно дают

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{\pi}{2(1 + \alpha)} \left[ 1 + \mu + \frac{2\mu}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{2(1 + \alpha)} \right] + \frac{\mu}{\pi} \ln \left[ 1 - \frac{4\pi(1 + \alpha)}{\pi^2 + 4(1 + \alpha)^2} \right] \\ Q &= 2(1 + \alpha) \left[ 1 - \mu - \frac{2\mu}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{\pi}{2(1 + \alpha)} \right]\end{aligned}\quad (4.12)$$

Заметим, что в рассматриваемой области изменения  $\varphi$  и  $\psi$ , т. е. для  $\varphi \geq 0$ ,  $-Q/2 \leq \psi \leq +Q/2$ , определитель преобразования  $\Delta$ , который определяется формулами (2.7) и (4.7), должен быть отличен от нуля, иначе  $\varphi$  и  $\psi$  не будут однозначными функциями от  $\xi$  и  $\eta$ .

Легко показать, что если параметр  $\gamma$  удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \gamma < 1 - \sqrt{\mu}$$

то определитель преобразования  $\Delta > 0$ . Действительно, при наличии этих неравенств в силу формул (4.7) для  $\varphi \geq 0$  получим

$$\frac{1}{W^2} = 1 - 2\gamma e^{-\gamma\varphi} \cos(\gamma\psi) + \gamma^2 e^{-2\gamma\varphi} \geq (1 - \gamma)^2$$

а следовательно, на основании формулы (2.7) будем иметь

$$\Delta \geq (1 - \gamma)^2 \left[ 1 - \frac{\mu^2}{(1 - \gamma)^4} \right] > 0$$

Таблица 2

$\psi$	$\varphi$	0	2	4	6	8
0.000	+ $\xi$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
	- $\eta$	1.00	1.32	1.94	2.72	3.59
0.427	+ $\xi$	0.60	0.61	0.62	0.63	0.63
	- $\eta$	0.99	1.31	1.93	2.72	3.59
0.854	+ $\xi$	1.21	1.23	1.25	1.26	1.27
	- $\eta$	0.95	1.29	1.92	2.71	3.59
1.281	+ $\xi$	1.81	1.84	1.87	1.89	1.90
	- $\eta$	0.89	1.26	1.91	2.70	3.58
1.708	+ $\xi$	2.41	2.45	2.49	2.52	2.54
	- $\eta$	0.80	1.22	1.88	2.69	3.58
2.135	+ $\xi$	3.01	3.07	3.12	3.15	3.17
	- $\eta$	0.70	1.16	1.85	2.67	3.56
2.562	+ $\xi$	3.60	3.68	3.74	3.78	3.81
	- $\eta$	0.58	1.10	1.81	2.65	3.55
2.989	+ $\xi$	4.20	4.30	4.37	4.42	4.44
	- $\eta$	0.44	1.02	1.77	2.62	3.54
3.416	+ $\xi$	4.80	4.92	5.00	5.05	5.08
	- $\eta$	0.30	0.94	1.73	2.60	3.52
3.843	+ $\xi$	5.39	5.53	5.62	5.68	5.72
	- $\eta$	0.14	0.85	1.68	2.57	3.51
4.270	+ $\xi$	6.00	6.15	6.26	6.32	6.35
	- $\eta$	0.00	0.76	1.62	2.54	3.49

Значение  $\alpha$ , определяемое из уравнения

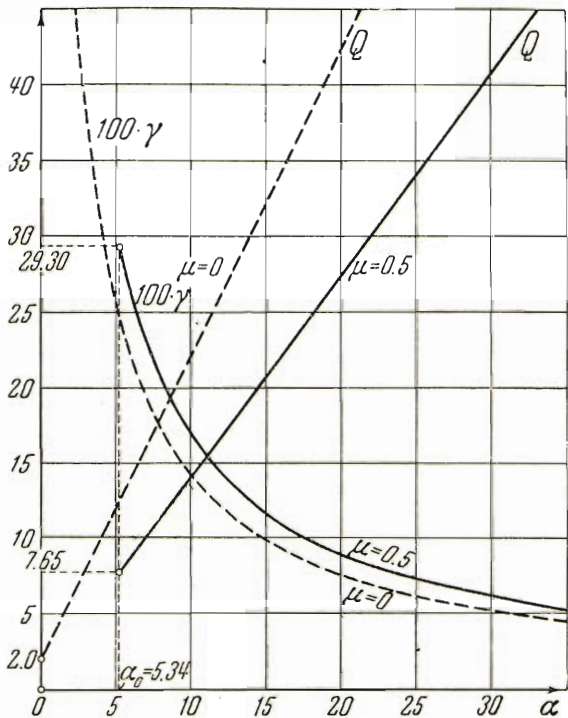
$$\gamma(\alpha) = 1 - \sqrt{\mu}$$

будем обозначать через  $\alpha_0$ .

Таким образом, найденное здесь решение, так же как и в известной задаче о фильтрации при линейном законе, относится к каналу, контур которого определяется в процессе решения.

Проиллюстрируем полученные формулы числовым примером при  $\mu = 0.5$ .

Графики зависимостей  $\gamma = \gamma(\alpha)$  и  $Q = Q(\alpha)$  представлены на фиг. 4 сплошными линиями; графики тех же зависимостей при линейном законе фильтрации (1.5) — пунктиром.



Фиг. 4

Для канала, у которого  $\alpha = 6$ , величины  $\gamma$ ,  $Q$  и  $\beta$  равны

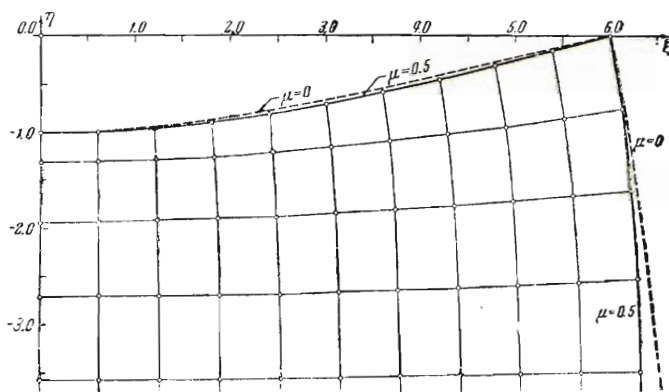
$$\gamma = 0.26, \quad Q = 8.54, \quad \beta = 6.45$$

Контур поперечного сечения канала  $O_1A$  определяется координатами

$+\xi = 0.00$	0.60	1.21	1.81	2.41	3.01	3.60	4.20	4.80	5.39	6.00
$-\eta = 1.00$	0.99	0.95	0.89	0.80	0.70	0.58	0.44	0.30	0.14	0.00

полученными по уравнениям [(4.10)].

Сетка движения, состоящая из линий тока ( $\psi = \text{const}$ ) и линий равного напора ( $\varphi = \text{const}$ ), дается координатами узловых точек в табл. 2, вычисленными по уравнениям (4.8).



Фиг. 5

На фиг. 5 построены контур поперечного сечения канала и кривая депрессии, а также нанесена сетка движения; контур поперечного сечения канала и кривая депрессии, имеющие место при линейном законе фильтрации, т. е. при  $\mu = 0$ , показаны пунктиром.

Поступила в редакцию  
24 VI 1949

Институт механики  
Академии Наук СССР

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. Гостехиздат. 1947.
2. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси. ПММ, 1940, Т. IV, Вып. 1.
3. Девисон Б. Б. Движение грунтовых вод. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. Академии Наук СССР. 1938.
4. Ведерников В. В. Теория фильтрации и ее применение в области прираща и дренажа. Госстройиздат. 1939.