

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В НЕСЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

Л. Г. Лойцянский

(Ленинград)

Среди всех существующих методов приближенного интегрирования дифференциальных уравнений ламинарного пограничного слоя наибольшее распространение получил метод, основанный на использовании уравнения импульсов^[1].

Точность такого метода зависит от более или менее удачного выбора однопараметрического семейства профилей скорости. Так, например, многочлен четвертой степени, предложенный в свое время Польгаузенем^[2], не дает близкого к действительности распределения скоростей вблизи отрыва слоя, что приводит в расчетах к сильно запоздалому по сравнению с опытом отрыву^[2]. Применяемые в последнее время более точные методы^[3, 4, 5] принимают в качестве однопараметрического семейства профилей точные решения некоторого частного класса обтеканий с заданным простым распределением скоростей на внешней границе пограничного слоя (степенной одночлен, линейная функция).

Переход к более сложным дву- и многопараметрическим семействам профилей потребовал бы использования, кроме уравнения импульсов, и других возможных уравнений (например, уравнения энергии^[6] и др.^[7]). При этом можно было бы ожидать достижения большей точности и при сравнительно простых профилях скорости в сечениях слоя, удовлетворяющих лишь основным граничным условиям на поверхности обтекаемого тела и на внешней границе пограничного слоя. По этому второму пути, однако, насколько нам известно, еще никто не пошел, если не говорить об одном простейшем решении для продольного обтекания пластинки^[8].

В настоящей статье излагается решение задачи о плоском ламинарном пограничном слое в несжимаемом газе, основанное на использовании системы уравнений последовательных моментов (в том числе и нулевого момента — уравнения импульсов) от уравнения пограничного слоя. Такая постановка вопроса приводит к сложной системе уравнений, которая, однако, легко решается при простых дополнительных допущениях. Полученное решение представляется в замкнутом виде крайне простыми формулами, причем не уступает по точности ранее указанным сравнительно сложным решениям, основанным на использовании частных классов точных решений уравнений пограничного слоя.

1. Вывод основной системы последовательных моментов уравнения пограничного слоя. Известные уравнения стационарного плоского ламинарного пограничного слоя при отсутствии объемных сил имеют вид

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U U' + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — продольная и поперечная проекции скорости в сечении пограничного слоя на продольную и поперечную оси координат x и y , $U(x)$ — заданная продольная скорость на внешней границе, $U' = dU/dx$, ν — кинематический коэффициент вязкости. Используя

уравнение неразрывности, можно первому из уравнений (1.1) придать более удобный вид: (1.2)

$$L(u, v) = \frac{\partial}{\partial x} [u(U - u)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] + U'(U - u) - \nu \frac{\partial^2 (U - u)}{\partial y^2} = 0$$

Умножим левую часть уравнения (1.2) на y^k и проинтегрируем по y от нуля до бесконечности в случае асимптотически бесконечного слоя или от нуля до внешней границы пограничного слоя $y = \delta(x)$ для схемы слоя конечной толщины; и в том и в другом случае будем иметь

$$\int_0^{\infty, \delta} L(u, v) y^k dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty, \delta} y^k u (U - u) dy + \int_0^{\infty, \delta} y^k \frac{\partial}{\partial y} [v(U - u)] dy + U' \int_0^{\infty, \delta} y^k (U - u) dy - \nu \int_0^{\infty, \delta} y^k \frac{\partial^2 (U - u)}{\partial y^2} dy = 0 \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что в силу крайне быстрого стремления разности скоростей $U - u$ к нулю при $y \rightarrow \infty$ все интегралы с бесконечным пределом имеют конечное значение.

При $k = 0$ имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty, \delta} u (U - u) dy + U' \int_0^{\infty, \delta} (U - u) dy = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (1.4)$$

где величина

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (1.5)$$

представляет напряжение трения на поверхности обтекаемого тела.

Уравнение (1.4) — известное уравнение количества движения или импульсов — легко преобразуется к своему обычному виду

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U'\delta^{**}}{U} (2 + H) = \frac{\tau_w}{\rho U^2} \quad (1.6)$$

где

$$\delta^* = \int_0^{\infty, \delta} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad \delta^{**} = \int_0^{\infty, \delta} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (1.7)$$

При $k = 1$ из (1.3) получим новое уравнение «первого момента»

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty, \delta} yu(U - u) dy - \int_0^{\infty, \delta} v(U - u) dy + U' \int_0^{\infty, \delta} y(U - u) dy = \nu U \quad (1.8)$$

и, вообще, при $k \geq 2$ уравнения последовательных старших «моментов»

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty, \delta} y^k u (U - u) dy - k \int_0^{\infty, \delta} y^{k-1} v (U - u) dy + U' \int_0^{\infty, \delta} y^k (U - u) dy = \\ = k(k-1) \nu \int_0^{\infty, \delta} y^{k-2} (U - u) dy \end{aligned} \quad (1.9)$$

Во всех этих уравнениях поперечная скорость $v(x, y)$ предполагается выраженной через продольную $u(x, y)$ из уравнения неразрывности.

Предположим, что нам удалось разыскать такое удовлетворяющее граничным условиям задачи семейство „конкурирующих“ функций

$$u = u^{\circ}(x, y; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \quad (1.10)$$

с k параметрами $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, являющимися функциями от x , что k последовательных моментов (1.3)

$$\int_0^{\infty, \delta} y^k L(u^{\circ}, v^{\circ}) dy \quad (1.11)$$

обратятся в нуль. Тогда в предположении о допустимости предельного перехода $k \rightarrow \infty$ можно было бы утверждать, что функция

$$u(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} u^{\circ}[x, y; \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_k(x)] \quad (1.12)$$

с параметрами $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_k(x)$, удовлетворяющими бесконечной системе уравнений

$$\int_0^{\infty, \delta} y^k L(u^{\circ}, v^{\circ}) dy = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

или, что все равно, системе (1.4), (1.8) и (1.9), будет *точным* решением основной системы (1.1) при принятых граничных условиях.

Для этого следует лишь вспомнить известную теорему о тождественном равенстве нулю непрерывной функции, все последовательные моменты которой равны нулю [9].

Оставляя в стороне вопрос о доказательстве правильности этой теоремы в случае бесконечного интервала или интервала, границы которого являются функциями некоторой переменной, по которой производится дифференцирование, мы все же получаем некоторое, хотя и не строгое обоснование построения решения задачи при помощи последовательных уравнений моментов основного уравнения пограничного слоя.

2. Выбор параметров семейства профилей скорости в сечениях пограничного слоя. Частный вид уравнений моментов. Как видно из предыдущего, основную трудность представляет выбор семейства профилей скорости (1.10) и установление параметров λ_k семейства. Укажем на один из простейших путей решения этой задачи.

Известно, что в конфузорной части пограничного слоя профили скоростей в различных сечениях слоя почти подобны между собой; профиль скорости деформируется главным образом в диффузорной части пограничного слоя, вниз по потоку за точкой минимума давления. Деформация профиля заключается в появлении точки перегиба, зарождающейся вблизи поверхности тела и затем удаляющейся от нее по мере приближения к точке отрыва.

Наличие этой деформации профиля вблизи поверхности должно сильно сказаться на величине τ_w , пропорциональной нормальной произ-

водной скорости на поверхности тела и, следовательно, убывающей до нуля при приближении к точке отрыва. Слабее скажется деформация профиля на таких интегральных величинах, как δ^* и δ^{**} , и уже совсем слабо на тех величинах, где под знаком интеграла стоят функции, очень быстро убывающие при приближении к поверхности тела.

Естественно за параметры, характеризующие влияние деформации профиля скоростей, принять те величины, которые сравнительно сильно зависят от деформации профиля; относительно же величин, слабо изменяющихся при деформации профиля скорости, сделать приближенное допущение, что они не зависят от выбранных параметров.

За основные параметры, определяющие изменение формы профилей скорости — их можно назвать *формпараметрами*, примем безразмерные комбинации величин τ_w , δ^* и δ^{**} с заданными функциями $U(x)$, $U'(x)$ и физическими константами, а именно, введем в рассмотрение

$$f = \frac{U' \delta^{**2}}{\nu}, \quad \zeta = \left(\frac{\partial(u/U)}{\partial(y/\delta^{**})} \right)_{y=0} = \frac{\tau_w \delta^{**}}{\mu U}, \quad H = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} \quad (2.1)$$

Для вычисления остальных величин в уравнении моментов согласно сделанному допущению примем профиль скоростей в сечении пограничного слоя в виде, не зависящем от параметров f , ζ и H :

$$\frac{u}{U} = \varphi\left(\frac{y}{\delta^{**}}\right) = \varphi(\eta) \quad (2.2)$$

Это допущение позволяет, как будет видно ниже, на основании крайне простых выкладок получить достаточно точное решение уравнений пограничного слоя при произвольном распределении скорости на внешней границе слоя. Обратимся к преобразованию уравнения (1.6).

Вводя параметр ζ , по (2.1) получим

$$\frac{d\delta^{**}}{dx} + \frac{U' \delta^{**}}{U} (2 + H) = \frac{\nu}{U \delta^{**}} \zeta \quad \text{или} \quad \frac{U}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{\delta^{**2}}{\nu} \right) + (2 + H) f = \zeta$$

После этого нетрудно окончательно получить

$$\frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{df}{dx} + \left(2 + H - \frac{1}{2} \frac{UU''}{U'^2} \right) f = \zeta \quad (2.3)$$

Для преобразования левой части уравнения (1.8) заметим, что по (2.2) первый интеграл может быть представлен так ($\eta = y/\delta^{**}$):

$$\int_0^\infty yu(U-u)dy = U^2 \delta^{**2} \int_0^\infty \eta\varphi(1-\varphi)d\eta = H_1 U^2 \delta^{**2} \quad (2.4)$$

где величина H_1 , равная

$$H_1 = \int_0^\infty \eta\varphi(1-\varphi)d\eta \quad (2.5)$$

представляет константу, вычисляемую по заданной функции $\varphi(\eta)$.

Для вычисления следующего интеграла выразим прежде всего поперечную скорость v по формуле

$$\begin{aligned} v &= - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = - \frac{\partial}{\partial x} \left(U \delta^{**} \int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) = \\ &= - U' \delta^{**} \int_0^{\eta} \varphi d\eta - U \frac{d\delta^{**}}{dx} \int_0^{\eta} \varphi d\eta - U \delta^{**} \varphi \frac{d\eta}{dx} \end{aligned}$$

или, замечая, что

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{\delta^{**}} \right) = - \frac{y}{\delta^{**2}} \frac{d\delta^{**}}{dx} = - \eta \frac{1}{\delta^{**}} \frac{d\delta^{**}}{dx}$$

получим

$$v = - U' \delta^{**} \int_0^{\eta} \varphi d\eta - U \frac{d\delta^{**}}{dx} \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta - \eta \varphi \right) \quad (2.6)$$

Итак, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} v (U - u) dy &= U^2 \delta^{**} \int_0^{\infty} \frac{v}{U} \left(1 - \frac{u}{U} \right) d\eta = \\ &= U^2 \delta^{**} \frac{d\delta^{**}}{dx} \int_0^{\infty} \left(\eta \varphi - \int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta - U U' \delta^{**2} \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \end{aligned}$$

или

$$\int_0^{\infty} v (U - u) dy = H_2 U^2 \delta^{**} \frac{d\delta^{**}}{dx} - H_3 U U' \delta^{**2} \quad (2.7)$$

где H_2 и H_3 обозначают постоянные

$$H_2 = \int_0^{\infty} \left(\eta \varphi - \int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, \quad H_3 = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \quad (2.8)$$

Наконец, последний интеграл в (1.8) преобразуется к виду

$$\int_0^{\infty} y (U - u) dy = H_4 U \delta^{**2} \quad (2.9)$$

где постоянная H_4 равна

$$H_4 = \int_0^{\infty} \eta (1 - \varphi) d\eta \quad (2.10)$$

Подставляя полученные интегралы в уравнение (1.8), получим

$$\frac{d}{dx} (H_1 U^2 \delta^{**2}) - H_2 U^2 \delta^{**} \frac{d\delta^{**}}{dx} + H_3 U U' \delta^{**2} + H_4 U U' \delta^{**2} = \nu U \quad (2.11)$$

или, заменяя $\delta^{**2}/\nu = f/U'$ по (2.1) и производя преобразования, найдем

$$\left(H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right) \frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} [1 - (2H_1 + H_3 + H_4) f] + \frac{U''}{U'} \left(H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right) f \quad (2.12)$$

Вводя новые константы

$$a = \frac{1}{H_1 - \frac{1}{2}H_2}, \quad b = \frac{2H_1 + H_3 + H_4}{H_1 - \frac{1}{2}H_2} \quad (2.13)$$

приведем уравнение первого момента к виду

$$\frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} (a - bf) + \frac{U''}{U'} f \quad (2.14)$$

Третье уравнение получим из системы (1.9), полагая $k = 2$,

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y^2 u (U - u) dy - 2 \int_0^{\infty} yv (U - u) dy + U' \int_0^{\infty} y^2 (U - u) dy = 2v \int_0^{\infty} (U - u) dy \quad (2.15)$$

Имеем, как и раньше,

$$\int_0^{\infty} y^2 u (U - u) dy = H_5 U^2 \delta^{**3} \quad (2.16)$$

где константа H_5 равна

$$H_5 = \int_0^{\infty} \eta^2 \varphi (1 - \varphi) d\eta \quad (2.17)$$

Далее, аналогично (2.7) получим

$$\int_0^{\infty} yv (U - u) dy = H_6 U^2 \delta^{**2} \frac{d\delta^{**}}{dx} - H_7 U U' \delta^{**3} \quad (2.18)$$

причем

$$H_6 = \int_0^{\infty} \eta \left(\eta \varphi - \int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, \quad H_7 = \int_0^{\infty} \eta \left(\int_0^{\eta} \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \quad (2.19)$$

Последний интеграл в левой части (2.15) равен

$$\int_0^{\infty} y^2 (U - u) dy = H_8 U \delta^{**3}, \quad \left(H_8 = \int_0^{\infty} \eta^2 (1 - \varphi) d\eta \right) \quad (2.20)$$

Интеграл, стоящий в уравнении (2.15) справа, сводится к неизвестному параметру H ; действительно,

$$\int_0^{\infty} (U - u) dy = U \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U} \right) dy = U \delta^{**} \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = U \delta^{**} H \quad (2.21)$$

Подставляя полученные выражения интегралов в уравнение второго момента (2.15), будем иметь после простых преобразований (2.22)

$$\frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) \frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} \left[H - \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8 \right) f \right] + \frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) \frac{U''}{U'} f$$

Итак, для определения трех неизвестных величин f , ζ и H составлена система трех уравнений: (2.3), (2.14) и (2.22). Обратимся к решению этой системы.

3. **Определение констант H_i .** Приближенные формулы для параметров f , ζ и H . Для нахождения численных величин констант H_1, H_2, \dots, H_8 надо задаться видом функции $\varphi(\eta)$. Простейшим профилем скоростей в теории асимптотического пограничного слоя является профиль скоростей в сечениях пограничного слоя на продольно обтекаемой пластинке. Функция $\varphi(\eta)$ для этого случая может быть легко определена по общезвестной таблице значений отношения скоростей u/U в функции от $\xi = \frac{1}{2} y \sqrt{U/\nu x}$.

Чтобы не делать лишних вычислений, заметим, что подлежащие вычислению постоянные связаны между собой некоторыми просто устанавливаемыми соотношениями.

Прежде всего заметим, что из уравнений (2.3) и (2.14) сразу следует

$$\zeta = \frac{1}{2} a + \left(2 + H - \frac{b}{2}\right) f \quad (3.1)$$

Полагая здесь $f = 0$, получим $a = 2\zeta_0$, где ζ_0 обозначает величину ζ , рассчитанную для пластинки ($U' = 0, f = 0$). По определению ζ и по известным соотношениям для пластинки получим

$$a = 2 \frac{\delta_0^{**} \tau_{w0}}{U \mu} = 2 \frac{0.664}{U} \sqrt{\frac{\nu x}{U}} \frac{0.332}{\mu} \sqrt{\frac{\mu \rho U^3}{x}} = 0.664^2 = 0.4408 \quad (3.2)$$

Далее, сравнивая между собой величины H_1, H_2, H_3 и H_4 , найдем

$$H_3 = H_1 - H_2 \quad (3.3)$$

$$H_4 - H_3 = \int_0^\infty \left(\eta - \int_0^\infty \varphi d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta = \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty (1 - \varphi) d\eta \right]^2 = \frac{1}{2} H_0^2 \quad (3.4)$$

где H_0 есть значение H при $f = 0$, т. е. отношение δ^*/δ^{**} для пластинки, равное, как известно,

$$H_0 = \frac{\delta^*}{\delta^{**}} = \frac{1.721}{0.664} = 2.59$$

После этого уже легко найти величину b по (2.13), (3.3) и (3.4)

$$\begin{aligned} b &= \frac{2H_1 + H_3 + H_4}{H_1 - \frac{1}{2}H_2} = a \left(2H_1 + H_1 - H_2 + H_1 - H_2 + \frac{1}{2}H_0^2 \right) = \\ &= a \left(4H_1 - 2H_2 + \frac{1}{2}H_0^2 \right) = 4 + \frac{a}{2}H_0^2 = 5.48 \approx 5.5 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из уравнений (2.22) и (2.14), исключая df/dx , получим

$$\begin{aligned} H &= \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2}H_8 \right) f + \frac{3H_5 - 2H_6}{4(H_1 - \frac{1}{2}H_2)} [1 - (2H_1 + H_3 + H_4)f] = \\ &= \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2}H_8 \right) f + \frac{a}{4} (3H_5 - 2H_6) \left(1 - \frac{b}{a} f \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Полагая здесь $f = 0$, найдем

$$\frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) = \frac{H_0}{a} = \frac{2.59}{0.44} \approx 5.89 \quad (3.7)$$

в наших параметрах, получим аналоги формул (3.9), (3.10) и (3.11)

$$H = 2.59, \quad \zeta = 0.22 + 4.09f, \quad f = 0.44 \frac{U'x}{U} \quad (3.12)$$

Легко видеть, что последняя формула для f соответствует формуле (3.11) при $b = 1$. Прямые для ζ и H , показанные на той же фиг. 1 пунктиром, свидетельствуют о значительном расхождении формул Райта и Бейли с нашими более точными формулами.

Для подтверждения этого факта рассмотрим частный случай ламинарного пограничного слоя, отвечающий так называемому «односкатному» профилю скорости на внешней границе слоя $U = 1 - x$. Этот случай разрешен теоретически, и для него имеется точное решение в табличной форме^[11]. Результаты пересчета этих точных решений в форме принятых нами параметров приведены на фиг. 2. Здесь же для сравнения приводятся соответствующие кривые по предложенному нами приближенному решению и по методу Райта и Бейли.

4. Возможные пути уточнения предыдущего метода. Изложенный в предыдущих параграфах метод был основан на допущении слабой зависимости H_i от формпараметров f, ζ и H . Можно отказаться от этого допущения и пойти по пути уточнения метода, однако это уточнение оказывается связанным со значительным усложнением.

Чтобы разобраться в возможных обобщениях метода, выпишем полную систему уравнений, например, для трехпараметрического случая, т. е. предположим, что вместо (2.2) выбрано трехпараметрическое семейство профилей скорости в сечениях пограничного слоя

$$\frac{u}{U} = \varphi(\eta; f, \zeta, H) \quad \left(\eta = \frac{y}{\delta^{**}} \right) \quad (4.1)$$

Произведя подстановку этого профиля скоростей в систему трех уравнений последовательных моментов (1.6), (1.8) и (2.15), можно получить систему трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, определяющих величины формпараметров f, ζ и H :

$$\frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{df}{dx} + \left(2 - \frac{1}{2} \frac{UU''}{U'^2} \right) f + Hf = \zeta \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} & \left[H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \left(K_1 + \frac{\partial H_1}{\partial f} \right) f \right] \frac{df}{dx} + \left(K_2 + \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} \right) f \frac{d\zeta}{dx} + \left(K_3 + \frac{\partial H_1}{\partial H} \right) f \frac{dH}{dx} = \\ & = \frac{U'}{U} \left[1 - (2H_1 + H_3 + H_4) f \right] + \frac{U''}{U'} \left(H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right) f \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) + \left(K_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial H_5}{\partial f} \right) f \right] \frac{df}{dx} + \left(K_5 + \frac{1}{2} \frac{\partial H_5}{\partial \zeta} \right) f \frac{d\zeta}{dx} + \\ & + \left(K_6 + \frac{1}{2} \frac{\partial H_5}{\partial H} \right) f \frac{dH}{dx} = \frac{U'}{U} \left[H - \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8 \right) f \right] + \\ & + \frac{1}{4} \frac{U''}{U'} (3H_5 - 2H_6) f \end{aligned} \quad (4.4)$$

в которых, кроме указанных ранее, приняты еще следующие дополнительные обозначения:

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\eta \frac{\partial \varphi}{\partial f} d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, & K_4 &= \int_0^\infty \eta \left(\int_0^\eta \frac{\partial \varphi}{\partial f} d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \\ K_2 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, & K_5 &= \int_0^\infty \eta \left(\int_0^\eta \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \quad (4.5) \\ K_3 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\eta \frac{\partial \varphi}{\partial H} d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta, & K_6 &= \int_0^\infty \eta \left(\int_0^\eta \frac{\partial \varphi}{\partial H} d\eta \right) (1 - \varphi) d\eta \end{aligned}$$

Заметим, что в системе уравнений (4.2), (4.3) и (4.4) H_i и K_i уже не постоянные величины, как ранее, а известные функции формпараметров f , ζ и H , причем вид этих функций зависит от выбранного семейства профилей (4.1).

Ранее использованные уравнения (2.3), (2.14) и (2.22) представляют, очевидно, частный случай системы (4.2), (4.3) и (4.4) в предположении, что семейство профилей скорости в различных сечениях пограничного слоя имеет вид (2.2); иными словами, что профили эти подобны между собой. При этом, конечно, все K_i равны нулю, а H_i постоянны.

Можно значительно уточнить изложенный метод, задавшись, например, *однопараметрическим* семейством профилей скорости

$$\frac{u}{U} = \varphi(\eta; f) \quad (4.6)$$

Тогда

$$K_2 = \frac{\partial H_1}{\partial \zeta} = K_3 = \frac{\partial H_1}{\partial H} = K_5 = \frac{\partial H_5}{\partial \zeta} = K_6 = \frac{\partial H_5}{\partial H} = 0$$

и система уравнений (4.2), (4.3) и (4.4) переходит в следующую:

$$\frac{1}{2} \frac{U}{U'} \frac{df}{dx} + \left(2 - \frac{1}{2} \frac{UU''}{U'^2} \right) f + Hf = \zeta \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \left[H_1 - \frac{1}{2} H_2 + \left(K_1 + \frac{\partial H_1}{\partial f} \right) f \right] \frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} [1 - (2H_1 + H_3 + H_4) f] + \\ + \frac{U''}{U'} \left(H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right) f \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) + \left(K_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial H_5}{\partial f} \right) f \right] \frac{df}{dx} = \\ = \frac{U'}{U} \left[H - \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8 \right) f \right] + \frac{1}{4} \frac{U''}{U'} (3H_5 - 2H_6) f \end{aligned} \quad (4.9)$$

Уравнению (4.8) можно придать форму

$$\frac{df}{dx} = \frac{U'}{U} \frac{1 - (2H_1 + H_3 + H_4) f}{H_1 - \frac{1}{2} H_2 + (K_1 + \partial H_1 / \partial f) f} + \frac{U''}{U'} \frac{H_1 - \frac{1}{2} H_2}{H_1 - \frac{1}{2} H_2 + (K_1 + \partial H_1 / \partial f) f} f \quad (4.10)$$

представляющую обобщение уравнения (2.12), причем в силу слабой изменяемости H_i при изменении параметра f и малости величины $(K_1 + \partial H_1 / \partial f) f$ по сравнению с величиной $H_1 - H_2 / 2$ уравнение (4.10) оказывается близким к уравнению (2.12). Это позволяет найти интеграл уравнения (4.10) введением поправки к решению уравнения (2.12).

Деля затем почленно обе части уравнения (4.9) на соответственные части (4.8) и исключая таким образом df/dx , получим

$$H = \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8 \right) f + \quad (4.11)$$

$$+ \frac{\frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) + (K_1 + \frac{1}{2} \partial H_5 / \partial f) f}{H_1 - \frac{1}{2} H_2 + (K_1 + \partial H_1 / \partial f) f} [1 - (2H_1 + H_3 + H_4) f] +$$

$$+ \frac{UU''}{U'^2} \left[\left(H_1 - \frac{1}{2} H_2 \right) \frac{\frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) + (K_1 + \frac{1}{2} \partial H_5 / \partial f) f}{H_1 - \frac{1}{2} H_2 + (K_1 + \partial H_1 / \partial f) f} - \frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) \right] f$$

По тем же соображениям о малости величины $(K_1 + \frac{1}{2} \partial H_5 / \partial f) f$ по сравнению с $(3H_5 - 2H_6) / 4$ и величины $(K_1 + \partial H_1 / \partial f) f$ по сравнению с величиной $H_1 - \frac{1}{2} H_2$, а также ввиду слабой изменяемости величин H_i можно заключить, что значение H , определенное по (4.11), представляет уточнение указанного приближенного значения H согласно (3.6).

Отметим, что в этом более точном приближении уже нет той универсальной, не зависящей от вида функции $U(x)$, характеризующей данную частную задачу, связи между параметрами H и f . Действительно, наличие в уравнении (4.11) второго члена с множителем UU''/U'^2 указывает, что в более точном приближении величина H в данном сечении слоя зависит не только от значения формпараметра f в этом сечении, как это имело место в более грубом приближении (3.6) или (3.9), но и от значения величины UU''/U'^2 в рассматриваемом сечении слоя, т. е. от значений функции $U(x)$ и двух первых ее производных. Легко заметить, что указанный второй член в правой части уравнения (4.11) при сравнительно малых значениях величины UU''/U'^2 даст малую поправку к решению (3.6).

Аналогичный факт имеет место и в выражении для ζ , которое можно получить, подставляя df/dx из (4.10) и H из (4.11) в равенство (4.7):

$$\zeta = \frac{1 - (2H_1 + H_3 + H_4) f}{H_1 - \frac{1}{2} H_2 + (K_1 + \partial H_1 / \partial f) f} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} (3H_5 - 2H_6) f + \left(K_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial H_5}{\partial f} \right) f^2 \right] +$$

$$+ 2f + \left(H_5 + H_7 + \frac{1}{2} H_8 \right) f^2 - \quad (4.12)$$

$$- \frac{UU''}{U'^2} \frac{(K_1 + \partial H_1 / \partial f) f^2 \left[\frac{1}{2} + (3H_5 - 2H_6) f / 4 \right] - [K_1 + \frac{1}{2} \partial H_5 / \partial f] (H_1 - \frac{1}{2} H_2) f^3}{H_1 - \frac{1}{2} H_2 + (K_1 + \partial H_1 / \partial f) f}$$

Как видно, в этом новом приближении в отличие от предыдущего нет универсальной связи между ζ и f . Наличие члена с множителем UU''/U'^2 делает величину ζ зависящей не только от значения параметра f , но и явно от вида функции $U(x)$ и ее первых двух производных в данном сечении пограничного слоя.

Интересно отметить, что в этом приближении положение точки отрыва пограничного слоя, т. е. такого значения $x = x_s$, при котором ζ будет равно нулю, уже не будет определяться каким-то универсальным значением формпараметра f_s , а в каждом отдельном случае должно определяться значением $x = x_s$, при котором правая часть равенства (4.12) обращается в нуль.

Задаваясь конкретным видом семейства профилей скорости (4.6), используя для этого, например, наборы профилей скорости, примененные в предыдущих работах [3, 4, 5], определим значения функций H_i и K_i , после чего уже не составит труда найти и формпараметры f , ζ и H , т. е. толщину потери импульса δ^{**} , напряжение трения τ_w и толщину вытеснения δ^* . Решение уравнения (4.10) и определение H и ζ по формулам (4.11) и (4.12) не представляет особенного труда. Дальнейшие уточнения, требующие решения систем уравнений типа (4.2), (4.3) и (4.4), вряд ли представят практический интерес.

Во всем предыдущем использовалась схема асимптотически бесконечного пограничного слоя, аналогичные уравнения могли быть написаны и в случае схемы слоя конечной толщины.

Излагаемый в настоящей статье метод может быть, очевидно, применен и к расчету теплового пограничного слоя. Отличительная особенность метода как в случае динамического, так и теплового слоя заключается в том, что напряжение трения и количество тепла, передающегося с единицы площади тела, выражаются интегрально, а не через производные от функций, представляющих приближенное распределение скоростей и температур в сечениях пограничного слоя.

Поступила в редакцию
4 VI 1949

Ленинградский
политехнический институт

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГТТИ. 1941. Стр. 170.
2. Лойцянский Л. Г. Там же. Стр. 187.
3. Лойцянский Л. Г. Приближенный метод расчета ламинарного пограничного слоя на крыле. Доклады АН СССР. 1942. Т. XXXV. № 8.
4. Кочин Н. Е., Лойцянский Л. Г. Об одном приближенном методе расчета ламинарного пограничного слоя. Доклады АН СССР. 1942. Т. XXXVI. № 9.
5. Мельников А. П. О некоторых проблемах теории крыла, работающего в неидеальной среде. Докторская диссертация. Л. Военно-воздушная инженерная академия. 1942.
6. Лейбензон Л. С. Энергетическая форма интегрального условия в теории пограничного слоя. Труды ЦАГИ. 1935. Вып. 240.
7. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II, ГТТИ. Изд. 3. 1948. Стр. 450.
8. Sutton W. G. Phil. Mag. (7). 23. 1937. P. 1146—1152.
9. Карслоу X., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. М.—Л. 1948. Стр. 267.
10. Wright E. A., Bailey G. W. Laminar Frictional Resistance with Pressure Gradient. Journ. of the Aeronautical Sciences. 1939. Vol. 6. No 12.
11. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. Proceed. of the Royal Society. Ser. A. 1938. Vol. 164. No 919.